

3ª Edición

Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno



Prentice
Hall

Richard Haberman

Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno

Ecuaciones en Derivadas Parciales con Series de Fourier y Problemas de Contorno

Tercera Edición

RICHARD HABERMAN
Southern Methodist University

Traducción

Arturo de Pablo Martínez
Domingo Pestana Galván
Elena Romera Colmenarejo
Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo
San Juan • San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

RICHARD HABERMAN
Ecuaciones en Derivadas Parciales. Tercera edición
PEARSON EDUCACIÓN, S. A., Madrid, 2003
ISBN: 84-205-3534-6
ECUACIONES 517
Formato 195 × 250 Páginas: 824

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y sgts. Código Penal).

DERECHOS RESERVADOS

© 2003 por PEARSON EDUCACIÓN, S.A.
Núñez de Balboa, 120
28006 MADRID

RICHARD HABERMAN

Ecuaciones en Derivadas Parciales. Tercera edición

ISBN: 84-205-3534-6

Depósito legal: M. 2.365-2003

PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Traducido de:

Elementary Applied Partial Differential Equations. Third Edition

Copyright © 1998, 1987, 1983, Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458

ISBN: 0-13-263807-X

Equipo editorial:

Editora: Isabel Capella

Técnico editorial: Marta Caicoya

Equipo de producción:

Director: José A. Clares

Técnico: Isabel Muñoz

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación S. A.

Impreso por: Gráficas Rógar, S.A.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

A Lis. Ken y Varta

Índice general

Prólogo	xv
1. La ecuación del calor	1
1.1. Introducción	1
1.2. Deducción de la conducción del calor en una varilla unidimensional .	2
1.3. Condiciones de contorno	11
1.4. Distribución de temperaturas en equilibrio	14
1.4.1. Temperatura prescrita	14
1.4.2. Fronteras aisladas	16
1.5. Deducción de la ecuación del calor en dimensiones dos y tres	20
2. Método de separación de variables	35
2.1. Introducción	35
2.2. Linealidad	36
2.3. Ecuación del calor con temperatura cero en los extremos	38
2.3.1. Introducción	38
2.3.2. Separación de variables	39
2.3.3. Ecuación dependiente del tiempo	41
2.3.4. Problema de contorno	42
2.3.5. Soluciones producto y principio de superposición	48
2.3.6. Ortogonalidad de las funciones seno	50
2.3.7. Formulación, resolución e interpretación de un ejemplo . . .	52
2.3.8. Resumen	54
2.4. Diversos problemas de contorno para la ecuación del calor	61
2.4.1. Conducción del calor en una varilla con extremos aislados . .	61
2.4.2. Conducción del calor en un anillo delgado	65
2.4.3. Resumen de problemas de contorno	71
2.5. Ecuación de Laplace: soluciones y propiedades cualitativas	73
2.5.1. Ecuación de Laplace en un rectángulo	73
2.5.2. Ecuación de Laplace en un disco	78
2.5.3. Flujo de un fluido alrededor de un cilindro circular (susten- tación)	82
2.5.4. Propiedades cualitativas de la ecuación de Laplace	86

3. Series de Fourier	93
3.1. Introducción	93
3.2. Enunciado del teorema de convergencia	95
3.3. Series de Fourier de senos y cosenos	100
3.3.1. Serie de Fourier de senos	100
3.3.2. Series de Fourier de cosenos	110
3.3.3. Representación de $f(x)$ en serie de senos y cosenos	113
3.3.4. Partes par e impar	114
3.3.5. Series de Fourier continuas	115
3.4. Diferenciación término a término de series de Fourier	121
3.5. Integración término a término de series de Fourier	132
3.6. Forma compleja de series de Fourier	136
4. Membranas y cuerdas vibrantes	141
4.1. Introducción	141
4.2. Deducción de la ecuación para la cuerda vibrante	141
4.3. Condiciones de contorno	145
4.4. Cuerda vibrante con extremos fijos	148
4.5. Membrana vibrante	156
4.6. Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas (luz) y acústicas (sonido)	158
4.6.1. Ley de refracción de Snell	159
4.6.2. Intensidad (amplitud) de las ondas reflejada y refractada	161
4.6.3. Reflexión interna total	162
5. Problemas de autovalores de Sturm-Liouville	165
5.1. Introducción	165
5.2. Ejemplos	166
5.2.1. Flujo de calor en una varilla no uniforme	166
5.2.2. Flujo radial de calor	168
5.3. Problemas de autovalores de Sturm-Liouville	169
5.3.1. Clasificación general	169
5.3.2. Problema de autovalores de Sturm-Liouville regular	171
5.3.3. Ejemplo e ilustración del teorema de Sturm-Liouville	173
5.4. Ejemplo: flujo de calor en una varilla no uniforme sin fuentes	179
5.5. Operadores autoadjuntos y problemas de autovalores de Sturm-Liouville	184
5.6. Cociente de Rayleigh	200
5.7. Ejemplo: vibraciones de una cuerda no uniforme	206
5.8. Condiciones de contorno de tercera clase	209
5.9. Autovalores grandes (comportamiento asintótico)	224
5.10. Propiedades de aproximación	228

6. Discusión elemental de los métodos numéricos de diferencias finitas	235
6.1. Introducción	235
6.2. Diferencias finitas y series de Fourier truncadas	236
6.3. Ecuación del calor	242
6.3.1. Introducción	242
6.3.2. Una ecuación en diferencias parciales	243
6.3.3. Cálculos	245
6.3.4. Análisis de estabilidad de Fourier-von Neumann	247
6.3.5. Separación de variables para ecuaciones en diferencias parciales y soluciones analíticas de ecuaciones en diferencias ordinarias	254
6.3.6. Notación matricial	257
6.3.7. Problemas no homogéneos	261
6.3.8. Otros esquemas numéricos	261
6.3.9. Otros tipos de condiciones de contorno	263
6.4. Ecuación del calor bidimensional	267
6.5. Ecuación de ondas	270
6.6. Ecuación de Laplace	274
6.7. Método de elementos finitos	282
6.7.1. Aproximación con funciones no ortogonales (forma débil de la ecuación en derivadas parciales)	282
6.7.2. Elementos finitos triangulares	285
7. Ecuaciones en derivadas parciales con tres o más variables independientes	291
7.1. Introducción	291
7.2. Separación de la variable temporal	292
7.2.1. Membranas vibrantes con forma arbitraria	292
7.2.2. Conducción del calor en regiones arbitrarias	294
7.2.3. Resumen	295
7.3. Membrana vibrante rectangular	296
7.4. Enunciados e ilustración del teorema para el problema de autovalores $\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0$	306
7.5. Operadores autoadjuntos y problemas de autovalores en varias dimensiones	312
7.6. Cociente de Rayleigh	317
7.7. Membrana vibrante circular y funciones de Bessel	320
7.7.1. Introducción	320
7.7.2. Separación de variables	320
7.7.3. Problemas de autovalores (unidimensionales)	322
7.7.4. Ecuación de Bessel	323
7.7.5. Puntos singulares y Ecuación de Bessel	324
7.7.6. Funciones de Bessel y su comportamiento cerca de $z = 0$	326
7.7.7. Problemas de autovalores que involucran funciones de Bessel	327

7.7.8.	Problema de valores iniciales para una membrana circular	329
7.7.9.	Caso radial	331
7.8.	Más sobre funciones de Bessel	336
7.8.1.	Propiedades cualitativas de las funciones de Bessel	336
7.8.2.	Fórmulas asintóticas para los autovalores	338
7.8.3.	Ceros de funciones de Bessel y curvas nodales	338
7.8.4.	Representación en serie de funciones de Bessel	339
7.9.	Ecuación de Laplace en un cilindro circular	344
7.9.1.	Introducción	344
7.9.2.	Separación de variables	345
7.9.3.	Temperatura cero sobre la superficie lateral y sobre la tapa superior o inferior	347
7.9.4.	Temperatura nula sobre las tapas superior e inferior	349
7.9.5.	Funciones de Bessel modificadas	352
7.10.	Problemas esféricos y polinomios de Legendre	356
7.10.1.	Introducción	356
7.10.2.	Separación de variables y problemas unidimensionales de autovalores	356
7.10.3.	Funciones de Legendre asociadas y polinomios de Legendre	358
7.10.4.	Problemas radiales de autovalores	361
7.10.5.	Soluciones producto, modos de vibración y el problema de valor inicial	362
7.10.6.	Ecuación de Laplace dentro de una cavidad esférica	363
8.	Problemas no homogéneos	369
8.1.	Introducción	369
8.2.	Flujo de calor con fuentes y condiciones de contorno no homogéneas	369
8.3.	Método de desarrollo en autofunciones con condiciones de contorno homogéneas (diferenciación de series de autofunciones)	376
8.4.	Método de desarrollo en autofunciones mediante la fórmula de Green (con o sin condiciones homogéneas de contorno)	382
8.5.	Vibraciones forzadas y resonancia	387
8.6.	Ecuación de Poisson	396
9.	Funciones de Green para problemas independientes del tiempo	405
9.1.	Introducción	405
9.2.	Ecuación del calor unidimensional	406
9.3.	Función de Green para problemas de contorno en ecuaciones diferenciales	410
9.3.1.	Ecuación del calor estacionaria unidimensional	410
9.3.2.	El método de variación de los parámetros	412
9.3.3.	El método del desarrollo en autofunciones para funciones de Green	415
9.3.4.	La "función" delta de Dirac y su relación con la función de Green	417

9.3.5.	Condiciones de contorno no homogéneas	424
9.3.6.	Resumen	425
9.4.	Alternativa de Fredholm y función de Green modificada	431
9.4.1.	Introducción	431
9.4.2.	Alternativa de Fredholm	433
9.4.3.	Función de Green modificada	436
9.5.	Función de Green para la ecuación de Poisson	443
9.5.1.	Introducción	443
9.5.2.	Delta de Dirac multidimensional y función de Green	443
9.5.3.	Obtención de la función de Green por el método (multidimensional) de desarrollo en autofunciones	445
9.5.4.	Obtención directa de la función de Green (autofunciones unidimensionales)	447
9.5.5.	Usando la función de Green para resolver problemas con condiciones de contorno no homogéneas	449
9.5.6.	Función de Green de todo el espacio	451
9.5.7.	Función de Green para dominios acotados usando la función de Green de todo el espacio	454
9.5.8.	Función de Green para un semiplano ($y > 0$) usando la función de Green de todo el espacio: el método de las imágenes	454
9.5.9.	Función de Green para un círculo: el método de las imágenes	457
9.6.	Problemas de autovalores perturbados	465
9.6.1.	Introducción	465
9.6.2.	Ejemplo matemático	466
9.6.3.	Membrana vibrante de forma casi circular	467
9.7.	Resumen	471

10.	Problemas en dominios no acotados: soluciones de ecuaciones en derivadas parciales mediante la transformada de Fourier	473
10.1.	Introducción	473
10.2.	La ecuación del calor en un dominio no acotado	473
10.3.	La transformada de Fourier y su inversa	477
10.3.1.	Motivación a partir de la identidad de series de Fourier	477
10.3.2.	Integral de Fourier	478
10.3.3.	Transformada de Fourier inversa de la gaussiana	480
10.4.	La transformada de Fourier y la ecuación del calor	487
10.4.1.	Ecuación del calor	487
10.4.2.	Transformada de Fourier de la ecuación del calor: transformadas de derivadas	492
10.4.3.	Teorema de convolución	494
10.4.4.	Resumen de propiedades de la transformada de Fourier	496
10.5.	Transformadas de Fourier en senos y cosenos: la ecuación del calor en la semirrecta	500
10.5.1.	Introducción	500
10.5.2.	La ecuación del calor sobre una semirrecta I	500

10.5.3. Las transformadas de Fourier en senos y cosenos	502
10.5.4. Transformadas de derivadas	503
10.5.5. La ecuación del calor sobre una semirrecta II	505
10.6. Otros ejemplos de aplicación de las transformadas seno y coseno . .	511
10.6.1. La ecuación de ondas unidimensional sobre toda la recta . .	511
10.6.2. La ecuación de Laplace en una semibanda	513
10.6.3. La ecuación de Laplace en un semiplano	517
10.6.4. La ecuación de Laplace en un cuadrante	521
10.6.5. La ecuación del calor en el plano (transformada de Fourier bidimensional)	524
10.7. Scattering y scattering inverso	534
11. Función de Green para problemas dependientes del tiempo	539
11.1. Introducción	539
11.2. Función de Green para la ecuación de ondas	539
11.2.1. Introducción	539
11.2.2. Fórmula de Green	541
11.2.3. Reciprocidad	542
11.2.4. Uso de la función de Green	545
11.2.5. Función de Green de todo el espacio	546
11.2.6. Función de Green en la recta (solución de d'Alembert) . . .	548
11.2.7. Función de Green en el espacio tridimensional (principio de Huygens)	550
11.2.8. Resumen	553
11.3. Función de Green para la ecuación del calor	557
11.3.1. Introducción	557
11.3.2. Carácter no autoadjunto de la ecuación del calor	558
11.3.3. Fórmula de Green	559
11.3.4. Función de Green adjunta	560
11.3.5. Reciprocidad	561
11.3.6. Representación de la solución mediante la función de Green .	562
11.3.7. Función de Green para la ecuación del calor en todo el espacio	564
11.3.8. Función de Green para la ecuación del calor en una semirrecta	566
11.3.9. Función de Green para la ecuación del calor en un intervalo acotado	567
12. Método de las características para ecuaciones de ondas lineales y cuasilineales	571
12.1. Introducción	571
12.2. Características para ecuaciones de ondas de primer orden	572
12.2.1. Introducción	572
12.2.2. Método de las características para ecuaciones de primer orden	573
12.3. Método de las características para la ecuación de ondas unidimensional	578
12.3.1. Introducción	578
12.3.2. Problema de valores iniciales en toda la recta	579

12.3.3. Solución de d'Alembert	582
12.4. Cuerda semiinfinita y reflexión	585
12.5. Método de las características para una cuerda de longitud finita	591
12.6. El método de las características para ecuaciones en derivadas parciales cuasilineales	594
12.6.1. Método de las características	594
12.6.2. Las ecuaciones del tráfico	596
12.6.3. Método de las características ($Q = 0$)	597
12.6.4. Ondas de choque	601
12.6.5. Ejemplo cuasilineal	606
12.7. Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden no lineales	612
12.7.1. Deducción de la ecuación eikonal a partir de la ecuación de ondas	612
12.7.2. Ecuación eikonal en medios uniformes y ondas reflejadas	613
12.7.3. Ecuaciones de primer orden no lineales	616
13. Breve introducción a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante la transformada de Laplace	619
13.1. Introducción	619
13.2. Propiedades elementales de la transformada de Laplace	620
13.2.1. Introducción	620
13.2.2. Singularidades de la transformada de Laplace	621
13.2.3. Transformada de derivadas	624
13.2.4. Teorema de convolución	626
13.3. Función de Green para problemas de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias	629
13.4. Un ejemplo elemental para la ecuación de ondas	632
13.5. Propagación de una señal en una cuerda de longitud finita	636
13.6. La ecuación de ondas y su función de Green	639
13.7. Transformada inversa de Laplace como integral compleja	643
13.8. Resolución de la ecuación de ondas mediante transformada de Laplace (con variable compleja)	648
14. Temas de extensión: ondas dispersivas, estabilidad, no linealidad y métodos perturbativos	653
14.1. Introducción	653
14.2. Ondas dispersivas y velocidad de grupo	654
14.2.1. Ondas viajeras y relación de dispersión	654
14.2.2. Velocidad de grupo I	657
14.3. Guías de ondas	660
14.3.1. Respuesta a una fuente puntual y periódica de frecuencia ω_f	662
14.3.2. Función de Green para los modos que se propagan	664
14.3.3. Función de Green para los modos que no se propagan	665
14.3.4. Consideraciones de diseño	665
14.4. Fibra óptica	667

14.5. Velocidad de grupo II y método de la fase estacionaria	671
14.5.1. Método de la fase estacionaria	672
14.5.2. Aplicación a ondas dispersivas lineales	674
14.6. Ondas dispersivas de variación lenta (velocidad de grupo y cústicas) 678	
14.6.1. Soluciones aproximadas de ecuaciones en derivadas parciales dispersivas	678
14.6.2. Formación de cústicas	680
14.7. Ecuaciones de la envolvente (números de onda concentrados)	686
14.7.1. Ecuación de Schrödinger	688
14.7.2. Ecuación linealizada de Korteweg-de Vries	689
14.7.3. Ondas dispersivas no lineales: ecuación de Korteweg-deVries	691
14.7.4. Solitones y scattering inverso	694
14.7.5. Ecuación de Schrödinger no lineal	696
14.8. Estabilidad e inestabilidad	701
14.8.1. Teoría breve de bifurcación en ecuaciones diferenciales ordi- narias	701
14.8.2. Un ejemplo típico de equilibrio estable en ecuaciones en de- rivadas parciales	706
14.8.3. Equilibrio inestable típico en una ecuación en derivadas par- ciales y formación de patrones	707
14.8.4. Problemas mal propuestos	710
14.8.5. Ondas dispersivas ligeramente inestables y la ecuación com- pleja de Ginzburg-Landau linealizada	711
14.8.6. Ecuación de Ginzburg-Landau compleja no lineal	712
14.9. Métodos de perturbaciones singulares:	
escalas múltiples	720
14.9.1. Ejemplo en ecuaciones diferenciales: oscilador débilmente amor- tiguado	720
14.9.2. Oscilador de variación lenta	724
14.9.3. Ecuaciones en derivadas parciales ligeramente inestables . .	728
14.9.4. Medios de variación lenta para la ecuación de ondas	730
14.9.5. Ondas dispersivas lineales de variación lenta (incluyendo efec- tos débilmente no lineales)	733
14.10. Perturbaciones singulares: capa límite	738
14.10.1. Capa límite en una ecuación diferencial	739
14.10.2. Difusión de un contaminante dominada por la convección . .	744
Bibliografía	753
Soluciones a los ejercicios seleccionados	759
Apéndice	781
Índice alfabético	785

Prólogo

El objetivo de este texto es el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales elementales que aparecen tanto en física como en ingeniería. Su contenido es especialmente adecuado para aquellos cursos que incluyan series de Fourier, funciones ortogonales o problemas de contorno. También puede ser de utilidad en cursos sobre funciones de Green, métodos de transformadas o las correspondientes partes de matemáticas avanzadas en ingeniería y métodos matemáticos en física.

