Universidad Central de Venezuela — Mayo, 2021
Postgrado en Ciencias de la Computación
Cátedra: Tópicos Especiales en Análisis Numérico

Tarea 1:

Fórmulas de diferencias finitas (FDF): construcción, tipo de malla (nodal o centro-distribuída) y error local de truncamiento (ELT).

1. Use expansiones de Taylor y el método de coeficientes indeterminados (MCI), solo si lo considera necesario, en cada uno de los casos siguientes:
   a) Para derivar la FDF *adelantada (forward) nodal* que aproxima $u'(x_0)$ usando las evaluaciones funcionales $u(x_0), u(x_0+h),\ y\ u(x_0+2h)$ con un ELT de $O(h^2)$. Compare contra la FDF *regresiva (backward)* presentada en la sección 1.2 del texto de *R. LeVeque, 2007*. Comente.
   b) Para derivar la FDF que aproxima $u''(x_0)$ usando las mismas evaluaciones funcionales $u(x_0), u(x_0+h),\ y\ u(x_0+2h)$. En este caso, cual es el orden del ELT?.
   c) Para derivar la FDF *centrada centro-distribuída (staggered)* que aproxima $u'(x_0)$ usando las evaluaciones funcionales $u(x_0 \pm h/2)\ y\ u(x_0 \pm 3h/2)$ con un error de truncamiento $O(h^4)$.
   d) Para derivar la FDF que aproxima $u'(x_0)$ usando las evaluaciones funcionales $u(x_0-h/2), u(x_0+h/2), u(x_0+3h/2), u(x_0+5h/2), u(x_0+7h/2)$. En este caso, cual es el orden del ELT?.

   En los casos (c) y (d) debe presentar claramente el sistema lineal resultante del MCI. En la solución de los mismos, puede usar cualquier librería de resolución de sistemas o simplemente el comando “\” de MATLAB. Verifique sus resultados al comparar las FDF obtenidas con las presentadas en *B. Fornberg, 1988*.

2. (MATLAB) Revise el script *“GandD.m”* para la construcción de las matrices de diferenciación *G* y *D* en mallas centro-distribuídas con FDF de orden opcional segundo, cuarto o sexto. El orden de precisión particular es un parámetro de entrada a *GandD.m*, al igual que el numero de celdas de malla *N*. Modifique el script adjunto *“test_GandD.m”* para aproximar $u'(x_{cb})$ y $u''(x_n)$, mediante los operadores *G* y *D·G*, respectivamente, en los casos:

   (i) $u(x) = S\cos(\pi x)$ (ii) $u(x) = (x+1)^6 + (x+S)^m$.

   El vector x_n corresponde a los nodos de la partición uniforme $x_i = i*h,\ i=0,\ldots,N$ en *[0,1]*, para $h=1/N$, mientras que x_{cb} es el vector con las localizaciones de los centros de celdas y ambos bordes. Ambos vectores ya se construyen en *test_GandD.m*, para su facilidad. El parámetro *S* corresponde a la suma de los dígitos de su cédula de identidad, mientras que $m = \mathrm{mod}(S,6)$ (resto de la división entera). Calcule los errores *L2* de las aproximaciones pedidas para las particiones $N = 8, 15, 30, 60, 120, 180, 240$ en los casos de segundo, cuarto, y sexto orden. Además, ilustre la dependencia de estos errores en *N* en un plot *loglog* y estime el orden de convergencia experimental de cada aproximación usando el comando *polyfit*.

NOTAS: (a) Se recomienda revisar la referencia *Castillo et al (2001)*, pags. 178-181, y comparar con las FDF de los operadores *G* y *D* en *GandD*. (b) Use la tabla 1.1 y la figura 1.2, Cap. 1, del texto de *R. LeVeque, 2007*, como referencia al presentar sus resultados.

3. (MATLAB) Reuse los scripts *GandD.m* and *test_GandD.m* para aproximar $u'''(x_{nI})$, mediante la composición de los operadores *G* y *D*, siendo x_{nI} el vector de nodos interiores $x_i = i*h,\ i=1,\ldots,N-1$. La composición se implementa mediante simple productos matriciales. Repita el análisis de convergencia experimental para la función 2(i) en este caso de $u'''(x_{nI})$.

4. (OPCIONAL) Deduzca la FDF y ELT asociado, semejantes a las ecuaciones (1.15) y (1.16), ejemplo 1.4 en la pag. 9 del texto *R. LeVeque, 2007*, pero para aproximar $u'(x_1)$. En la construcción puede hacer uso del método de su preferencia, ya sea interpolación polinomial o MCI. Justifique que el ELT es de primer orden si $h_1 \neq h_2$, mientras que en el caso $h_1 = h_2$ resulta de segundo orden.

Referencias:

1) Bengt Fornberg. Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Space_Grids. Mathematics of Computation, Vol. 51, No. 184 (Oct., 1988), pp. 699-706.
2) Randall J. LeVeque. Finite difference methods for Ordinary and Partial Differential Equations, SIAM, 2007.
3) Castillo, J.E., J. Hyman, M. Shashkov, S. Steinberg. Fourth- and sixth-order conservative finite difference approximations of the divergence and gradient. J Appl. Numer. Math. 37, 1-2, pags 171-187. 2001.

Fecha de entrega: 02 de Julio, 2021.
Prof. Otilio Rojas