Especial hincapié se hace en los modelos sencillos (flujo de calor y cuerdas y membranas vibrantes). Las ecuaciones se formulan cuidadosamente a partir de principios físicos, motivando la mayor parte de los tópicos matemáticos, y acompañando los resultados matemáticos de su interpretación física. Las demostraciones de los teoremas (aquéllas que se incluyen) se presentan después de las explicaciones basadas en los ejemplos. Una parte esencial del texto la constituye alrededor de 1000 ejercicios de dificultad creciente, de los que se incluyen las soluciones para aquéllos marcados con un asterisco (*). Una discusión más detallada de estos ejercicios se puede encontrar en un manual para el profesor.

Los temas estándar, tales como el método de separación de variables o series de Fourier y funciones ortogonales, son desarrollados con todo detalle. También se presentan de forma clara métodos numéricos para ecuaciones en derivadas parciales (principalmente diferencias finitas y una corta introducción a los elementos finitos), el método de las características para ecuaciones de ondas lineales y no lineales, soluciones mediante transformadas de Fourier y Laplace, y funciones de Green para las ecuaciones de Laplace, del calor y de ondas. Se incluyen numerosos tópicos tales como diferenciación e integración de series de Fourier, cociente de Rayleigh, problemas de autovalores en varias dimensiones, desarrollos en autofunciones para problemas no homogéneos, funciones de Bessel para membranas circulares y, lo que es nuevo en esta edición, polinomios de Legendre para problemas esféricos. Incluso algunos temas más avanzados, como desarrollos asintóticos para autovalores grandes, cálculo de frecuencias perturbadas mediante la alternativa de Fredholm, así como dinámica de ondas de choque. Esta edición añade además breves discusiones sobre la sustentación asociada con el flujo de un fluido alrededor de un cilindro circular, la ley de Snell de la refracción de las ondas de luz y sonido, así como el scattering y el scattering inverso.

El texto final ha evolucionado a partir de la experiencia del autor en la docencia de este material a diferentes tipos de estudiantes en varias instituciones (MIT, USCD, Rutgers, Ohio State, y SMU). Los prerrequisitos necesarios para su lectura y comprensión son sendos cursos de cálculo y ecuaciones diferenciales elementales (aunque éstos se resumen en el texto en los lugares en los que se hace referencia). Para un estudiante primerizo, el núcleo del temario de un curso típico consiste en los Capítulos 1 a 5, además del Capítulo 7, complementado por algunos otros tópicos. El texto es más o menos flexible de cara al profesor, pues los Capítulos 6 a 13 dependen sólo de los Capítulos 1 a 5. El capítulo 11 sobre funciones de Green para las ecuaciones del calor y de ondas es una excepción, ya que necesita los Capítulos 9 y 10.

El Capítulo 14 es nuevo en esta edición, y discute principalmente el concepto de ondas dispersivas. Está escrito en una forma más escueta que el resto del libro, e incluso tiene un nivel superior. Por otro lado, es autocontenido, por lo que va dirigido a estudiantes avanzados. Los temas tratados incluyen la velocidad de grupo y las ecuaciones envolventes para ondas dispersivas lineales, así como solitones en modelos no lineales. Se discuten además los fenómenos de inestabilidad y bifurcación para ecuaciones en derivadas parciales, así como métodos perturbativos (escalas múltiples y capas límite). En este capítulo se ha pretendido mostrar la vitalidad de la investigación actual de las ecuaciones en derivadas parciales en el contexto de los problemas físicos.

En esta nueva edición del texto se ha pretendido preservar lo más posible la estructura de la segunda edición, de manera que los usuarios de la edición previa no encuentren demasiada dificultad en su adaptación. El capítulo sobre los métodos numéricos es ahora el Capítulo 6, por lo que los capítulos subsiguientes han sido movidos. Se ha mantenido la casi totalidad de los ejercicios de la edición previa, incluso sin cambios en su ordenación. Las figuras que ilustran el texto, alrededor de 200, han sido confeccionadas usando el programa MATLAB. **(Los ficheros correspondientes a un gran número de estas figuras se pueden obtener de la página web: www.smu.edu/rhaberma.)** La modernización de la tecnología es especialmente importante en su vertiente gráfica, por lo que se ha intentado indicar a lo largo del texto los lugares donde es de gran ayuda una visualización tridimensional.

En definitiva, el objetivo ha sido explicar de forma clara una gran cantidad de aspectos fundamentales de las ecuaciones en derivadas parciales como una introducción a este vasto e importante campo. Una vez que se ha alcanzado un grado de comprensión y madurez sobre este tema, los estudiantes pueden utilizar este texto como libro de referencia, pero deben estar preparados para profundizar en la bibliografía.

Finalmente, se espera que este libro contribuya a que el lector disfrute estudiando las relaciones entre las matemáticas y las ciencias físicas.

El autor agradece especialmente a los siguientes revisores del manuscrito: Charles R. MacCluer, Michigan State University; Catherine A. Roberts, Northern Arizona University; William W. Roberts, Jr., University of Virginia, Surendra Singh, University of Tulsa; Alexander P. Stone, University of New Mexico; Ron Lipsman, University of Maryland at College Park; Robert W. Kolkka, Michigan Technological University; Dahlard L. Lukes, University of Virginia; Jonathan Dimock, SUNY at Buffalo; Donald Schwendeman, Rensselaer Polytechnic Institute; William Ames, University of Waterloo; Robert Seeley, University of Massachusetts at Boston; and Arnold L. Villone, San Diego State University.

**Richard Haberman
rhaberma@post.smu.edu**

Capítulo 1

La ecuación del calor

1.1. Introducción

En este texto vamos a estudiar problemas elementales que involucran ecuaciones en derivadas parciales y que, por otro lado, aparecen en varios campos de la ciencia y la ingeniería. Una **ecuación en derivadas parciales** (EDP) es una expresión matemática que contiene derivadas parciales, por ejemplo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.1.1)$$

El estudio de esta ecuación podría comenzar intentando determinar qué funciones $u(x, t)$ satisfacen (1.1.1). Sin embargo, preferimos empezar investigando un problema físico. Hacemos esto por dos razones: la primera, porque nuestras técnicas matemáticas probablemente serán de mayor interés cuando quede claro que estos métodos analizan problemas físicos; la segunda es que las consideraciones físicas motivarán muchos de nuestros desarrollos matemáticos.

En muchos campos de la física y de la ingeniería es imprescindible el uso de ecuaciones en derivadas parciales. No es posible elaborar una lista exhaustiva de todos estos campos, aunque los siguientes ejemplos deberían dar una idea del tipo de áreas que utilizan asiduamente ecuaciones en derivadas parciales: acústica, aerodinámica, elasticidad, electrodinámica, dinámica de fluidos, geofísica (propagación de ondas sísmicas), transferencia de calor, meteorología, oceanografía, óptica, ingeniería del petróleo, física del plasma (líquidos y gases ionizados) o mecánica cuántica.

Aquí seguiremos una cierta filosofía de lo que es la matemática aplicada, en la que el análisis de un problema se realiza en tres etapas:

1. Formulación.
2. Resolución.
3. Interpretación.

Empezamos formulando las ecuaciones del flujo de calor que describen la transferencia de energía térmica (o calorífica). La energía térmica está causada por la agitación de las moléculas. Existen dos procesos básicos que intervienen en la transferencia de la energía térmica: conducción y convección. La **conducción** resulta de las colisiones de moléculas colindantes, por las que la energía cinética de vibración de una molécula se transfiere a su vecina más cercana. La energía térmica se transporta de esta manera por conducción incluso si las moléculas mismas no se mueven de forma apreciable de su posición. Por otro lado, una molécula vibrante que se traslada de una región a otra, lleva su energía térmica con ella. Este segundo fenómeno se conoce con el nombre de **convección**. Con objeto de comenzar nuestro estudio con problemas relativamente simples, estudiaremos el flujo de calor sólo en los casos en que la conducción de energía térmica predomina sobre la convección. Éste es el caso del flujo de calor en sólidos, o incluso en fluidos (líquidos y gases) en los que la velocidad es suficientemente pequeña.

1.2. Deducción de la conducción del calor en una varilla unidimensional

Densidad de energía térmica. Consideremos una varilla con una sección transversal de área constante A , orientada en la dirección x (de $x = 0$ a $x = L$) tal como se ilustra en la Figura 1.2.1. Introduzcamos temporalmente la cantidad de energía térmica por unidad de volumen como una variable desconocida, que llamamos **densidad de energía térmica**:

$$e(x, t) \equiv \text{densidad de energía térmica.}$$

Si suponemos que todas las cantidades térmicas son constantes a lo largo de cada sección transversal, podemos considerar idealmente la varilla como un objeto unidimensional. La forma más fácil de llevar esto a cabo es aislar perfectamente el área de la superficie lateral de la varilla. De esta manera la energía térmica no puede atravesar la superficie lateral. Que la varilla no se caliente de manera uniforme significa que la energía térmica depende de x (además de t), es decir, la densidad de energía térmica varía de una sección transversal a otra.

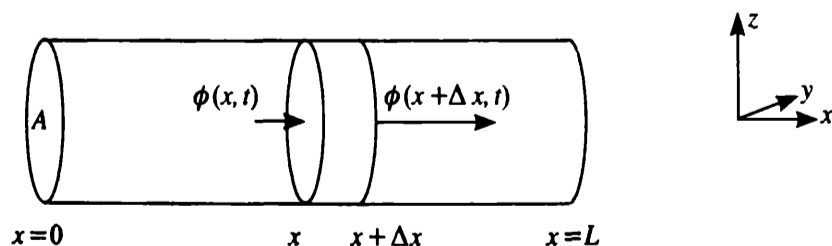


Figura 1.2.1: Energía térmica a través de una sección infinitesimal de una varilla.

Energía térmica. Consideremos el volumen de la varilla comprendido entre dos secciones transversales cercanas, correspondientes a x y $x + \Delta x$ tal como se ilustra en la Figura 1.2.1, que llamaremos sección infinitesimal. Si la densidad de energía térmica es constante en esta sección infinitesimal, entonces la energía total allí es el producto de la densidad de energía térmica por el volumen. En general, la densidad de energía no es constante. Sin embargo, si Δx es muy pequeño, entonces $e(x, t)$ se puede aproximar por una constante en ese volumen de tal manera que

$$\text{energía térmica} = e(x, t)A \Delta x,$$

ya que el volumen de la sección infinitesimal es $A \Delta x$.

Conservación de la energía térmica. La energía térmica entre x y $x + \Delta x$ varía con el tiempo debido al flujo a través de las fronteras (secciones x y $x + \Delta x$) y a la energía generada en el interior (debida a fuentes positivas o negativas de energía térmica). Como hemos supuesto que la superficie lateral está aislada, no hay flujo de energía térmica a través de esta superficie. Finalmente, todo el proceso de flujo de calor se puede describir mediante la siguiente ecuación en palabras

variación de energía térmica en el tiempo	=	flujo de calor a través de las fronteras por unidad de tiempo	+	energía térmica generada en el interior por unidad de tiempo.
---	---	---	---	---

Esta ley se llama **conservación de la energía térmica**. En la sección infinitesimal, la variación de la energía térmica es

$$\frac{\partial}{\partial t} [e(x, t)A \Delta x],$$

donde usamos la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial t}$ porque x se mantiene fija.

Flujo de calor. En una varilla unidimensional, la energía térmica sólo puede fluir hacia la derecha o hacia la izquierda. Introducimos el **flujo de calor**

$\phi(x, t) =$	flujo de calor (cantidad de energía térmica <i>por unidad de tiempo</i> que fluye hacia la derecha <i>por unidad de área</i>).
----------------	---

Si ϕ es negativo esto significa que la energía térmica fluye hacia la izquierda. La energía térmica que fluye por unidad de tiempo a través de las fronteras de la

sección infinitesimal es $\phi(x, t)A - \phi(x + \Delta x, t)A$, ya que el flujo de calor es el flujo por unidad de área y debe ser multiplicado por el área de las secciones. Si $\phi(x, t) > 0$ y $\phi(x + \Delta x, t) > 0$, como se ve en el ejemplo de la Figura 1.2.1, entonces la energía térmica que fluye por unidad de tiempo a través de la sección en x incrementa la energía térmica de la sección infinitesimal, mientras que el flujo de calor a través de la sección en $x + \Delta x$ la disminuye.

Fuentes de calor. La energía térmica también puede variar debido a la existencia de fuentes internas:

$$Q(x, t) = \begin{array}{l} \text{energía térmica generada} \\ \text{por unidad de volumen} \\ \text{y por unidad de tiempo,} \end{array}$$

que puede ser debida a reacciones químicas o calentamiento eléctrico. $Q(x, t)$ es aproximadamente constante en la variable espacial en cada sección infinitesimal, y así la energía térmica total generada por unidad de tiempo en dicha sección es aproximadamente $Q(x, t)A \Delta x$.

Conservación de la energía térmica en una sección infinitesimal. La variación de energía térmica se debe al flujo a través de las fronteras y a las fuentes internas:

$$\frac{\partial}{\partial t} [e(x, t)A \Delta x] \approx \phi(x, t)A - \phi(x + \Delta x, t)A + Q(x, t)A \Delta x. \quad (1.2.1)$$

Esta ecuación no es exacta porque hemos supuesto que varias cantidades son aproximadamente constantes en la sección infinitesimal. Sin embargo es más precisa cuanto más pequeño es Δx . Antes de dar una deducción cuidadosa (y matemáticamente rigurosa), intentaremos explicar las ideas básicas del proceso de tomar el límite, $\Delta x \rightarrow 0$. En el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, (1.2.1) no proporciona ninguna información, ya que se convierte en $0 = 0$. Sin embargo, si primero dividimos por Δx y luego tomamos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, obtenemos

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x, t) - \phi(x + \Delta x, t)}{\Delta x} + Q(x, t), \quad (1.2.2)$$

donde hemos simplificado el área constante de la sección transversal. Este resultado es exacto (sin errores de aproximación), y por tanto reemplazamos el símbolo \approx en (1.2.1) por el símbolo $=$ en (1.2.2). Al tomar el límite $\Delta x \rightarrow 0$, t se mantiene fija. Por tanto, por la definición de derivada parcial,

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \quad (1.2.3)$$

Conservación de la energía térmica integral. Veamos ahora una deducción alternativa de la conservación de la energía térmica que tiene la ventaja de que no hemos de restringirnos a pequeñas secciones. Evitamos así la aproximación hecha para tomar el límite ($\Delta x \rightarrow 0$) en el párrafo anterior. Consideremos un segmento cualquiera de longitud finita (de $x = a$ a $x = b$) de la varilla unidimensional (véase la Figura 1.2.2). Estudiemos la conservación de la energía térmica en este intervalo. La energía térmica total es $\int_a^b e(x, t) A dx$, es decir, la suma de las contribuciones de todas las secciones infinitesimales. Como antes, esta energía térmica varía sólo debido al flujo a través de los extremos ($x = a$ y $x = b$) y a la energía térmica generada en el interior del intervalo. Así (después de simplificar la constante A), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_a^b e dx = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b Q dx. \quad (1.2.4)$$

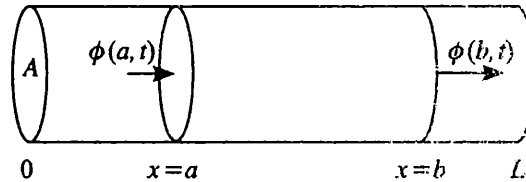


Figura 1.2.2: Energía térmica que fluye hacia dentro y hacia fuera de un segmento finito de la varilla.

Técnicamente, aparece una derivada ordinaria d/dt en (1.2.4) ya que $\int_a^b e dx$ depende sólo de t y no de x . Sin embargo,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b e dx = \int_a^b \frac{\partial e}{\partial t} dx,$$

si a y b son constantes (y si e es continua). Esto es así porque la densidad de energía térmica e depende también de x , por lo que dentro de la integral debemos reemplazar la derivada ordinaria por una derivada parcial. Observemos también que todos los términos de (1.2.4) son integrales sobre el mismo intervalo, pues

$$\phi(a, t) - \phi(b, t) = - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} dx,$$

(esto es válido si ϕ tiene derivada continua¹). Por tanto (1.2.4) puede escribirse como

$$\int_a^b \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - Q \right) dx = 0.$$

¹Éste es uno de los teoremas fundamentales del cálculo.

Esta integral debe ser cero *para cualesquiera* a y b . Esto es posible sólo si el integrando mismo es idénticamente cero². Así hemos deducido de nuevo (1.2.3)

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q. \quad (1.2.5)$$

La Ecuación (1.2.4), la **ley de conservación integral**, es más general que la forma diferencial (1.2.5), que es válida sólo cuando las variables físicas son continuas.

Expliquemos un poco más el signo negativo que precede a $\partial\phi/\partial x$. Por ejemplo, si $\partial\phi/\partial x > 0$ para $a \leq x \leq b$, entonces el flujo de calor ϕ es una función creciente de x . El calor que fluye hacia la derecha en $x = b$ es mayor que en $x = a$ (suponiendo que $b > a$). Así (olvidando el efecto de las fuentes), la energía calorífica debe decrecer entre $x = a$ y $x = b$, de ahí el signo negativo en (1.2.5).

Temperatura y calor específico. Normalmente describimos los materiales por su temperatura,

$$u(x, t) = \text{temperatura,}$$

no por su densidad de energía térmica. Distinguir los conceptos de temperatura y energía térmica no es algo trivial. Sólo a mediados del siglo dieciocho, la posibilidad de realizar mediciones experimentales precisas permitió a los físicos descubrir que pueden necesitarse diferentes cantidades de energía térmica para elevar la temperatura una misma cantidad en dos materiales distintos. Necesitamos introducir entonces el concepto de **calor específico** (o capacidad calorífica):

$$c = \text{calor específico (energía térmica necesaria para elevar una unidad la temperatura de una unidad de masa de una sustancia).}$$

En general, de los experimentos (y de nuestra definición) se deduce que el calor específico c de un material depende de la temperatura u . Por ejemplo, la energía térmica necesaria para elevar la temperatura de una unidad de masa de 0°C a 1°C podría ser diferente de la que necesitamos para elevarla de 85°C a 86°C para

²La mayoría de las pruebas de este resultado son poco elegantes. Supongamos que $f(x)$ es continua y que $\int_a^b f(x)dx = 0$ para a y b cualesquiera. Queremos probar que $f(x) = 0$ para todo x . Si existiera algún punto x_0 tal que $f(x_0) \neq 0$ llegaríamos a contradicción: por ser f continua existe un intervalo abierto que contiene a x_0 en el que $f(x)$ tiene un único signo (positivo o negativo); eligiendo a y b dentro de este intervalo obtenemos $\int_a^b f(x)dx \neq 0$. Esto demuestra la Ecuación (1.2.5).

la misma sustancia. Los problemas de flujo de calor con calor específico que depende de la temperatura son matemáticamente bastante complicados (el Ejercicio 1.2.1 trata brevemente esta situación). A menudo, para intervalos de temperatura no demasiado grandes, el calor específico es aproximadamente independiente de la temperatura. Sin embargo, los experimentos sugieren que diferentes materiales requieren distintas cantidades de energía térmica para calentarse. Como queríamos formular la ecuación correcta en situaciones en las que la composición de nuestra varilla podría variar de un punto a otro, el calor específico dependerá de x , $c = c(x)$. En muchos problemas la varilla está compuesta por un único material (es una varilla uniforme), en cuyo caso tomaremos el calor específico c como una constante. De hecho, la mayoría de los problemas resueltos en este libro (al igual que en muchos otros) se corresponde con esta aproximación, c constante.

Energía térmica. La energía térmica concentrada en una sección infinitesimal es $e(x, t)A \Delta x$. Sin embargo, también se define como la energía necesaria para elevar la temperatura desde la de referencia, 0° , a su temperatura actual $u(x, t)$. Como consideraremos el calor específico independiente de la temperatura, la energía térmica por unidad de masa es justamente $c(x)u(x, t)$. Introduzcamos ahora la **densidad de masa** $\rho(x)$:

$$\rho(x) = \text{densidad de masa (masa por unidad de volumen),}$$

permitiendo que varíe con x , por ejemplo debido a que la varilla sea de un material no uniforme. La masa total de la sección infinitesimal es $\rho A \Delta x$, y por tanto la energía térmica es $c(x)u(x, t) \cdot \rho A \Delta x$, por lo que

$$e(x, t)A \Delta x = c(x)u(x, t)\rho A \Delta x.$$

De aquí deducimos la relación básica entre energía térmica y temperatura:

$$e(x, t) = c(x)\rho(x)u(x, t). \quad (1.2.6)$$

Esto nos dice que la energía térmica por unidad de volumen es igual a la energía térmica por unidad de masa y por unidad de temperatura, multiplicada por la temperatura y por la densidad de masa. Si eliminamos la densidad de energía térmica usando (1.2.6), la ley de conservación de la energía térmica, (1.2.3) o (1.2.5), se convierte en

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q. \quad (1.2.7)$$

Ley de Fourier. Normalmente (1.2.7) es una ecuación con dos incógnitas, la temperatura $u(x, t)$ y el flujo de calor (flujo por unidad de superficie y por unidad de tiempo) $\phi(x, t)$. Cabe preguntarse *cómo y por qué fluye la energía térmica*. En otras palabras, necesitamos una nueva expresión que relacione el flujo de energía térmica con la temperatura. Para ello enumeremos, en primer lugar, algunas propiedades cualitativas del flujo de calor con las que estamos todos familiarizados

1. Si la temperatura es constante en una región, la energía térmica no fluye.
2. Si hay diferencia de temperaturas, la energía térmica fluye de la región más caliente a la más fría.
3. A mayor diferencia de temperatura (para el mismo material) mayor es el flujo de energía térmica.
4. El flujo de energía térmica es diferente para distintos materiales, incluso con la misma diferencia de temperatura.

J. Fourier (1768–1830) observó las propiedades 1 a 4 y las resumió (junto con numerosos experimentos) en la fórmula

$$\phi = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.2.8)$$

conocida como **ley de Fourier de la conducción del calor**. Aquí $\partial u / \partial x$ es la derivada de la temperatura (como función de x para t fijo); representa variaciones de la temperatura por unidad de longitud. La Ecuación (1.2.8) establece que el flujo de calor es proporcional a la diferencia de temperaturas (por unidad de longitud). Si la temperatura u crece cuando x crece (es decir, la temperatura es mayor hacia la derecha), $\partial u / \partial x > 0$, y la propiedad 2 implica que la energía térmica fluye hacia la izquierda. Esto explica el signo negativo en (1.2.8).

El coeficiente de proporcionalidad K_0 mide la capacidad del material para conducir el calor y se llama **conductividad térmica**. Los experimentos indican que K_0 depende del tipo de material. Cuanto más grande sea K_0 , mayor será el flujo de calor, para la misma diferencia de temperatura. Un material con valor pequeño de K_0 será un mal conductor de energía térmica (y muy adecuado para aislamiento de viviendas). Para una varilla compuesta de diferentes materiales, K_0 será función de x . Más aún, los experimentos demuestran que la capacidad de conducir calor para la mayoría de los materiales varía según la temperatura, es decir, $K_0(x, u)$. Sin embargo, al igual que con el calor específico c , la dependencia respecto a la temperatura a menudo es poco significativa en problemas concretos. Por tanto, a lo largo del texto supondremos que la conductividad térmica K_0 sólo depende de x , es decir, $K_0 = K_0(x)$. De hecho, discutiremos sobre todo casos donde las varillas son uniformes, en las cuales K_0 es una constante.

Ecuación del calor. Si la ley de Fourier (1.2.8) se sustituye en la ecuación de la conservación de la energía térmica (1.2.7), aparece una ecuación en derivadas parciales con una única incógnita:

$$\boxed{c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q,} \quad (1.2.9)$$

ya que normalmente las fuentes de energía calorífica, Q , son conocidas. Todos los coeficientes térmicos c , ρ y K_0 dependen del material y por ello pueden ser funciones de x . En el caso especial de una varilla uniforme c , ρ y K_0 son constantes, y la ecuación en derivadas parciales (1.2.9) se convierte en

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = K_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q.$$

Si además no hay fuentes, es decir $Q = 0$, y después de dividir por la constante $c\rho$, la ecuación queda

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \quad (1.2.10)$$

donde la constante,

$$k = \frac{K_0}{c\rho},$$

se conoce como **difusividad térmica**, la conductividad térmica dividida por el producto del calor específico y la densidad de masa. La Ecuación (1.2.10) se conoce como la **ecuación del calor**; corresponde al caso en que no hay fuentes y las propiedades térmicas del material son constantes. Si la energía térmica está inicialmente concentrada en algún lugar, (1.2.10) describirá cómo la energía térmica se dispersa, un proceso físico conocido como **difusión**. Otras magnitudes físicas, además de la temperatura, se comportan de forma similar, cumpliendo la misma ecuación en derivadas parciales (1.2.10). Por esta razón (1.2.10) se conoce también como **ecuación de difusión**. Por ejemplo, la concentración $u(x, t)$ de compuestos químicos (como perfumes o contaminantes) satisface la ecuación de difusión (1.2.10) en algunas situaciones.

Condiciones iniciales. Las ecuaciones en derivadas parciales que describen el flujo de energía térmica, (1.2.9) o (1.2.10), tienen una derivada respecto al tiempo. Para ecuaciones diferenciales de primer orden, en las que aparece una sola derivada, el problema de valores iniciales consiste en resolver la ecuación diferencial con una condición inicial. Del mismo modo, la ley de Newton del movimiento aplicada a la posición x de una partícula da lugar a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, $m d^2x/dt^2 = \text{fuerzas}$. Al tener una derivada segunda el problema

de valores iniciales consiste en resolver la ecuación diferencial con dos condiciones iniciales, la posición inicial x y la velocidad inicial dx/dt . A partir de esta información (incluyendo el conocimiento de las fuerzas), podemos predecir el movimiento de una partícula en la dirección del eje x resolviendo la ecuación diferencial con las condiciones iniciales. Esto mismo es lo que queremos hacer para nuestra ecuación en derivadas parciales, es decir, queremos predecir la temperatura. Como la ecuación del calor tiene una derivada respecto al tiempo, necesitamos una **condición inicial** (CI) (normalmente para $t = 0$), la temperatura inicial. Es posible que la temperatura inicial no sea constante, sino que dependa de x . En ese caso necesitamos conocer la distribución inicial de temperaturas,

$$u(x, 0) = f(x).$$

¿Será suficiente información para predecir la temperatura? Conocemos la distribución inicial de temperaturas y que la temperatura varía de acuerdo con la ecuación en derivadas parciales (1.2.9) o (1.2.10). Sin embargo, necesitaremos conocer qué ocurre en los dos extremos, $x = 0$ y $x = L$. Sin conocer esta información no podremos predecir el futuro. Necesitaremos dos condiciones correspondientes a la segunda derivada respecto al espacio que aparece en la ecuación del calor, habitualmente una condición en cada extremo. Discutiremos estas condiciones en la frontera en la siguiente sección.

EJERCICIOS 1.2

1.2.1. Supongamos que el calor específico es una función de la posición y de la temperatura, $c(x, u)$.

- (a) Demostrar que la energía térmica por unidad de masa necesaria para elevar la temperatura de una sección infinitesimal de grosor Δx de 0° a $u(x, t)$ no es $c(x)u(x, t)$, sino $\int_0^u c(x, \bar{u}) d\bar{u}$.
- (b) Deducir de nuevo la ecuación del calor en este caso. Demostrar que (1.2.3) no cambia.

1.2.2. Consideremos la ley de conservación de energía térmica (1.2.4) en un intervalo de una varilla unidimensional $a \leq x \leq b$. Usando el teorema fundamental del cálculo

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f(x) dx = f(b),$$

deducir la ecuación del calor (1.2.9).

***1.2.3.** Si se conoce $u(x, t)$, obtener una expresión para la energía térmica total contenida en una varilla ($0 < x < L$).

1.2.4. Consideremos una varilla unidimensional sin fuentes de energía térmica cuya superficie lateral no esté aislada.

- (a) Supongamos que la energía térmica que fluye por la superficie lateral por unidad de área y por unidad de tiempo es $w(x, t)$. Deducir la ecuación en derivadas parciales que cumple la temperatura $u(x, t)$.
- (b) Supongamos que $w(x, t)$ es proporcional a la diferencia de temperatura entre la varilla $u(x, t)$ y una temperatura exterior conocida $\gamma(x, t)$. Deducir que

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{P}{A} [u(x, t) - \gamma(x, t)] h(x), \quad (1.2.11)$$

donde $h(x)$ es una función positiva de x , P es el perímetro lateral y A es el área transversal.

- (c) Comparar (1.2.11) con la ecuación para una varilla unidimensional cuya superficie lateral esté aislada pero con una fuente de calor.
- (d) Particularizar (1.2.11) para el caso de una varilla de sección transversal circular con propiedades térmicas constantes y temperatura exterior 0° .
- * (e) Consideremos las condiciones del apartado (d). Supongamos que la temperatura de la varilla es uniforme [es decir, $u(x, t) = u(t)$]. Determinar $u(t)$ si inicialmente $u(0) = u_0$.

1.3. Condiciones de contorno

Al resolver la ecuación del calor, bien sea (1.2.9) o (1.2.10), se necesita una **condición de contorno** (CC) en cada extremo de la varilla. La condición apropiada se elige dependiendo del mecanismo físico que esté actuando en cada extremo. A menudo dicha condición de contorno depende tanto del material del que se compone la varilla como del material exterior circundante. Con objeto de evitar un tratamiento matemático más complicado del problema, supondremos que dicho material circundante es conocido y que no está alterado significativamente por la propia varilla.

Temperatura prescrita. En ciertas condiciones, la temperatura en los extremos de la varilla, por ejemplo en $x = 0$, puede aproximarse por una **temperatura prescrita**,

$$u(0, t) = u_B(t), \quad (1.3.1)$$

donde $u_B(t)$ es la temperatura de una bañera de fluido (o depósito) con el que la varilla está en contacto.

Frontera aislada. En otras situaciones es posible prescribir el flujo de calor en lugar de la temperatura,

$$-K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \phi(t), \quad (1.3.2)$$

donde $\phi(t)$ es una función dada. Esto equivale a dar una condición sobre la primera derivada, $\partial u/\partial x$, en $x = 0$. La Ecuación (1.3.2) *no puede* integrarse en x porque se conoce la derivada sólo en un valor de x . El ejemplo más simple de condiciones de contorno con flujo de calor prescrito se da cuando un extremo está **perfectamente aislado** (a veces omitiremos la palabra “perfectamente”). En este caso no hay flujo de calor en los extremos. Si $x = 0$ está aislado, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0. \quad (1.3.3)$$

Ley de enfriamiento de Newton. Cuando una varilla unidimensional está en contacto en los extremos con un fluido en movimiento (por ejemplo el aire), entonces no son apropiadas ni la condición de temperatura prescrita ni la de flujo de calor prescrito. Imaginemos una varilla muy caliente en contacto con aire en movimiento más frío. La varilla desprenderá calor, calentando el aire circundante. El aire transportará entonces el calor hacia fuera. Este proceso de transferencia de calor se denomina **convección**. Sin embargo el aire estará más caliente cerca de la varilla. Éste es, de nuevo, un problema complicado; la temperatura del aire variará con la distancia desde la varilla (oscilando entre la temperatura del depósito y la de la varilla). Los experimentos prueban que, con una buena aproximación, el flujo de calor que sale de la varilla es proporcional a la diferencia de temperaturas entre la varilla y la temperatura externa prescrita. Esta condición de contorno se llama **ley de enfriamiento de Newton**. En el extremo $x = 0$ esta ley implica

$$-K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -H[u(0, t) - u_B(t)], \quad (1.3.4)$$

donde la constante de proporcionalidad H se denomina **coeficiente de transferencia de calor** (o coeficiente de convección). Esta condición de contorno³ involucra una combinación lineal de u y de $\partial u/\partial x$. Debemos ser cuidadosos con el signo que precede a la constante de proporcionalidad H . Si la varilla está más caliente que el depósito [$u(0, t) > u_B(t)$], entonces el calor fluye hacia fuera de la varilla en $x = 0$. Por tanto el calor fluye hacia la izquierda, y en este caso el flujo de calor debería ser negativo. Ésta es la razón por la que hemos introducido un signo menos en (1.3.4) (con $H > 0$). Habríamos llegado a la misma conclusión si hubiéramos supuesto que $u(0, t) < u_B(t)$. Otra forma de comprender los signos en (1.3.4) es suponer de nuevo que $u(0, t) > u_B(t)$. La temperatura es mayor a la derecha de $x = 0$ y deberíamos esperar que la temperatura continuara incrementándose hacia la derecha. Por tanto, $\partial u/\partial x$ debería ser positiva en $x = 0$. La Ecuación (1.3.4) es consistente con este argumento. En el Ejercicio 1.3.1 se pide obtener, del mismo modo, que la ecuación para la ley de enfriamiento de Newton en el extremo de la derecha $x = L$ es

$$-K_0(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = H[u(L, t) - u_B(t)], \quad (1.3.5)$$

³Para otra situación en la que (1.3.4) es válida, véase Berg y McGregor [1966].

donde $u_B(t)$ es la temperatura externa en $x = L$. Obsérvese la significativa diferencia de signo entre el extremo de la izquierda (1.3.4) y el de la derecha (1.3.5).

El coeficiente H en la ley de enfriamiento de Newton se determina experimentalmente. Depende de las propiedades de la varilla y de las propiedades del fluido (incluyendo la velocidad del mismo). Si el coeficiente es muy pequeño, entonces fluirá muy poca energía calorífica a través de los extremos. En el límite cuando $H \rightarrow 0$, la ley de enfriamiento de Newton se aproxima a la condición de frontera aislada. Puede pensarse que la ley de enfriamiento de Newton cuando $H \neq 0$ representa una frontera aislada de forma imperfecta. Si $H \rightarrow \infty$, la condición de contorno se aproxima a la condición de temperatura prescrita, $u(0, t) = u_B(t)$. Esto se aprecia con mayor facilidad, por ejemplo, dividiendo (1.3.4) por H :

$$-\frac{K_0(0)}{H} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -[u(0, t) - u_B(t)].$$

Por lo tanto, $H \rightarrow \infty$ se corresponde con condiciones de no aislamiento.

Resumen. Hemos descrito tres clases diferentes de condiciones de contorno. Por ejemplo, en $x = 0$:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u_B(t) && \text{temperatura prescrita,} \\ -K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= \phi(t) && \text{flujo de calor prescrito,} \\ -K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= -H[u(0, t) - u_B(t)] && \text{ley de enfriamiento de Newton.} \end{aligned}$$

Las mismas condiciones podrían tenerse en el extremo $x = L$, recordando sin más que es necesario el cambio de signo, $-H$ en lugar de H , en la ley de enfriamiento de Newton. Debemos tener una condición de contorno en cada extremo de la varilla, pero no es necesario que ambos extremos satisfagan la misma clase de condiciones de contorno. Por ejemplo, es posible tener una temperatura oscilante prescrita en $x = 0$,

$$u(0, t) = 100 - 25 \cos t,$$

y que el extremo de la derecha, $x = L$, esté aislado,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$$

EJERCICIOS 1.3

1.3.1. Considérese una varilla unidimensional, $0 \leq x \leq L$. Supongamos que la energía calorífica fluye hacia fuera de la varilla en $x = L$ y que tal flujo es proporcional a la diferencia de temperatura entre la varilla y la temperatura externa, que es conocida. Obtener (1.3.5) (explíquese brevemente por qué físicamente ha de ser $H > 0$).

- *1.3.2.** De dos varillas unidimensionales de diferentes materiales, unidas en $x = x_0$, se dice que están en **contacto térmico perfecto** si la temperatura es continua en $x = x_0$:

$$u(x_0-, t) = u(x_0+, t),$$

y no se pierde energía alguna en $x = x_0$ (es decir, que la energía calorífica que fluye hacia fuera de una de las varillas fluye hacia dentro de la otra). ¿Qué ecuación matemática corresponde a la última condición en $x = x_0$? ¿Bajo qué condición especial es $\partial u / \partial x$ una función continua en $x = x_0$?

- *1.3.3.** Considérese un depósito que contiene un fluido de calor específico c_f y de densidad de masa ρ_f que rodea el extremo $x = L$ de una varilla unidimensional. Supóngase que se agita el fluido del depósito rápidamente, de forma que la temperatura del mismo es aproximadamente uniforme en todo él e igual a la temperatura en $x = L$, $u(L, t)$. Supóngase también que el depósito está aislado excepto porque tiene un contacto térmico perfecto con la varilla, a través del cual el fluido del depósito puede calentarse o enfriarse por medio de la varilla. Obténgase una ecuación para la temperatura en el depósito (ésta será una condición de contorno en el extremo $x = L$). *Indicación: véase el Ejercicio 1.3.2.*

1.4. Distribución de temperaturas en equilibrio

1.4.1. Temperatura prescrita

Formulemos un problema simple, pero típico, de flujo de calor. Si los coeficientes térmicos son constantes y no existen fuentes de energía calorífica, entonces la temperatura $u(x, t)$ en una varilla unidimensional $0 \leq x \leq L$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.4.1)$$

La solución de esta ecuación en derivadas parciales debe satisfacer la condición inicial,

$$u(x, 0) = f(x), \quad (1.4.2)$$

y una condición de contorno en cada extremo. Por ejemplo, cada extremo podría estar en contacto con diferentes depósitos, de modo que la temperatura en cada extremo esté prescrita:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= T_1(t), \\ u(L, t) &= T_2(t). \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Uno de los objetivos de este texto es conseguir que el lector sea capaz de resolver el problema especificado por las Ecuaciones (1.4.1-1.4.3).

Distribución de temperaturas en equilibrio. Antes de que comencemos a abordar un problema de ecuaciones en derivadas parciales de valor inicial y de

condiciones de contorno como éste, vamos a discutir una cuestión físicamente relacionada para ecuaciones diferenciales ordinarias. Supongamos que las condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = L$ fueran **estacionarias** (esto es, independientes del tiempo),

$$u(0, t) = T_1 \quad \text{y} \quad u(L, t) = T_2,$$

donde T_1 y T_2 son constantes dadas. Definimos una solución de **equilibrio** o **estado estacionario** como una distribución de temperaturas que no depende del tiempo, es decir, tal que $u(x, t) = u(x)$. Puesto que $\partial[u(x)]/\partial t = 0$, la ecuación en derivadas parciales se convierte en $k(\partial^2 u/\partial x^2) = 0$, y como las derivadas parciales son ahora en realidad derivadas ordinarias, se obtiene finalmente

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} = 0.} \quad (1.4.4)$$

Las condiciones de contorno son

$$\boxed{\begin{aligned} u(0) &= T_1, \\ u(L) &= T_2. \end{aligned}} \quad (1.4.5)$$

Al calcular los estados estacionarios, usualmente se ignoran las condiciones iniciales. La Ecuación (1.4.4) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden bastante trivial. Su solución general puede obtenerse integrando dos veces. La primera integración de (1.4.4) conduce a $du/dx = C_1$, e integrando una segunda vez, se obtiene que

$$u(x) = C_1 x + C_2. \quad (1.4.6)$$

Reconocemos en (1.4.6) la ecuación general de una línea recta. Por tanto, la distribución de temperaturas en equilibrio que se obtiene a partir de las condiciones de contorno (1.4.5) es la línea recta que es igual a T_1 en $x = 0$ y a T_2 en $x = L$, como se esboza en la Figura 1.4.1. Podemos ver geoméricamente que existe una única solución de equilibrio para este problema. Algebraicamente, podemos determinar las dos constantes arbitrarias C_1 y C_2 , imponiendo las condiciones de contorno, $u(0) = T_1$ y $u(L) = T_2$:

$$\begin{aligned} u(0) = T_1 & \text{ implica } T_1 = C_2, \\ u(L) = T_2 & \text{ implica } T_2 = C_1 L + C_2. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Es fácil resolver (1.4.7), obteniendo $C_2 = T_1$ y $C_1 = (T_2 - T_1)/L$. Por tanto, la única solución de equilibrio para la ecuación del calor con estas condiciones de contorno fijas es

$$\boxed{u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x.} \quad (1.4.8)$$

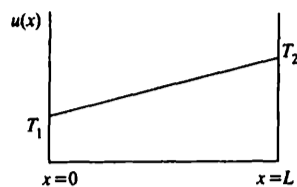


Figura 1.4.1: Distribución de temperaturas en equilibrio.

Aproximación al equilibrio. Para el problema dependiente del tiempo, (1.4.1) y (1.4.2), con condiciones de contorno estacionarias (1.4.5), esperamos que la distribución de temperaturas $u(x, t)$ varíe con el tiempo, y por tanto que no permanezca igual a la distribución inicial $f(x)$. Después de mucho, mucho tiempo, es fácil imaginar que la influencia de los dos extremos debería dominar finalmente. Las condiciones iniciales usualmente se olvidan. Físicamente se espera que la temperatura se aproxime a la distribución de temperaturas en equilibrio, puesto que las condiciones de contorno son independientes del tiempo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x. \quad (1.4.9)$$

En la Sección 8.2 resolveremos el problema dependiente del tiempo y probaremos que se satisface la Ecuación (1.4.9). Sin embargo, si se aproxima un estado estacionario, éste se obtiene más fácilmente resolviendo directamente el problema de equilibrio.

1.4.2. Fronteras aisladas

Como un segundo ejemplo del cálculo de estados estacionarios, consideremos de nuevo una varilla unidimensional sin fuentes y con propiedades térmicas constantes, pero esta vez con extremos aislados en $x = 0$ y $x = L$. La formulación del problema dependiente del tiempo es

$$\text{EDP :} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.4.10)$$

$$\text{CI :} \quad u(x, 0) = f(x) \quad (1.4.11)$$

$$\text{CC1 :} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad (1.4.12)$$

$$\text{CC2 :} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0. \quad (1.4.13)$$

El problema de equilibrio se obtiene imponiendo que $\partial/\partial t = 0$. La distribución de temperaturas en equilibrio satisface

$$\text{EDO :} \quad \boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} = 0} \quad (1.4.14)$$

$$\text{CC1 : } \boxed{\frac{du}{dx}(0) = 0} \quad (1.4.15)$$

$$\text{CC2 : } \boxed{\frac{du}{dx}(L) = 0,} \quad (1.4.16)$$

donde (por el momento) hemos olvidado la condición inicial. La solución general de $d^2u/dx^2 = 0$ es de nuevo una línea recta arbitraria,

$$u = C_1x + C_2. \quad (1.4.17)$$

Las condiciones de contorno implican que la pendiente debe ser cero en ambos extremos. Sin embargo, cualquier línea recta de pendiente cero satisface (1.4.15) y (1.4.16), como se ilustra en la Figura 1.4.2. La solución es entonces cualquier

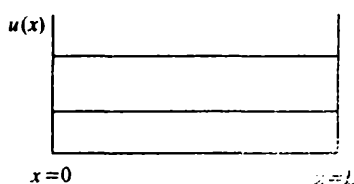


Figura 1.4.2: Varias distribuciones de temperaturas en equilibrio (con extremos aislados).

temperatura constante. Algebraicamente, de (1.4.17) se obtiene $du/dx = C_1$, y ambas condiciones de contorno implican $C_1 = 0$. Así,

$$u(x) = C_2 \quad (1.4.18)$$

para cualquier constante C_2 . A diferencia del primer ejemplo (con temperaturas fijas en ambos extremos), ahora no existe una temperatura de equilibrio única. Cualquier temperatura constante es una distribución de temperaturas en equilibrio para las condiciones de contorno de aislamiento. Por tanto, para el problema de valor inicial dependiente del tiempo, esperamos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = C_2;$$

si esperamos lo suficiente, una varilla con extremos aislados debería aproximarse a una temperatura constante. Esto físicamente parece bastante razonable. Sin embargo, no tiene sentido que la solución pueda aproximarse a una constante arbitraria; deberíamos conocer a qué constante se aproxima. En este caso, la falta de unicidad ha sido causada por el olvido completo de la condición inicial. En general, la solución de equilibrio no satisfará la condición inicial. Sin embargo, la solución particular de equilibrio constante se determina considerando la condición inicial para el problema dependiente del tiempo (1.4.11). Puesto que ambos extremos están aislados, la

energía térmica debe permanecer constante. Esto se sigue de la ley de conservación integral de la energía térmica de la varilla [véase (1.2.4)]:

$$\frac{d}{dt} \int_0^L c\rho u \, dx = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + K_0 \frac{\partial u}{\partial x}(L, t). \quad (1.4.19)$$

Puesto que ambos extremos están aislados,

$$\int_0^L c\rho u \, dx = \text{constante}. \quad (1.4.20)$$

Una consecuencia de (1.4.20) es que la energía térmica inicial debe ser igual a la final ($\lim_{t \rightarrow \infty}$). La energía térmica inicial es $c\rho \int_0^L f(x) dx$, puesto que $u(x, 0) = f(x)$, mientras que la energía térmica en equilibrio es $c\rho \int_0^L C_2 dx = c\rho C_2 L$, puesto que la distribución de temperaturas en equilibrio es una constante $u(x, t) = C_2$. La constante C_2 se determina igualando estas dos expresiones para energía térmica total, $c\rho \int_0^L f(x) dx = c\rho C_2 L$. Despejando C_2 vemos que la única solución de equilibrio debe ser

$$u(x) = C_2 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \, dx, \quad (1.4.21)$$

es decir, el **promedio** de la distribución inicial de temperaturas. Se tiene, por tanto, que la condición inicial no se olvida por completo. Más adelante encontraremos una función $u(x, t)$ que satisface (1.4.10 - 1.4.13) y prueba que el $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ viene dado por (1.4.21).

EJERCICIOS 1.4

1.4.1. Determinar la distribución de temperaturas en equilibrio para una varilla unidimensional con propiedades térmicas constantes, con las siguientes fuentes y condiciones de contorno:

- * (a) $Q = 0$, $u(0) = 0$, $u(L) = T$,
- (b) $Q = 0$, $u(0) = T$, $u(L) = 0$,
- (c) $Q = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0) = 0$, $u(L) = T$,
- * (d) $Q = 0$, $u(0) = T$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L) = \alpha$,
- (e) $\frac{Q}{K_0} = 1$, $u(0) = T_1$, $u(L) = T_2$,
- * (f) $\frac{Q}{K_0} = x^2$, $u(0) = T$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L) = 0$,
- (g) $Q = 0$, $u(0) = T$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L) + u(L) = 0$,

$$* (h) \quad Q = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0) - [u(0) - T] = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L) = \alpha.$$

En todos los casos se supone que $u(x, 0) = f(x)$.

1.4.2. Considérese la distribución de temperaturas en equilibrio para una varilla uniforme unidimensional, con una fuente de energía térmica $Q/K_0 = x$, sujeta a las condiciones de contorno $u(0) = 0$ y $u(L) = 0$.

*(a) Determínese la energía calorífica total generada por unidad de tiempo en el interior de la varilla.

(b) Determínese la energía calorífica que fluye hacia fuera de la varilla por unidad de tiempo en $x = 0$ y en $x = L$.

(c) ¿Qué relación debería existir entre las respuestas de los apartados (a) y (b)?

1.4.3. Determínese la distribución de temperaturas en equilibrio para una varilla unidimensional que se compone de dos materiales diferentes en contacto térmico perfecto en $x = 1$. Para $0 < x < 1$, el material tiene constantes $c\rho = 1$, $K_0 = 1$, y una fuente constante $Q = 1$, mientras que para $1 < x < 2$ no existen fuentes $Q = 0$, y las constantes son $c\rho = 2$, $K_0 = 2$ (véase el Ejercicio 1.3.2). Las condiciones de contorno son $u(0) = 0$ y $u(2) = 0$.

1.4.4. Si ambos extremos de una varilla están aislados, obténgase a partir de la ecuación en derivadas parciales que la energía térmica total en la varilla es constante.

1.4.5. Considérese una varilla unidimensional $0 \leq x \leq L$ con propiedades térmicas conocidas y sin fuentes. Supongamos que la temperatura en $x = L$ es una constante desconocida T . Determínese T si conocemos (en el estado estacionario) tanto la temperatura como el flujo de calor en $x = 0$.

1.4.6. Supongamos que los dos extremos de una varilla uniforme de longitud L están aislados, que existe una fuente constante de energía térmica $Q_0 \neq 0$ y que la temperatura inicialmente es $u(x, 0) = f(x)$.

(a) Pruébese matemáticamente que no existe ninguna distribución de temperaturas en equilibrio. Explicar brevemente los motivos físicos.

(b) Calcular la energía térmica total contenida en la varilla.

1.4.7. Determínese una distribución de temperaturas en equilibrio para los siguientes problemas (si es que existe). ¿Para qué valores de β existen soluciones? Explicar los motivos físicos.

$$* (a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \beta,$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \beta,$$

$$(c) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x - \beta, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$$

1.5. Deducción de la ecuación del calor en dimensiones dos y tres

Introducción. En la Sección 1.2 vimos, en el estudio de la conducción del calor en una varilla unidimensional, que la temperatura $u(x, t)$ satisface la ecuación

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q.$$

En los casos en que no hay fuentes ($Q = 0$) y las propiedades térmicas son constantes, la ecuación en derivadas parciales se convierte en

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $k = K_0/c\rho$. Antes de resolver problemas que involucren estas ecuaciones, vamos a formular en esta sección las ecuaciones correspondientes en dos y tres dimensiones espaciales. La deducción será muy similar a la usada en problemas unidimensionales, aunque aparecerán diferencias importantes. Deduciremos ahora ecuaciones nuevas y más complicadas (antes de resolver las más sencillas) para disponer de más de un ejemplo con el que trabajar cuando discutamos las *técnicas* de resolución de EDP's.

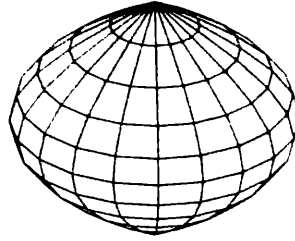
Energía calorífica. Comenzamos nuestra deducción considerando una *región arbitraria* R , tal como muestra la Figura 1.5.1. Al igual que en el caso unidimensional, la conservación de la energía calorífica se puede resumir mediante la siguiente ecuación:

variación de energía térmica en el tiempo	=	flujo de calor a través de la frontera por unidad de tiempo	+	energía térmica generada en el interior por unidad de tiempo,
---	---	---	---	---

donde la energía calorífica total en una región R es

$$\text{energía calorífica} = \iiint_R c\rho u \, dV,$$

en lugar de la integral unidimensional utilizada en la Sección 1.2.

Figura 1.5.1: Región tridimensional R .

Vector de flujo de calor y vectores normales. Necesitamos una expresión para el flujo de energía calorífica. En el problema unidimensional, el flujo de calor ϕ se considera en sentido positivo hacia la derecha ($\phi < 0$ significa flujo hacia la izquierda). En el problema tridimensional, el calor fluye en alguna dirección y por tanto el **flujo de calor es un vector** ϕ . La magnitud de ϕ es la cantidad de energía calorífica por unidad de tiempo y por unidad de superficie. Sin embargo, al considerar la conservación de la energía calorífica, lo único que importa es el flujo de calor *a través de la frontera* por unidad de tiempo. Si el flujo en un punto, como el punto A de la Figura 1.5.2, es paralelo a la frontera, entonces no hay energía calorífica *cruzando* la frontera por ese punto. De hecho, como se ve en el punto B de la misma figura, en este término sólo contribuye la componente normal del flujo de calor. Por otro lado, en cada punto hay dos vectores normales, uno interior y otro exterior. Convendremos pues en utilizar siempre el **vector normal unitario exterior** \hat{n} (donde el símbolo “ $\hat{}$ ” hace referencia a vector unitario).

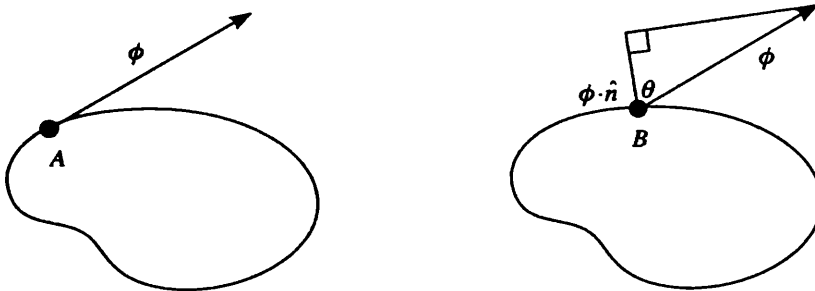


Figura 1.5.2: Componente normal exterior del vector de flujo de calor.

Conservación de la energía calorífica. La cantidad de energía calorífica que fluye *saliendo* de la región R por unidad de tiempo y por unidad de superficie en cada punto, es la componente normal exterior del vector de flujo de calor en ese punto. Según la Figura 1.5.2, la componente normal exterior del flujo de calor en el punto B es $|\phi| \cos \theta = \phi \cdot \mathbf{n} / |\mathbf{n}| = \phi \cdot \hat{n}$. Si el vector de flujo de calor ϕ se dirige hacia el interior, entonces $\phi \cdot \hat{n} < 0$, y el flujo hacia fuera es negativo. Para calcular la energía calorífica total que fluye hacia fuera de R por unidad de tiempo, debemos multiplicar $\phi \cdot \hat{n}$ por el elemento de superficie dS y “sumar” sobre

toda la superficie que encierra la región R . Esto se indica⁴ mediante la integral de superficie $\oiint \phi \cdot \hat{n} \, dS$. Ésta es la cantidad de energía calorífica que sale de R y da lugar (si es positiva) a una disminución de la energía calorífica total en R . Si Q es la energía calorífica por unidad de superficie que se genera en el interior de R , entonces la cantidad total de energía generada será $\iiint_R Q \, dV$. Por tanto, la ley de conservación de la energía calorífica en una región tridimensional arbitraria R se escribe como

$$\frac{d}{dt} \iiint_R c\rho u \, dV = - \oiint \phi \cdot \hat{n} \, dS + \iiint_R Q \, dV. \quad (1.5.1)$$

Teorema de la divergencia. En una dimensión, el paso de la ley integral de conservación a una relación diferencial se hizo mediante la fórmula (teorema fundamental del cálculo),

$$\phi(a) - \phi(b) = - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dx,$$

que indica que el flujo a través de los bordes se puede expresar mediante una integral sobre todo el intervalo. El análogo a este resultado para funciones de tres variables es el teorema de la divergencia. Para un vector \mathbf{A} (con componentes A_x , A_y y A_z , es decir $\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$) su divergencia se define mediante

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \equiv \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z. \quad (1.5.2)$$

Notemos que la divergencia de un vector es un escalar. El **teorema de la divergencia establece que la integral de volumen de la divergencia de un vector diferenciable \mathbf{A} es la integral de superficie de la componente normal exterior de \mathbf{A} :**

$$\iiint_R \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oiint \mathbf{A} \cdot \hat{n} \, dS. \quad (1.5.3)$$

También es conocido como teorema de Gauss. Se puede usar para relacionar ciertas integrales de superficie con integrales de volumen y viceversa. Es muy importante y muy útil (tanto en lo que sigue como más adelante). Su deducción se basa en repetir los argumentos que demuestran el teorema fundamental del cálculo en cada una de las dimensiones, pero preferimos omitir la demostración.

⁴En ocasiones se usa la notación ϕ_n en lugar de $\phi \cdot \hat{n}$ para indicar la componente normal exterior de ϕ .

Aplicación del teorema de la divergencia al flujo de calor. La integral de superficie que aparece en la ley de conservación de la energía calorífica (1.5.1), correspondiente a la energía calorífica que fluye a través de la frontera por unidad de tiempo, puede escribirse como una integral de volumen de acuerdo al teorema de la divergencia (1.5.3). Así (1.5.1) se convierte en

$$\frac{d}{dt} \iiint_R c\rho u \, dV = - \iiint_R \nabla \cdot \phi \, dV + \iiint_R Q \, dV. \quad (1.5.4)$$

Observemos que la derivada temporal que aparece en (1.5.4) puede intercambiarse con la integral (pues el dominio espacial R está fijo) si la escribimos como derivada parcial. Por tanto, todas las integrales de (1.5.4) son integrales triples sobre el mismo volumen, que pueden sumarse en una sola integral:

$$\iiint_R \left[c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \phi - Q \right] dV = 0. \quad (1.5.5)$$

Como esta integral es cero para cualquier región arbitraria R , se deduce (como se hizo para las integrales unidimensionales) que el integrando debe ser cero:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \phi - Q = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$\boxed{c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \phi + Q.} \quad (1.5.6)$$

Esta Ecuación (1.5.6) se reduce a la Ecuación (1.2.3) en el caso unidimensional.

Ley de Fourier de la difusión del calor. En una dimensión y de acuerdo a la ley experimental de Fourier, el flujo de calor ϕ es proporcional a la derivada de la temperatura, $\phi = -K_0 \partial u / \partial x$, donde el signo menos indica que la energía térmica fluye de lo más caliente a lo más frío; $\partial u / \partial x$ es la variación de temperatura por unidad de longitud. Estas mismas ideas se aplican en tres dimensiones, pero aquí el vector de flujo de calor ϕ es proporcional al gradiente de temperatura ($\nabla u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k}$):

$$\boxed{\phi = -K_0 \nabla u.} \quad (1.5.7)$$

Esta fórmula se conoce como **ley de Fourier de la difusión del calor**. De nuevo K_0 es la conductividad térmica. Una deducción de esta relación se puede ver en el apéndice de esta sección. En resumen, en varias dimensiones se sustituye $\partial u / \partial x$ por ∇u .

Ecuación del calor. Cuando el vector de flujo de calor (1.5.7) se sustituye en la ley de conservación de la energía calorífica (1.5.6), se obtiene la siguiente ecuación en derivadas parciales para la temperatura:

$$\boxed{c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K_0 \nabla u) + Q.} \quad (1.5.8)$$

Si no hay fuentes externas ($Q = 0$) y los coeficientes térmicos son constantes, la Ecuación (1.5.8) se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla \cdot (\nabla u), \quad (1.5.9)$$

donde $k = K_0/c\rho$ es la difusividad térmica. A partir de la definición de divergencia se puede calcular la divergencia del gradiente de u :

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 u.} \quad (1.5.10)$$

La expresión $\nabla^2 u$ se denomina **laplaciano** de u . Por tanto, en este caso

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u.} \quad (1.5.11)$$

La Ecuación (1.5.11) es frecuentemente conocida como **ecuación del calor** o **de difusión** en dimensión tres. La notación $\nabla^2 u$ es útil para enfatizar el papel del operador gradiente ∇ :

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}.$$

Observemos que el gradiente de u , denotado por ∇u , es el vector resultado de aplicar el operador ∇ al escalar u , mientras que la divergencia de un vector \mathbf{A} , denotado por $\nabla \cdot \mathbf{A}$, es el producto escalar del vector ∇ con el vector \mathbf{A} . Así, ∇^2 es el producto escalar del vector gradiente consigo mismo,

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

operando sobre u , de ahí el cuadrado en la notación ∇^2 .

Problema de valor inicial y frontera. A la Ecuación (1.5.8) [o (1.5.11)], hay que añadir una condición inicial, determinada por la distribución inicial de temperaturas,

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z).$$

Por otro lado, la temperatura también satisface alguna condición de frontera en cada punto de la superficie que encierra la región considerada. Esta condición de frontera puede ser de varios tipos (como en los problemas unidimensionales). Podemos fijar la temperatura,

$$u(x, y, z, t) = T(x, y, z, t),$$

sobre la frontera, donde T es una función dada de t en cada punto de la frontera. También es posible fijar el flujo de calor a través de la frontera. Por ejemplo, es frecuente tener la frontera (o parte de ella) **aislada**. Quiere esto decir que no hay flujo de calor a través de esa parte de frontera. Como el vector de flujo de calor es $-K_0 \nabla u$, la cantidad de calor que fluye hacia fuera en cada punto será la componente normal exterior unitaria del vector de flujo de calor, $-K_0 \nabla u \cdot \hat{n}$, donde \hat{n} es el vector normal exterior a la superficie frontera en ese punto. Por tanto, para una superficie aislada,

$$\nabla u \cdot \hat{n} = 0.$$

Observemos que $\nabla u \cdot \hat{n}$ es la derivada direccional de u en la dirección del vector normal exterior, también conocida como derivada normal⁵.

Una condición más realista en ocasiones es la ley de enfriamiento de Newton. Esta ley establece que la energía calorífica que fluye hacia fuera por unidad de tiempo y por unidad de superficie, es proporcional a la diferencia entre la temperatura en la superficie, u , y la temperatura fuera de la superficie, u_b . Así, aplicando la ley de enfriamiento de Newton, se tiene en la frontera

$$-K_0 \nabla u \cdot \hat{n} = H(u - u_b). \quad (1.5.12)$$

La constante de proporcionalidad es usualmente $H > 0$, ya que si $u > u_b$ se espera que el calor fluya hacia fuera y $-K_0 \nabla u \cdot \hat{n}$ sea positivo. La Ecuación (1.5.12) satisface las dos formas de la ley de enfriamiento de Newton para problemas en una dimensión. En particular, en $x = 0$, $\hat{n} = -\hat{i}$ y el término de la izquierda de (1.5.12) se reduce a $K_0 \partial u / \partial x$, mientras que en $x = L$, $\hat{n} = \hat{i}$, y este término se convierte en $-K_0 \partial u / \partial x$ [véanse (1.3.4) y (1.3.5)].

Estado estacionario. Si las condiciones de frontera y las posibles fuentes de calor son independientes del tiempo, es posible que existan soluciones estacionarias de la ecuación del calor que verifiquen las condiciones de frontera estacionarias:

$$0 = \nabla \cdot (K_0 \nabla u) + Q.$$

Observemos que en una distribución de temperaturas en equilibrio, $u(x, y, z)$ verifica una ecuación en derivadas parciales con más de una dimensión espacial. En el caso de coeficientes térmicos constantes, la distribución de temperaturas en equilibrio satisface

$$\nabla^2 u = -\frac{Q}{K_0}, \quad (1.5.13)$$

⁵En algunos textos se usa la notación $\partial u / \partial n$. Sin embargo, para calcular $\partial u / \partial n$ lo usual es calcular el producto escalar de los dos vectores, ∇u y \hat{n} , $\nabla u \cdot \hat{n}$, por lo que no usaremos aquí la notación $\partial u / \partial n$.

conocida como **ecuación de Poisson**.

Si además no hay fuentes ($Q = 0$), entonces

$$\boxed{\nabla^2 u = 0;} \quad (1.5.14)$$

el laplaciano de la distribución de temperaturas es cero. La Ecuación (1.5.14) se conoce como **ecuación de Laplace**. También se denomina **ecuación potencial**, pues el potencial gravitacional y el potencial electrostático satisfacen (1.5.14) en ausencia de fuerzas externas. En próximas secciones resolveremos numerosos problemas que involucran la ecuación de Laplace.

Problemas en dimensión dos. Todos los argumentos anteriores en tres dimensiones son válidos si la geometría es tal que la temperatura depende únicamente de las variables espaciales x, y , además del tiempo t . Por ejemplo, la ecuación de Laplace en dos dimensiones, x e y , correspondiente al flujo de calor en equilibrio sin fuentes (y propiedades térmicas constantes), es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

ya que $\partial^2 u / \partial z^2 = 0$. Los resultados en dimensión dos pueden obtenerse directamente (sin pasar por dimensión tres), usando los principios fundamentales en dos dimensiones. No repetiremos la deducción, sólo presentamos un resumen de los resultados. Cada vez que aparezca una integral de volumen ($\iiint_R \cdots dV$), debemos reemplazarla por una integral de superficie sobre la región plana considerada ($\iint_R \cdots dS$). Análogamente, la contribución de la frontera en los problemas tridimensionales, es decir, la integral de superficie $\oiint \cdots dS$, debe sustituirse por la integral de línea $\oint \cdots d\tau$, una integral sobre la frontera del dominio plano R . La deducción de estos resultados no ofrece dificultad, pues el teorema de la divergencia en dimensión tres,

$$\iiint_R \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oiint \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS. \quad (1.5.15)$$

también es válido en dimensión dos, en la forma

$$\iint_R \nabla \cdot \mathbf{A} \, dS = \oint \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\tau. \quad (1.5.16)$$

Esta fórmula recibe a veces también el nombre de *teorema de Green*, pero aquí preferimos referirnos a él como la versión bidimensional del teorema de la divergencia. De esta manera sólo se necesita recordar una ecuación, (1.5.15), y *cambiar el número de signos de integral para problemas bidimensionales*.

Coordenadas polares y cilíndricas. El laplaciano,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1.5.17)$$

es importante para la ecuación del calor (1.5.11) y su versión estacionaria (1.5.14), así como para otros problemas de gran relevancia en ciencias e ingeniería. La Ecuación (1.5.17) así escrita, en coordenadas cartesianas, es útil sobre todo cuando el dominio espacial considerado es un rectángulo. Sin embargo, en las aplicaciones prácticas pueden ser más interesantes otros sistemas de coordenadas, y se necesitaría una fórmula que expresara el laplaciano en el sistema de coordenadas apropiado. En coordenadas cilíndricas, donde r es la distancia radial al eje z , y θ es el ángulo entre el eje x positivo y la proyección del radio vector sobre el plano xy ,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \\ z &= z, \end{aligned} \quad (1.5.18)$$

el laplaciano se escribe

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (1.5.19)$$

No es necesario memorizar esta fórmula, pues puede consultarse con facilidad en cualquier manual. Como recordatorio observemos que cada término en el laplaciano tiene dimensiones de u dividido por longitud al cuadrado [igual que en coordenadas cartesianas, (1.5.17)]. Como θ está medido en radianes, es decir, es adimensional, hay que dividir $\partial^2 u / \partial \theta^2$ por r^2 . En coordenadas polares (un sistema coordenado bidimensional con z fijado, usualmente $z = 0$, el laplaciano es el mismo que en (1.5.19) con $\partial^2 u / \partial z^2 = 0$, pues no hay dependencia en z . La Ecuación (1.5.19) se puede obtener mediante el uso de la regla de la cadena (veáanse los ejercicios).

En algunas situaciones físicas la temperatura *no* depende del ángulo θ ; se dice entonces que la distribución de temperaturas tiene **simetría circular** o **axial**. En ese caso

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (1.5.20)$$

Coordenadas esféricas. La simetría esférica que domina algunos problemas geofísicos, así como problemas eléctricos con conductores esféricos, implica la necesidad de utilizar coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) . La distancia radial es ρ , el ángulo formado con el polo (con el eje z) es ϕ , y el ángulo horizontal (cilíndrico o azimutal) es θ . Observemos que si ρ es constante y el ángulo ϕ es también constante, se genera un círculo de radio $\rho \operatorname{sen} \phi$ (veáse la Figura 1.5.3) de manera que

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z &= \rho \cos \phi. \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

El ángulo formado con el polo varía entre 0 y π (mientras que el ángulo horizontal lo hace entre 0 y 2π). El laplaciano en coordenadas esféricas se escribe

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (1.5.22)$$

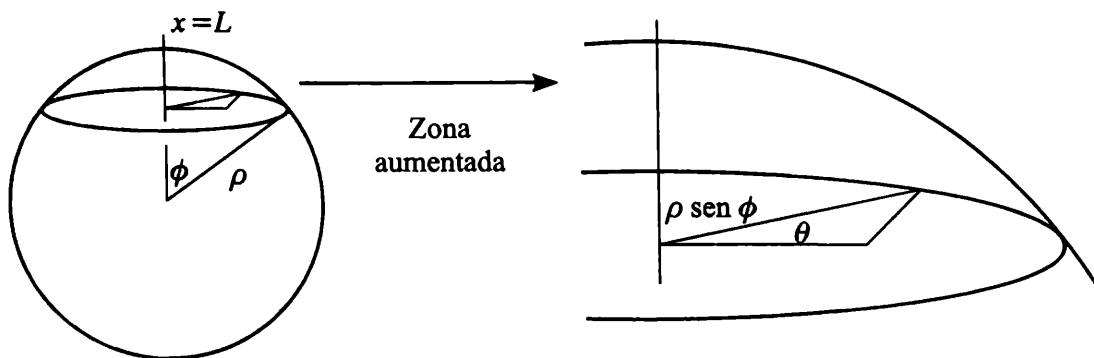


Figura 1.5.3: Coordenadas esféricas.

EJERCICIOS 1.5

1.5.1. Sea $c(x, y, z, t)$ la concentración de un contaminante (cantidad de contaminante por unidad de volumen).

- Escribir una expresión para la cantidad total de contaminante en la región R .
- Supongamos que el flujo \mathbf{J} del contaminante es proporcional al gradiente de la concentración (¿es razonable?). Expresar una ley de conservación del contaminante.
- Deducir la ecuación en derivadas parciales que rige la difusión del contaminante.

***1.5.2.** El vector de flujo de calor deducido a partir de la conducción de energía térmica es $\phi = -K_0 \nabla u$. Si además las moléculas se mueven con una velocidad media \mathbf{V} , un proceso llamado **convección**, explicar brevemente la expresión $\phi = -K_0 \nabla u + c\rho u \mathbf{V}$. Deducir la correspondiente ecuación para el flujo de calor, incluyendo la conducción y la convección de energía térmica (suponiendo que las propiedades térmicas son constantes y que no hay fuentes).

1.5.3. Consideremos las coordenadas polares

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta.$$

- (a) Usando la relación $r^2 = x^2 + y^2$, demostrar las fórmulas $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta$, $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$ y $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}$.
- (b) Demostrar que $\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$ y $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$.
- (c) Usando la regla de la cadena, demostrar que $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \hat{\theta}$.
- (d) Si $\mathbf{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta}$, demostrar que $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta)$, pues del apartado (b) se tiene $\partial \hat{r} / \partial \theta = \hat{\theta}$ y $\partial \hat{\theta} / \partial \theta = -\hat{r}$.
- (e) Demostrar la fórmula $\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$.

1.5.4. Usando el Ejercicio 1.5.3(a) y la regla de la cadena, repetir el Ejercicio 1.5.3(e) en el caso particular en que u depende sólo de r , es decir, $u = u(r)$.

1.5.5. Supongamos que la temperatura tiene simetría circular, $u = u(r, t)$, donde $r^2 = x^2 + y^2$. En este ejercicio deduciremos la ecuación del calor para este problema. Consideremos un anillo circular $a \leq r \leq b$.

- (a) Demostrar que la energía calorífica total es $2\pi \int_a^b c \rho u r \, dr$.
- (b) Demostrar que el flujo de calor por unidad de tiempo que fluye hacia fuera del anillo por la frontera $r = b$ es $-2\pi b K_0 \partial u / \partial r |_{r=b}$. Un resultado similar se tiene en $r = a$.
- (c) Usar los apartados (a) y (b) para deducir la ecuación del calor con simetría circular y sin fuentes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

1.5.6. Modificar el Ejercicio 1.5.5 si las propiedades térmicas dependen de r .

1.5.7. Deducir la ecuación del calor en dos dimensiones usando el teorema de Green (1.5.16), la forma bidimensional del teorema de la divergencia.

1.5.8. Si u verifica la ecuación de Laplace en tres dimensiones, demostrar que se tiene

$$\oiint \nabla u \cdot \hat{n} \, dS = 0,$$

para cualquier superficie cerrada. *Indicación:* usar el teorema de la divergencia. Dar una interpretación física de este resultado en el contexto de flujo de calor.

1.5.9. Determinar la distribución de temperaturas en equilibrio en un anillo ($r_1 \leq r \leq r_2$):

- *(a) si el radio exterior se mantiene a una temperatura T_2 y el interior a T_1 ;
 (b) si el radio exterior se mantiene aislado y el interior a una temperatura T_1 .

1.5.10. Determinar la distribución de temperaturas en equilibrio en un círculo ($r \leq r_0$) si se fija la temperatura en la frontera a T_0 .

***1.5.11.** Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad a < r < b,$$

con los datos

$$u(r, 0) = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a, t) = \beta, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(b, t) = 1.$$

Usando un razonamiento físico, explicar para qué valor(es) de β existe un equilibrio de temperaturas.

1.5.12. Supongamos que la temperatura tiene simetría esférica, $u = u(r, t)$, donde r es la distancia a un punto fijado, que consideramos el origen, ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$). Consideremos el flujo de calor (sin fuentes) entre dos esferas concéntricas de radios a y b .

- (a) Demostrar que la energía calorífica total es $4\pi \int_a^b c\rho u r^2 dr$.
- (b) Demostrar que el flujo de calor por unidad de tiempo que fluye hacia fuera del anillo por la frontera $r = b$ es $-4\pi b^2 K_0 \partial u / \partial r |_{r=b}$. Un resultado similar se tiene en $r = a$.
- (c) Usar los apartados (a) y (b) para deducir la ecuación del calor con simetría esférica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

***1.5.13.** Determinar la distribución de temperaturas del *estado estacionario* entre dos esferas concéntricas de radios 1 y 4, respectivamente, si la esfera exterior se mantiene a una temperatura de 80° y la esfera interior se mantiene a 0° (véase el Ejercicio 1.5.12).

1.5.14. Las isotermas son líneas de temperatura constante. Demostrar que las isotermas son perpendiculares a las partes de la frontera que se mantienen aisladas.

Coordenadas curvilíneas ortogonales. Consideremos un nuevo sistema coordenado (u, v, w) , de manera que las coordenadas cartesianas quedan definidas mediante $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, y el radio vector es $\mathbf{r} \equiv x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. Las derivadas parciales de \mathbf{r} respecto de cada coordenada apuntan en la dirección de esa coordenada. Así por ejemplo, el vector $\partial\mathbf{r}/\partial u$ puede normalizarse dividiendo por su longitud $h_u = |\partial\mathbf{r}/\partial u|$, llamada **factor de escala**, dando lugar al vector unitario en la dirección de u , $\hat{\mathbf{e}}_u = \frac{1}{h_u} \partial\mathbf{r}/\partial u$.

1.5.15. Determinar el factor de escala para las coordenadas cilíndricas.

1.5.16. Determinar el factor de escala para las coordenadas esféricas.

1.5.17. El gradiente de un escalar se puede expresar en términos de las nuevas coordenadas, $\nabla g = a\partial\mathbf{r}/\partial u + b\partial\mathbf{r}/\partial v + c\partial\mathbf{r}/\partial w$, donde hay que determinar los valores de los escalares a, b, c . Usando que $dg = \nabla g \cdot d\mathbf{r}$, demostrar que el **gradiente** en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales viene dado por

$$\nabla g = \frac{1}{h_u} \frac{\partial g}{\partial u} \hat{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial g}{\partial v} \hat{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial g}{\partial w} \hat{e}_w. \quad (1.5.23)$$

Obtener una expresión para la divergencia es más difícil, por lo que sólo presentamos el resultado final. Si expresamos un vector \mathbf{p} en las nuevas coordenadas, $\mathbf{p} = p_u \hat{e}_u + p_v \hat{e}_v + p_w \hat{e}_w$, entonces la **divergencia** de \mathbf{p} es

$$\nabla \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (h_v h_w p_u) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u h_w p_v) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v p_w) \right]. \quad (1.5.24)$$

1.5.18. Usando (1.5.23) y (1.5.24), obtener la siguiente expresión para el **laplaciano** en un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial T}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_u h_w}{h_v} \frac{\partial T}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial T}{\partial w} \right) \right]. \quad (1.5.25)$$

1.5.19. Usando (1.5.25), determinar el laplaciano en coordenadas cilíndricas.

1.5.20. Usando (1.5.25), determinar el laplaciano en coordenadas esféricas.

Apéndice de la Sección 1.5: repaso del gradiente y deducción de la ley de Fourier para la conducción del calor

Experimentalmente se observa que en los materiales isótropos⁶ (es decir, en los que no hay direcciones privilegiadas) el calor fluye de lo más caliente a lo más frío en la dirección en que la diferencia de temperaturas es mayor. El flujo de calor es proporcional (con constante de proporcionalidad K_0 , la conductividad térmica) a la variación de temperatura en esa dirección.

La variación de temperatura Δu es

$$\Delta u = u(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t) - u(\mathbf{x}, t) \approx \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z.$$

En la dirección $\hat{\alpha} = \alpha_1 \hat{i} + \alpha_2 \hat{j} + \alpha_3 \hat{k}$, se tiene $\Delta \mathbf{x} = \Delta s \hat{\alpha}$, donde Δs es la distancia entre \mathbf{x} y $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$. Así, la variación de temperatura en la dirección $\hat{\alpha}$ es la **derivada direccional**:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial u}{\partial z} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla u,$$

⁶Ejemplos de materiales no isótropos son ciertos cristales y fibras.

donde hemos definido el siguiente *vector*:

$$\nabla u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k}, \quad (1.5.26)$$

llamado el **gradiente** de la temperatura. Usando las propiedades del producto escalar, si θ es el ángulo entre $\hat{\alpha}$ y ∇u , entonces la derivada direccional es $|\nabla u| \cos \theta$, pues $|\hat{\alpha}| = 1$. La variación máxima de u (la derivada direccional máxima) es $|\nabla u| > 0$, que se obtiene para $\theta = 0$ (es decir, en la dirección del gradiente). Como esta derivada es positiva, el aumento de temperatura es mayor en la dirección del gradiente. Y como el calor fluye en la dirección en que la temperatura disminuye, **el vector de flujo de calor apunta en la dirección opuesta al gradiente de calor**. Se sigue que

$$\phi = -K_0 \nabla u. \quad (1.5.27)$$

Ésta es la ley de Fourier de la conducción del calor en dimensión tres, donde, comparando con la misma en dimensión uno, el gradiente ∇u sustituye a $\partial u / \partial x$.

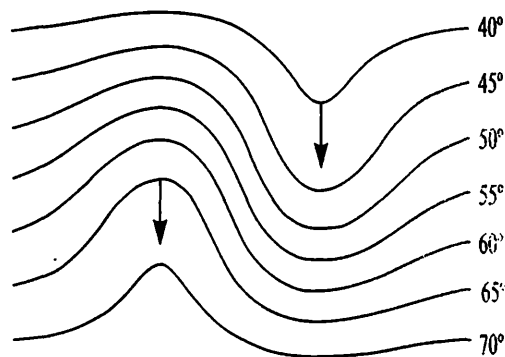


Figura 1.5.4: El gradiente es perpendicular a las superficies de nivel de la temperatura.

Otra propiedad fundamental del gradiente es que es perpendicular a las superficies de nivel. La forma más cómoda de visualizar este hecho es restringirse a problemas en dimensión dos (véase la Figura 1.5.4), donde la temperatura es constante a lo largo de las curvas de nivel (en lugar de las superficies de nivel). Para demostrar que el gradiente es perpendicular a las superficies de nivel, consideremos la superficie donde la temperatura es constante e igual a T_0 , $u(x, y, z, t) = T_0$. Ahora derivamos ambos miembros de esta igualdad (para un tiempo fijo) a lo largo de la superficie. Como T_0 es constante, $dT_0 = 0$. Por otro lado, usando la regla de la cadena,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = 0, \quad (1.5.28)$$

ecuación que se puede escribir como

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}) = 0$$

o también

$$\nabla u \cdot (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}) = 0. \quad (1.5.29)$$

El término $dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}$ representa cualquier vector en el plano tangente a la superficie de nivel. Como el producto escalar de este vector con ∇u es cero, se deduce que ∇u es perpendicular al plano tangente. Finalmente, ∇u es perpendicular a la superficie $u = \text{constante}$.

Hemos obtenido entonces dos propiedades del gradiente, ∇u :

1. Dirección: ∇u es perpendicular a cada superficie $u = \text{constante}$; ∇u apunta en la dirección en que la derivada direccional es mayor; u crece en la dirección del gradiente.
2. Magnitud: $|\nabla u|$ es el valor máximo que puede tomar la derivada direccional.

Capítulo 2

Método de separación de variables

2.1. Introducción

En el Capítulo 1 dedujimos, a partir de principios físicos, la ecuación del calor y sus correspondientes condiciones iniciales y de contorno. Queremos ahora buscar la solución matemática de algunos problemas físicos en que aparecen ecuaciones en derivadas parciales. Utilizaremos la técnica llamada método de separación de variables. Para seguir este libro será necesario convertirse en un experto en este método y, por eso, trataremos bastantes ejemplos. Haremos hincapié en la técnica de resolución de problemas pero también debemos aprender cuándo no se debe utilizar esta técnica.

Un problema relativamente simple pero típico para la ecuación de la conducción del calor es el de una varilla unidimensional ($0 \leq x \leq L$) con todos los coeficientes térmicos constantes. La ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Q(x, t)}{c\rho}, \quad \begin{array}{l} t > 0 \\ 0 < x < L, \end{array} \quad (2.1.1)$$

está sujeta a la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L, \quad (2.1.2)$$

y a dos condiciones de contorno. Por ejemplo, si ambos extremos de la varilla tienen la temperatura prescrita, entonces

$$\begin{aligned} u(0, t) &= T_1(t), \\ u(L, t) &= T_2(t), \end{aligned} \quad t > 0. \quad (2.1.3)$$

El método de separación de variables se utiliza cuando la ecuación en derivadas parciales y las condiciones de contorno son lineales y homogéneas, conceptos que explicaremos ahora.

2.2. Linealidad

Al igual que en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, el concepto de linealidad será muy importante. Un **operador lineal** se define como aquél que satisface

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1L(u_1) + c_2L(u_2) \quad (2.2.1)$$

para dos funciones cualesquiera u_1 y u_2 , donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. $\partial/\partial t$ y $\partial^2/\partial x^2$ son ejemplos de operadores lineales, ya que satisfacen (2.2.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(c_1u_1 + c_2u_2) &= c_1\frac{\partial u_1}{\partial t} + c_2\frac{\partial u_2}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(c_1u_1 + c_2u_2) &= c_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Se puede demostrar (véase el Ejercicio 2.2.1) que cualquier combinación lineal de operadores lineales es un operador lineal. Por tanto, el **operador del calor**

$$\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

es también un operador lineal.

Una **ecuación lineal** para la incógnita u es de la forma

$$L(u) = f, \quad (2.2.2)$$

donde L es un operador lineal y f es conocida. Ejemplos de *ecuaciones en derivadas parciales lineales* son

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x, t)u + f(x, t), \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha(x, t)u. \quad (2.2.6)$$

Ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales *no lineales* son

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x, t)u^4, \quad (2.2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (2.2.8)$$

Los términos u^4 y $u\partial u/\partial x$ son no lineales; no cumplen (2.2.1).

Si $f = 0$, entonces (2.2.2) se convierte en $L(u) = 0$, que es lo que llamamos una ecuación **lineal homogénea**. Ecuaciones en derivadas parciales lineales homogéneas son la ecuación del calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.2.9)$$

al igual que (2.2.5) y (2.2.6). La propiedad (2.2.1) trae como consecuencia que $L(0) = 0$ (tomando $c_1 = c_2 = 0$). Por tanto, $u = 0$ es siempre solución de una ecuación lineal homogénea. Por ejemplo, $u = 0$ satisface la ecuación del calor (2.2.9). Es por ello que llamaremos a $u = 0$ la solución *trivial* de una ecuación lineal homogénea. La forma más sencilla de comprobar si una ecuación es homogénea es sustituir la función u idénticamente igual a cero. Si $u \equiv 0$ satisface una ecuación lineal, entonces se tiene que $f = 0$ y, por tanto, la ecuación lineal es homogénea. Si eso no ocurre la ecuación se llama **no homogénea** [por ejemplo, (2.2.3) y (2.2.4)].

La propiedad fundamental de los operadores lineales (2.2.1) permite sumar soluciones de ecuaciones lineales en el sentido siguiente:

Principio de superposición

Si u_1 y u_2 satisfacen una ecuación lineal *homogénea*, entonces cualquier combinación lineal de ellas, $c_1 u_1 + c_2 u_2$, también satisface la misma ecuación lineal homogénea.

La demostración se basa en la definición de operador lineal. Supongamos que u_1 y u_2 son dos soluciones de una ecuación lineal homogénea. Eso significa que $L(u_1) = 0$ y $L(u_2) = 0$. Calculemos ahora $L(c_1 u_1 + c_2 u_2)$ utilizando la definición de operador lineal, obtenemos

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2).$$

Como u_1 y u_2 son soluciones de la ecuación homogénea, se sigue que $L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = 0$. Esto significa que $c_1 u_1 + c_2 u_2$ satisface la ecuación lineal homogénea $L(u) = 0$ si u_1 y u_2 satisfacen la *misma* ecuación lineal homogénea.

Los conceptos de linealidad y homogeneidad también se aplican a las condiciones de contorno, cuando las variables están evaluadas en puntos concretos. Son ejemplos de condiciones de contorno *lineales* las condiciones que hemos estudiado ya:

$$u(0, t) = f(t), \quad (2.2.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = g(t), \quad (2.2.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad (2.2.12)$$

$$-K_0 \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = h[u(L, t) - g(t)]. \quad (2.2.13)$$

Una condición de contorno *no lineal* es, por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = u^2(L, t). \quad (2.2.14)$$

De estas condiciones, $u \equiv 0$ satisface solamente (2.2.12). Ésta es, por tanto, homogénea. No es necesario que una condición de contorno sea del tipo $u(0, t) = 0$ para que la solución $u \equiv 0$ la cumpla.

EJERCICIOS 2.2

2.2.1. Demostrar que cualquier combinación lineal de operadores lineales es un operador lineal.

2.2.2. (a) Demostrar que $L(u) = \frac{\partial}{\partial x} [K_0(x) \frac{\partial u}{\partial x}]$ es un operador lineal.

(b) Demostrar que en general $L(u) = \frac{\partial}{\partial x} [K_0(x, u) \frac{\partial u}{\partial x}]$ no es un operador lineal.

2.2.3. Demostrar que $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(u, x, t)$ es lineal si $Q = \alpha(x, t)u + \beta(x, t)$ y que además es homogéneo si $\beta(x, t) = 0$.

2.2.4. En este ejercicio vamos a deducir principios de superposición para problemas no homogéneos. Consideremos la ecuación $L(u) = f$.

(a) Si u_p es una solución particular, $L(u_p) = f$, y si u_1 y u_2 son soluciones homogéneas, $L(u_i) = 0$, demostrar que $u = u_p + c_1 u_1 + c_2 u_2$ es otra solución particular.

(b) Si u_{p_i} es una solución particular correspondiente $f = f_i$ ($i = 1, 2$), es decir, $L(u_{p_i}) = f_i$, encontrar una solución particular correspondiente a $f = f_1 + f_2$.

2.2.5 Si L es un operador lineal, demostrar que $L(\sum_{n=1}^M c_n u_n) = \sum_{n=1}^M c_n L(u_n)$. Utilizar este resultado para demostrar que el principio de superposición se puede extender a cualquier cantidad finita de soluciones de la ecuación homogénea.

2.3. Ecuación del calor con temperatura cero en los extremos

2.3.1. Introducción

La ecuación en derivadas parciales (2.1.1) es lineal, pero sólo es homogénea si no hay fuentes, es decir, si $Q(x, t) = 0$. Las condiciones de contorno (2.1.3) son también lineales y como antes son homogéneas solamente si $T_1(t) = 0$ y $T_2(t) = 0$. Por ello planteamos estudiar en primer lugar el problema

$$\text{EDP : } \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \quad \begin{array}{l} 0 < x < L, \\ t > 0, \end{array} \quad (2.3.1)$$

$$\text{CC : } \begin{array}{l} u(0,t) = 0, \\ u(L,t) = 0, \end{array} \quad (2.3.2)$$

$$\text{CI : } u(x,0) = f(x). \quad (2.3.3)$$

El problema consta de una ecuación en derivadas parciales lineal homogénea con condiciones de contorno lineales homogéneas. Hay dos razones para que investiguemos este tipo de problema, (2.3.1) - (2.3.3), además del hecho de que se puede resolver por el método de separación de variables. La primera es que éste es un problema físico relevante correspondiente a una varilla unidimensional ($0 < x < L$) sin fuentes y con ambos extremos sumergidos en un depósito a 0° de temperatura. Estamos muy interesados en predecir cómo cambia la energía térmica inicial (representada por la condición inicial) en esta situación física relativamente simple. La segunda es que para resolver el problema no homogéneo (2.1.1) - (2.1.3) necesitaremos saber cómo resolver el problema homogéneo (2.3.1) - (2.3.3).

2.3.2. Separación de variables

En el **método de separación de variables** intentamos encontrar soluciones que sean un producto de la forma

$$u(x,t) = \phi(x)G(t), \quad (2.3.4)$$

donde $\phi(x)$ es una función sólo de x y $G(t)$ una función sólo de t . La función definida en (2.3.4) debe cumplir la ecuación en derivadas parciales *lineal homogénea* (2.3.1) y las condiciones de contorno (2.3.2), pero por el momento dejamos de lado (ignoramos) la condición inicial. La **solución producto**, (2.3.4), no satisface la condición inicial. Más adelante explicaremos cómo cumplirla.

Que quede claro desde el principio que no damos ninguna razón por la que elegir la forma (2.3.4) (Daniel Bernoulli inventó esta técnica en el siglo XVIII y comprobaremos que *funciona*). Sustituimos la solución producto (2.3.4) en la ecuación en derivadas parciales (2.3.1) calculando en primer lugar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \phi(x) \frac{dG}{dt}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d^2 \phi}{dx^2} G(t), \end{aligned}$$

con lo que la ecuación del calor (2.3.1) implica que

$$\phi(x) \frac{dG}{dt} = k \frac{d^2 \phi}{dx^2} G(t). \quad (2.3.5)$$

Observemos que podemos “separar variables” dividiendo ambos miembros de (2.3.5) por $\phi(x)G(t)$:

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dt} = k \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2}.$$

Ahora las variables están “separadas” en el sentido de que el lado izquierdo es una función sólo de t y el lado derecho es una función sólo de x . Podríamos seguir a partir de esta fórmula, pero es *conveniente* (aunque no necesario) dividir también por la constante k , y obtener

$$\underbrace{\frac{1}{kG} \frac{dG}{dt}}_{\text{función sólo de } t} = \underbrace{\frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2}}_{\text{función sólo de } x} \quad (2.3.6)$$

Esto se podía haber obtenido directamente de (2.3.5) dividiendo por $k\phi(x)G(t)$. ¿Cómo puede ser una función del tiempo igual a una función del espacio? Si x y t son variables arbitrarias entonces x no puede ser una función de t (ni t una función de x) tal como parece decir (2.3.6). La idea fundamental es que es necesario que ambos miembros de (2.3.6) sean iguales a la misma constante:

$$\boxed{\frac{1}{kG} \frac{dG}{dt} = \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda,} \quad (2.3.7)$$

donde λ es una *constante* arbitraria, conocida como **constante de separación**¹. El misterioso signo negativo lo hemos introducido solamente por conveniencia.

La Ecuación (2.3.7) da lugar a dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para $G(t)$ y otra para $\phi(x)$:

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi,} \quad (2.3.8)$$

$$\boxed{\frac{dG}{dt} = -\lambda kG.} \quad (2.3.9)$$

Recordemos que λ es una constante y que es la misma en ambas Ecuaciones (2.3.8) y (2.3.9). Las soluciones producto, $u(x, t) = \phi(x)G(t)$, deben cumplir también las dos condiciones de contorno homogéneas. Por ejemplo, $u(0, t) = 0$ implica

¹ Expliquemos un poco más la constante de (2.3.7). Supongamos que el lado izquierdo de (2.3.7) es una función de t , $(1/kG)dG/dt = w(t)$. Si derivamos con respecto a x obtenemos cero: $0 = d/dx[(1/\phi) d^2\phi/dx^2]$. Como $(1/\phi) d^2\phi/dx^2$ es una función sólo de x , esto significa que debe ser constante al ser su derivada igual a cero. De aquí se sigue (2.3.7).

que $\phi(0)G(t) = 0$. Tenemos aquí dos posibilidades: o bien $G(t) \equiv 0$ (esto significa que $G(t)$ es idénticamente cero, para todo t), o bien $\phi(0) = 0$. Si $G(t) \equiv 0$, entonces por (2.3.4) la solución producto es idénticamente cero, $u(x, t) \equiv 0$. Esto no nos interesa porque $u(x, t) \equiv 0$ es la **solución trivial** ya que cumple automáticamente cualquier EDP homogénea y cualesquiera CC homogéneas. Nosotros buscamos soluciones no triviales. Para las soluciones no triviales debemos tener

$$\phi(0) = 0. \quad (2.3.10)$$

Utilizando la otra condición de contorno, $u(L, t) = 0$, obtenemos de forma similar que

$$\phi(L) = 0. \quad (2.3.11)$$

Las soluciones producto, además de cumplir dos ecuaciones diferenciales ordinarias, (2.3.8) y (2.3.9), deben también cumplir las condiciones de contorno (2.3.10) y (2.3.11).

2.3.3. Ecuación dependiente del tiempo

La ventaja de la solución producto es que transforma una ecuación en derivadas parciales, que no sabemos resolver, en dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Las condiciones de contorno imponen dos condiciones a la ecuación diferencial ordinaria (EDO) que depende de x . La ecuación dependiente del tiempo no tiene condiciones adicionales, es simplemente

$$\frac{dG}{dt} = -\lambda k G. \quad (2.3.12)$$

Resolveremos (2.3.12) antes de estudiar la EDO dependiente de x junto con sus condiciones de contorno homogéneas. La Ecuación (2.3.12) es una ecuación diferencial lineal de primer orden *con coeficientes constantes*. Podemos encontrar su solución bastante fácilmente. Casi todas las EDOs (lineales y homogéneas) con coeficientes constantes se pueden resolver buscando soluciones exponenciales, $G = e^{rt}$. Sustituyendo en la ecuación el polinomio característico obtenemos $r = -\lambda k$. Por tanto, la solución general de (2.3.12) es

$$G(t) = ce^{-\lambda kt}. \quad (2.3.13)$$

Hemos utilizado aquí el hecho de que en las ecuaciones lineales homogéneas, si $e^{-\lambda kt}$ es una solución, entonces $ce^{-\lambda kt}$ es también una solución (para cualquier constante arbitraria c). La solución dependiente del tiempo es una exponencial sencilla. Recordemos que λ es la constante de separación, que por el momento es arbitraria. Sin embargo, descubriremos que sólo ciertos valores de λ están permitidos. Si $\lambda > 0$, la solución decae exponencialmente cuando t aumenta (ya que $k > 0$). Si $\lambda < 0$, la solución crece exponencialmente y si $\lambda = 0$, la solución es constante en el tiempo. Como éste es un problema de conducción del calor y la temperatura $u(x, t)$

es proporcional a $G(t)$, no *esperamos* que la solución crezca exponencialmente con el tiempo. Por tanto, tomaremos $\lambda \geq 0$; no hemos demostrado esta afirmación, pero *no debería hacer falta*. Así, hemos descubierto que *esperamos* tener $\lambda \geq 0$. De hecho, ésta es la razón por la que utilizamos la expresión $-\lambda$ al separar variables [véase (2.3.7)]. Si hubiéramos utilizado μ (en lugar de $-\lambda$), los argumentos anteriores nos hubieran sugerido que $\mu \leq 0$. En resumen, cuando separamos variables en (2.3.7), resolvemos la ecuación dependiente del tiempo y vemos que la única posibilidad para que $G(t)$ no crezca exponencialmente es que la constante de separación sea ≤ 0 . Por eso utilizamos por conveniencia la expresión $-\lambda$, *con la esperanza de que sea* $\lambda \geq 0$. Demostraremos a continuación cómo determinar todas las posibles constantes de separación y verificaremos matemáticamente que $\lambda \geq 0$, tal como *esperamos* por los argumentos físicos presentados anteriormente.

2.3.4. Problema de contorno

La parte dependiente de x de la supuesta solución producto, $\phi(x)$, satisface una EDO de segundo orden con dos condiciones de contorno homogéneas:

$$\begin{array}{l} \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi, \\ \phi(0) = 0, \\ \phi(L) = 0. \end{array} \quad (2.3.14)$$

Llamamos a (2.3.14) **problema de contorno** para una ecuación diferencial ordinaria. En un primer curso sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, sólo se suelen estudiar problemas de valores iniciales. Por ejemplo (pensemos en la ley del movimiento de Newton para una partícula), resolvemos ecuaciones diferenciales de segundo orden ($m d^2y/dt^2 = F$) con dos condiciones iniciales [$y(0)$ y $dy/dt(0)$ son conocidas], **ambas en el mismo tiempo**. Los problemas de valores iniciales son bastante buenos ya que *usualmente* hay unicidad de solución para ellos. Sin embargo, (2.3.14) es diferente. Es un problema de contorno, ya que las dos condiciones no están dadas en el mismo sitio (por ejemplo, en $x = 0$) sino en dos distintos, $x = 0$ y $x = L$. No disponemos de una teoría simple que nos garantice que la solución exista o sea única para este tipo de problemas. En particular, notemos que $\phi(x) = 0$ satisface la EDO y las dos condiciones de contorno homogéneas sin importar el valor de la constante de separación λ , incluso si $\lambda < 0$; la llamamos entonces **solución trivial** del problema de contorno. Corresponde a $u(x, t) \equiv 0$, ya que $u(x, t) = \phi(x)G(t)$. Si (2.3.14) tuviera solución única, entonces $\phi(x) \equiv 0$ sería esa solución y no podríamos obtener soluciones no triviales de la EDP lineal homogénea por el método del producto (o separación de variables). Afortunadamente, existen otras soluciones de (2.3.14). No obstante, no existen soluciones no triviales de (2.3.14) para todos los valores de λ . Demostraremos que hay algunos valores especiales de λ , llamados

*autovalores*² del problema de contorno (2.3.14), para los cuales existen soluciones no triviales, $\phi(x)$. Esta solución no trivial $\phi(x)$, que existe solamente para algunos valores de λ , se llama *autofunción* correspondiente al autovalor λ .

Intentemos determinar los autovalores λ . En otras palabras, ¿para qué valores de λ existen soluciones no triviales de (2.3.14)? Podemos resolver (2.3.14) directamente. La EDO de segundo orden es lineal, homogénea y con coeficientes constantes, luego obtendremos normalmente dos soluciones independientes con forma exponencial, $\phi = e^{rx}$. Sustituyendo esta exponencial en la ecuación diferencial obtenemos el polinomio característico $r^2 = -\lambda$. Las soluciones correspondientes a las dos raíces tienen propiedades muy diferentes dependiendo del valor de λ . Hay cuatro casos:

1. $\lambda > 0$, en el que las dos raíces son imaginarias puras y complejas conjugadas una de otra, $r = \pm i\sqrt{\lambda}$.
2. $\lambda = 0$, en el que las dos raíces se confunden en una, $r = 0$.
3. $\lambda < 0$, en el que las dos raíces son reales y distintas $r = \pm\sqrt{-\lambda}$, una positiva y otra negativa (notemos que en este caso $-\lambda$ es positiva, luego la raíz cuadrada está bien definida).
4. λ compleja.

Ignoraremos el último caso (como la mayoría de los lectores hubieran hecho de todas formas) ya que probaremos más adelante (Capítulo 5) que λ debe ser real para que existan soluciones no triviales del problema de contorno (2.3.14). De acuerdo con el razonamiento que hicimos sobre el problema dependiente del tiempo esperamos que $\lambda \geq 0$, así que quizá sea innecesario analizar el caso 3. Sin embargo, demostraremos matemáticamente por qué omitir este caso.

Autovalores y autofunciones ($\lambda > 0$). Consideremos en primer lugar el caso en que $\lambda > 0$. El problema de contorno es

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi, \quad (2.3.15)$$

$$\phi(0) = 0, \quad (2.3.16)$$

$$\phi(L) = 0. \quad (2.3.17)$$

Si $\lambda > 0$, las soluciones exponenciales tienen componentes imaginarias, $e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$. En este caso las soluciones oscilan. Si deseamos obtener soluciones reales independientes, elegiremos normalmente $\cos\sqrt{\lambda}x$ y $\sin\sqrt{\lambda}x$, que son combinaciones lineales independientes de $e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}$. Así, la solución general de (2.3.15) es

$$\phi = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \quad (2.3.18)$$

²La palabra *autovalor* significa valor característico. En inglés se usa el término *eigenvalue*, derivado de la palabra alemana *eigenwert*.

una combinación lineal arbitraria de dos soluciones independientes (la combinación lineal puede ser de cualquier par de soluciones independientes). Las soluciones que suelen ser más convenientes son $\cos \sqrt{\lambda}x$ y $\sin \sqrt{\lambda}x$, pero también podemos usar $e^{i\sqrt{\lambda}x}$ y $e^{-i\sqrt{\lambda}x}$. En algunos ejemplos se eligen otras soluciones independientes. Por ejemplo, el Ejercicio 2.3.2(f) ilustra la ventaja de elegir a veces como soluciones independientes las funciones $\cos \sqrt{\lambda}(x - a)$ y $\sin \sqrt{\lambda}(x - a)$.

Aplicamos ahora las condiciones de contorno: $\phi(0) = 0$ implica que

$$0 = c_1;$$

es decir, se cancela el término del coseno al ser cero la solución en $x = 0$. Entonces, $\phi(x) = c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$. Sólo resta ahora imponer la otra condición de contorno: $\phi(L) = 0$ implica que

$$0 = c_2 \sin \sqrt{\lambda}L.$$

Para que se pueda verificar esta condición, debe ser o bien $c_2 = 0$ o bien $\sin \sqrt{\lambda}L = 0$. Si $c_2 = 0$, entonces $\phi(x) \equiv 0$ ya que teníamos previamente que $c_1 = 0$. Ésta es la solución trivial y nosotros buscamos aquellos valores de λ para los que hay soluciones no triviales. Entonces, los autovalores deben cumplir

$$\sin \sqrt{\lambda}L = 0. \quad (2.3.19)$$

Es decir, $\sqrt{\lambda}L$ debe ser un cero de la función seno. Un esquema de $\sin z$ (véase la Figura 2.3.1) o nuestro conocimiento de la función nos muestran que $\sqrt{\lambda}L = n\pi$. $\sqrt{\lambda}L$ debe ser igual a un múltiplo entero de π , donde n es un entero positivo ya que $\sqrt{\lambda} > 0$ ($n = 0$ tampoco es válido porque habíamos supuesto que $\lambda > 0$ en este caso). Los **autovalores** λ son, por tanto,

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3.20)$$

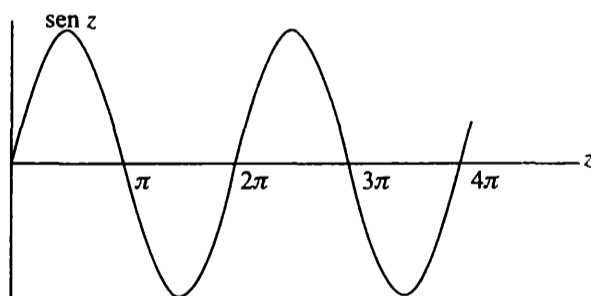


Figura 2.3.1: Ceros de $\sin z$.

La autofunción correspondiente al autovalor $\lambda = (n\pi/L)^2$ es

$$\phi(x) = c_2 \sin \sqrt{\lambda}x = c_2 \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.3.21)$$

donde c_2 es cualquier constante. A menudo escogemos un valor conveniente para c_2 , por ejemplo $c_2 = 1$. Debemos recordar, sin embargo, que una autofunción específica

siempre se puede multiplicar por una constante arbitraria, ya que la EDP y las condiciones de contorno son lineales y homogéneas.

Autovalor ($\lambda = 0$). Determinaremos ahora si $\lambda = 0$ es un autovalor para (2.3.15) con las condiciones de contorno (2.3.16) - (2.3.17). Éste es un caso especial. Si $\lambda = 0$, (2.3.15) implica que

$$\phi = c_1 + c_2x,$$

correspondiendo a la raíz doble $r = 0$ del polinomio característico³. Para determinar si $\lambda = 0$ es un autovalor debemos utilizar las condiciones de contorno. $\phi(0) = 0$ implica que $0 = c_1$, y por tanto $\phi = c_2x$. Además, $\phi(L) = 0$ implica que $0 = c_2L$. Como la longitud L de la varilla es positiva ($\neq 0$), $c_2 = 0$ y por tanto $\phi(x) \equiv 0$. Ésta es la solución trivial, por lo que $\lambda = 0$ *no* es un autovalor para *este* problema [(2.3.15) - (2.3.17)]. Sin embargo, $\lambda = 0$ es un autovalor para otros problemas y se debe estudiar en concreto para cada problema nuevo que encontremos.

Autovalores ($\lambda < 0$). ¿Hay autovalores negativos? Si $\lambda < 0$, la solución de

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi \quad (2.3.22)$$

no es difícil, pero hemos de ser cuidadosos. Las raíces del polinomio característico son $r = \pm\sqrt{-\lambda}$, luego dos soluciones son $e^{\sqrt{-\lambda}x}$ y $e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Si no nos gusta la notación $\sqrt{-\lambda}$ podemos cambiarla por $\sqrt{|\lambda|}$, que es equivalente si $\lambda < 0$. Sin embargo, observemos que $\sqrt{|\lambda|} \neq \sqrt{\lambda}$, ya que $\lambda < 0$. Por conveniencia tomaremos en este caso

$$\lambda = -s.$$

De esta manera, $s > 0$ y la ecuación diferencial (2.3.22) se convierte en

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = s\phi. \quad (2.3.23)$$

Dos soluciones independientes de esta ecuación son $e^{+\sqrt{sx}}$ y $e^{-\sqrt{sx}}$, ya que $s > 0$. La solución general es

$$\phi = c_1e^{\sqrt{sx}} + c_2e^{-\sqrt{sx}}. \quad (2.3.24)$$

Frecuentemente expresaremos estas soluciones en términos de funciones hiperbólicas. Recordemos que las funciones hiperbólicas se definen como

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

³Obsérvese que $\phi = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ *no* es la solución general cuando $\lambda = 0$. Si lo fuera, en el caso $\lambda = 0$ obtendríamos que la solución general es una constante arbitraria. Aunque una constante arbitraria resuelve (2.3.15) cuando $\lambda = 0$, (2.3.15) sigue siendo una ecuación diferencial de segundo orden y su solución general debe ser una combinación lineal de *dos* soluciones independientes. Podemos elegir $\sin \sqrt{\lambda}x / \sqrt{\lambda}$ como segunda solución independiente, puesto que cuando $\lambda \rightarrow 0$ coincide con la solución x . Sin embargo, esto conlleva demasiado trabajo. Es mejor considerar sencillamente $\lambda = 0$ como un caso separado.

es decir, combinaciones lineales de exponenciales. En la Figura 2.3.2 podemos ver la gráfica de estas funciones. Observemos que $\sinh 0 = 0$ y $\cosh 0 = 1$ (resultados análogos a los correspondientes para las funciones trigonométricas). También tenemos las relaciones $d/dz \cosh z = \sinh z$ y $d/dz \sinh z = \cosh z$, bastante similares a las de las funciones trigonométricas pero más fáciles de recordar ya que no aparece ningún signo negativo en las fórmulas de derivación. Si utilizamos funciones hiperbólicas en lugar de exponenciales, la solución general de (2.3.23) se puede escribir como

$$\phi = c_3 \cosh \sqrt{s}x + c_4 \sinh \sqrt{s}x, \quad (2.3.25)$$

que es una forma equivalente a (2.3.24). Para determinar si hay autovalores negativos ($\lambda < 0$, pero $s > 0$ ya que $\lambda = -s$), utilizamos de nuevo las condiciones de contorno. Podemos utilizar las expresiones (2.3.24) o (2.3.25); en cualquier caso se obtiene la misma respuesta. Utilizando (2.3.25), $\phi(0) = 0$ implica que $0 = c_3$, y por tanto $\phi = c_4 \sinh \sqrt{s}x$. La otra condición de contorno, $\phi(L) = 0$, implica que $c_4 \sinh \sqrt{s}L = 0$. Como $\sqrt{s}L > 0$ y el seno hiperbólico no se anula cuando el argumento es positivo (véase la Figura 2.3.2), se sigue que $c_4 = 0$. Por tanto, $\phi(x) \equiv 0$. Es decir, la única solución de (2.3.23) para $\lambda < 0$ que cumple las condiciones de contorno homogéneas es la solución trivial. Por tanto, no hay autovalores negativos. Para este ejemplo, la existencia de autovalores negativos correspondería a un crecimiento exponencial en el tiempo. No esperábamos tales soluciones para este problema físico y aquí hemos demostrado matemáticamente que no puede haber ningún autovalor negativo para este problema. En algunos otros problemas pueden existir autovalores negativos. Más adelante (Sección 5.3) formularemos una teoría, relacionada con el cociente de Rayleigh, por la que sabremos de antemano que muchos problemas no pueden tener autovalores negativos. Esto evitará en algunas ocasiones cálculos como los que acabamos de hacer.

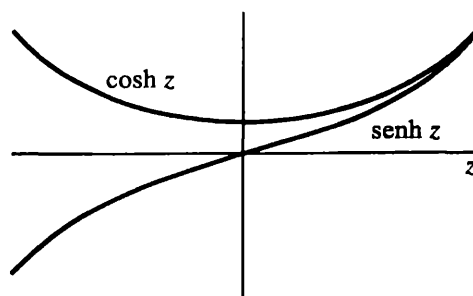


Figura 2.3.2: Funciones hiperbólicas.

Autofunciones: resumen. Resumimos ahora nuestros resultados para el

problema de autovalores obtenido al separar variables:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi &= 0, \\ \phi(0) &= 0, \\ \phi(L) &= 0. \end{aligned}$$

Este problema de contorno aparecerá muchas veces en este libro. Casi es útil memorizar el resultado de que los autovalores λ son todos positivos (no cero ni negativos),

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$

donde n es cualquier entero positivo, $n = 1, 2, 3, \dots$, y las correspondientes autofunciones son

$$\phi(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Si llamamos λ_1 al primer (o menor) autovalor, λ_2 al siguiente y así sucesivamente, tenemos que $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \dots$. Las autofunciones correspondientes se denotan algunas veces por $\phi_n(x)$. En la Figura 2.3.3 se representan las primeras de ellas. Todas las autofunciones son (desde luego) cero en $x = 0$ y $x = L$. Observemos que la función $\phi_1(x) = \text{sen} \pi x/L$ no tiene ceros en $0 < x < L$, y que $\phi_2(x) = \text{sen} 2\pi x/L$ tiene un cero en ese intervalo. De hecho, cada función $\phi_n(x) = \text{sen} n\pi x/L$ tiene $n - 1$ ceros en $0 < x < L$. Comprobaremos más adelante (véase la Sección 5.3) que ésta es una importante propiedad general de las autofunciones.

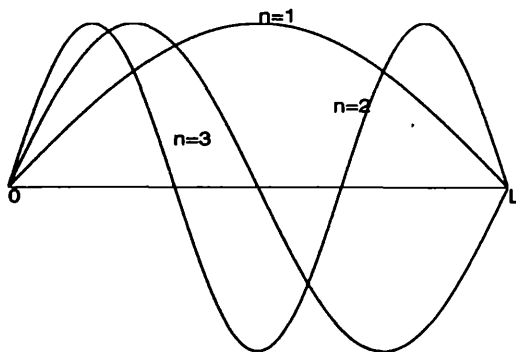


Figura 2.3.3: Autofunciones $\text{sen} n\pi x/L$ y sus ceros.

Analogía con el sistema masa-resorte. Hemos obtenido soluciones de $d^2\phi/dx^2 = -\lambda\phi$. Presentamos ahora la analogía de esta ecuación con un sistema masa-resorte, que muchos lectores pueden encontrar útil. Un sistema masa-resorte

sujeto a la ley de Hooke satisface la ecuación $m d^2y/dt^2 = -ky$, donde $k > 0$ es la constante del resorte. Así, si $\lambda > 0$, la EDO (2.3.15) se puede pensar como un sistema masa-resorte con una fuerza de recuperación. Por tanto, si $\lambda > 0$ la solución debería oscilar. No debería sorprender que las condiciones de contorno (2.3.16) - (2.3.17) se puedan cumplir para $\lambda > 0$; una solución no trivial de la EDO, que es cero en $x = 0$, puede volver a ser cero en $x = L$, ya que existe una fuerza de recuperación y la solución de la EDO oscila. Hemos demostrado que esto puede ocurrir para valores específicos de $\lambda > 0$. Sin embargo, si $\lambda < 0$, entonces la fuerza no es de recuperación y sería menos esperable que una solución que es cero en $x = 0$ pudiera ser cero de nuevo en $x = L$. Sin embargo, no debemos confiar siempre en nuestra intuición, por ello hemos verificado esto matemáticamente.

2.3.5. Soluciones producto y principio de superposición

En resumen, hemos obtenido soluciones producto para la ecuación del calor, $\partial u/\partial t = k \partial^2 u/\partial x^2$, que cumplen las condiciones de contorno $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$ sólo cuando $\lambda > 0$. Estas soluciones, $u(x, t) = \phi(x)G(t)$, tienen $G(t) = ce^{-\lambda kt}$ y $\phi(x) = c_2 \text{sen } \sqrt{\lambda}x$, donde hemos determinado a partir de las condiciones de contorno [$\phi(0) = 0$ y $\phi(L) = 0$] los valores posibles de la constante de separación, $\lambda = (n\pi/L)^2$. Aquí, n es un entero positivo. Por tanto, las soluciones producto de la ecuación del calor son

$$u(x, t) = B \text{sen } \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.3.26)$$

donde B es una constante arbitraria ($B = cc_2$). Ésta es una solución diferente para cada n . Notemos que cuando t crece, las soluciones de este tipo especial decaen exponencialmente, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$. Además, $u(x, t)$ satisface una condición inicial especial, $u(x, 0) = B \text{sen } n\pi x/L$.

Problemas de valor inicial. Podemos utilizar las soluciones producto simples (2.3.26) para satisfacer un problema de valores iniciales si la condición inicial es justamente la adecuada. Por ejemplo, supongamos que queremos resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} \text{EDP :} \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \text{CC :} \quad & u(0, t) = 0, \\ & u(L, t) = 0, \\ \text{CI :} \quad & u(x, 0) = 4 \text{sen } \frac{3\pi x}{L}. \end{aligned}$$

Nuestra solución producto $u(x, t) = B \text{sen } n\pi x/L \cdot e^{-k(n\pi/L)^2 t}$ satisface la condición inicial $u(x, 0) = B \text{sen } n\pi x/L$. Así, tomando $n = 3$ y $B = 4$ cumpliremos la condición

inicial. La solución de este ejemplo es entonces

$$u(x, t) = 4 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} e^{-k(3\pi/L)^2 t}.$$

Se puede probar que este problema físico (al igual que la mayoría de los que consideramos) tiene solución única. Por tanto, no importa el procedimiento utilizado para obtener la solución.

Principio de superposición. Las soluciones producto son muy especiales, ya que se pueden utilizar directamente sólo si la condición inicial tiene una forma apropiada. Sin embargo, deseamos mostrar que estas soluciones son útiles en muchas otras situaciones; de hecho en todas las situaciones. Consideremos la misma EDP y las mismas CC, pero cambiemos la condición inicial por

$$u(x, 0) = 4 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} + 7 \operatorname{sen} \frac{8\pi x}{L}.$$

La solución de este problema se puede obtener sumando dos soluciones de las obtenidas por el método del producto:

$$u(x, t) = 4 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L} e^{-k(3\pi/L)^2 t} + 7 \operatorname{sen} \frac{8\pi x}{L} e^{-k(8\pi/L)^2 t}.$$

Comprobamos inmediatamente que se cumple la condición inicial (sustituyendo $t = 0$) al igual que las condiciones de contorno (sustituyendo $x = 0$ y $x = L$). Con sólo un poco más de trabajo demostramos que se cumple la ecuación en derivadas parciales. Éste es un ejemplo de aplicación del principio de superposición.

Principio de superposición (generalizado). El principio de superposición se puede extender, demostrándose que si $u_1, u_2, u_3, \dots, u_M$ son soluciones de un problema lineal homogéneo, entonces cualquier combinación lineal de ellas $c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \dots + c_M u_M = \sum_{n=1}^M c_n u_n$, donde las c_n , $n = 1, 2, \dots, M$, son constantes arbitrarias, es también una solución. Como por el método de separación de variables sabemos que $\operatorname{sen} n\pi x/L \cdot e^{-k(n\pi/L)^2 t}$ es solución de la ecuación (con condiciones de contorno nulas) para todos los valores enteros positivos de n , cualquier combinación lineal de estas soluciones es también una solución de la ecuación del calor lineal homogénea. Por tanto,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^M B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \quad (2.3.27)$$

resuelve la ecuación del calor con condiciones de contorno cero para cualquier entero positivo M . Hemos sumado soluciones de la ecuación del calor teniendo en cuenta que la "amplitud" B puede ser diferente para cada solución, por eso la hemos sustituido por B_n . La Ecuación (2.3.27) demuestra que podemos resolver la ecuación del calor si inicialmente

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^M B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.3.28)$$

esto es, si la condición inicial es igual a una suma finita de unas funciones seno apropiadas. ¿Qué deberíamos hacer en la situación usual en que $f(x)$ no es una combinación lineal de ese tipo de funciones seno? En realidad, la teoría de series de Fourier (que describiremos con bastante detalle en el Capítulo 3) establece que

1. Toda función $f(x)$ (con ciertas restricciones muy razonables que discutiremos más adelante) se puede aproximar (en cierto sentido) por una combinación lineal finita de las funciones $\text{sen } n\pi x/L$, donde $n = 1, 2, \dots$
2. La aproximación puede no ser muy buena si M es pequeño, pero es cada vez mejor según M aumenta (véase la Sección 5.10).
3. Más aún, si consideramos el límite cuando $M \rightarrow \infty$, entonces no sólo es (2.3.28) la mejor aproximación a $f(x)$ que utiliza combinaciones de autofunciones, sino que (de nuevo en cierto sentido) la serie infinita resultante converge a $f(x)$ (con algunas restricciones sobre $f(x)$ que discutiremos).

Por tanto, tenemos (y lo precisaremos en el Capítulo 3) que “cualquier” condición inicial $f(x)$ se puede escribir como una combinación lineal infinita de funciones $\text{sen } n\pi x/L$, algo que se conoce como **serie de Fourier**:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.3.29)$$

Lo que es más importante es que también la correspondiente serie infinita es la solución de nuestro problema de conducción del calor:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}. \quad (2.3.30)$$

Analizar series infinitas como (2.3.29) y (2.3.30) no es fácil. Debemos estudiar la convergencia de estas series al igual que discutir la validez de una solución en serie infinita para nuestro problema completo. Por el momento, ignoraremos estos aspectos algo teóricos y nos concentraremos en la construcción de estas soluciones en forma de series infinitas.

2.3.6. Ortogonalidad de las funciones seno

Hemos olvidado un detalle importante. La expresión (2.3.30) es nuestra solución cuando los coeficientes B_n satisfacen (2.3.29) (para cumplir la condición inicial), pero ¿cómo determinamos los coeficientes B_n ? Suponemos que es posible que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.3.31)$$

que debe ser cierto para $0 \leq x \leq L$. Supondremos que las operaciones matemáticas habituales son también válidas para series infinitas. La Ecuación (2.3.31) tiene una cantidad infinita de incógnitas, pero es válida para todos los valores de x . Si sustituimos mil valores diferentes de x en (2.3.31), cada uno nos dará una ecuación válida, pero todavía tendríamos infinitas incógnitas. Ésta no es una manera eficiente de calcular los B_n . En lugar de esto utilizaremos frecuentemente una técnica muy importante basada en la observación (por ejemplo usando una tabla de integrales) de que las autofunciones $\text{sen } n\pi x/L$ satisfacen la siguiente propiedad integral:

$$\int_0^L \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ L/2 & m = n, \end{cases} \quad (2.3.32)$$

donde m y n son enteros positivos.

Para utilizar estas propiedades en el cálculo de las B_n multiplicamos ambos lados de (2.3.31) por $\text{sen } m\pi x/L$ (para algún entero fijo m , independiente del índice "mudo" n):

$$f(x) \text{sen } \frac{m\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{m\pi x}{L}. \quad (2.3.33)$$

A continuación integramos (2.3.33) desde $x = 0$ hasta $x = L$:

$$\int_0^L f(x) \text{sen } \frac{m\pi x}{L} dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{m\pi x}{L} dx. \quad (2.3.34)$$

Para una suma finita, la integral de la suma es igual a la suma de las integrales. Supondremos que esto es válido para esta serie infinita. Ahora evaluamos la suma infinita de integrales. Por la propiedad (2.3.32), sabemos que los términos de la suma son cero si $n \neq m$. Al hacer la suma en n , en algún momento n es igual a m . Es sólo para este valor $n = m$, que hay una contribución distinta de cero a la suma infinita. Esto es, el único término que aparece en el lado derecho de (2.3.34) es el que obtenemos al sustituir n por m :

$$\int_0^L f(x) \text{sen } \frac{m\pi x}{L} dx = B_m \int_0^L \text{sen}^2 \frac{m\pi x}{L} dx.$$

Como la integral de la derecha es igual a $L/2$, podemos despejar B_m :

$$B_m = \frac{\int_0^L f(x) \text{sen } \frac{m\pi x}{L} dx}{\int_0^L \text{sen}^2 \frac{m\pi x}{L} dx} = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen } \frac{m\pi x}{L} dx. \quad (2.3.35)$$

Este resultado es muy importante, al igual que el método por el que lo hemos obtenido, y conviene aprender ambos. La integral de (2.3.35) se considera conocida

ya que $f(x)$ es la condición inicial dada. A menudo esa integral no se puede evaluar, en cuyo caso puede necesitarse integración numérica (en un ordenador) para obtener números explícitos para las B_m , $m = 1, 2, 3, \dots$

La Fórmula (2.3.32), $\int_0^L \sin^2 n\pi x/L dx = L/2$, es muy útil en muchas circunstancias, incluso en aplicaciones que no tienen nada que ver con el material de este texto. Una razón para esta utilidad es que existen muchos fenómenos periódicos en la naturaleza que responden a la función $\sin \omega t$, y normalmente la energía es proporcional a su cuadrado, $\sin^2 \omega t$. La energía media es entonces proporcional a $\int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt$ dividida por el periodo $2\pi/\omega$. Merece la pena memorizar que las medias sobre el periodo completo de los cuadrados de las funciones seno y coseno valen $\frac{1}{2}$. Así, *la integral sobre cualquier cantidad de periodos completos del cuadrado del seno o del coseno es la mitad de la longitud del intervalo*. De esta manera $\int_0^L \sin^2 n\pi x/L dx = L/2$, ya que el intervalo de 0 a L es o bien un múltiplo de un periodo completo o un periodo de $\sin^2 n\pi x/L$.

Ortogonalidad. Diremos que las funciones $A(x)$ y $B(x)$ son **ortogonales** en el intervalo $0 \leq x \leq L$ si $\int_0^L A(x)B(x) dx = 0$. Utilizamos el término “ortogonal”, que se suele utilizar refiriéndose a vectores perpendiculares, porque la expresión $\int_0^L A(x)B(x) dx = 0$ es análoga a un producto escalar nulo, tal como explicaremos más en profundidad en el apéndice de esta sección. Un conjunto de funciones en el que cada función es ortogonal a cualquier *otro* miembro del mismo se llama **conjunto ortogonal de funciones**. Un ejemplo es el de las funciones $\sin n\pi x/L$, las autofunciones del problema de contorno

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi = 0 \quad \text{con} \quad \phi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \phi(L) = 0,$$

que son mutuamente ortogonales por (2.3.32). Por eso llamamos a (2.3.32) condición de ortogonalidad.

De hecho, descubriremos que para la mayoría de los problemas de contorno, las autofunciones forman un conjunto ortogonal de funciones (con algunas modificaciones, que discutiremos en el Capítulo 5, relativas a los problemas de autovalores de Sturm-Liouville).

2.3.7. Formulación, resolución e interpretación de un ejemplo

Como ejemplo, analicemos nuestra solución en el caso en que la temperatura inicial es constante, $100^\circ C$. Esto corresponde a un problema físico que es fácil de reproducir en el laboratorio. Tomamos una varilla unidimensional y la situamos en un gran tubo de agua hirviendo ($100^\circ C$). La tenemos allí un largo periodo de tiempo. Después de un tiempo suficiente esperamos que la varilla esté toda ella a $100^\circ C$. Ahora aislamos la superficie lateral (si es que no lo habíamos hecho antes) y rápidamente (en el instante $t = 0$) sumergimos los dos extremos en grandes depósitos bien agitados de agua helada, $0^\circ C$. El problema matemático es

$$\text{EDP : } \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad (2.3.36)$$

$$\text{CC : } \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0, \end{aligned} \quad t > 0, \quad (2.3.37)$$

$$\text{CI : } u(x, 0) = 100, \quad 0 < x < L. \quad (2.3.38)$$

De acuerdo con (2.3.30) y (2.3.35), la solución es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad (2.3.39)$$

donde

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (2.3.40)$$

y $f(x) = 100$. Recordemos que los coeficientes B_n se determinaron imponiendo que (2.3.39) cumpliera la condición inicial,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.3.41)$$

Calculemos los coeficientes B_n a partir de (2.3.40):

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L 100 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{200}{L} \left(-\frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \Big|_0^L \\ &= \frac{200}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{400}{n\pi} & n \text{ impar} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

ya que $\cos n\pi = (-1)^n$ es igual a 1 si n es par y es igual a -1 si n es impar. La serie (2.3.41) se estudiará más adelante en el Capítulo 3. En particular, debemos explicar la intrigante situación de que la temperatura inicial es igual a 100 en todas partes, mientras que la serie (2.3.41) vale 0 en $x = 0$ y en $x = L$ (debido a las condiciones de contorno).

Aproximaciones al problema de valor inicial. Hemos obtenido la solución al problema de valor inicial (2.3.36) - (2.3.38) para la ecuación del calor con datos nulos en la frontera ($x = 0$ y $x = L$) y distribución de temperatura inicial igual a 100. La solución es (2.3.39), con los coeficientes B_n dados por (2.3.42). La solución es bastante complicada al tener una serie infinita. ¿Qué podemos decir de ella? En primer lugar, observamos que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$, es decir, la distribución de temperatura tiende al estado estacionario, $u(x, t) = 0$. Físicamente no es sorprendente este hecho, ya que los dos extremos están a 0° ; esperamos que toda la energía térmica contenida en la varilla salga de ella por los extremos. El problema de equilibrio, $d^2u/dx^2 = 0$ con $u(0) = 0$ y $u(L) = 0$, tiene solución única, $u \equiv 0$, que concuerda con el límite cuando t tiende a infinito de la solución del problema dependiente del tiempo.

Una pregunta importante a la que sabemos dar respuesta es la forma en que la solución se acerca al estado estacionario. Si t es grande, ¿cuál es la distribución de temperatura aproximada y en qué se diferencia de la solución del estado estacionario 0° ? Observamos que cada término de (2.3.39) decrece a un ritmo diferente. A más oscilaciones en la variable espacial es mayor el decaimiento. Si t es tal que $kt(\pi/L)^2$ es grande, entonces cada término sucesivo es mucho más pequeño que el primero. Podemos entonces aproximar la serie infinita utilizando sólo el primer término:

$$u(x, t) \approx \frac{400}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} e^{-k(\pi/L)^2 t}. \quad (2.3.43)$$

Cuanto mayor sea t mejor será esta aproximación. De hecho, si $kt(\pi/L)^2 = \frac{1}{2}$ ya se obtiene una buena aproximación, pues

$$\frac{e^{-k(3\pi/L)^2 t}}{e^{-k(\pi/L)^2 t}} = e^{-8(\pi/L)^2 kt} = e^{-4} = 0,018 \dots$$

Vemos que, para estos tiempos, la dependencia espacial de la temperatura es la oscilación de la función $\operatorname{sen} \pi x/L$, tal como se ilustra en la Figura 2.3.4. La amplitud máxima, que se da en el punto medio $x = L/2$, decrece exponencialmente con el tiempo. Si $kt(\pi/L)^2$ es menor que $\frac{1}{2}$, la dependencia espacial no se puede aproximar por una función sinusoidal sencilla; necesitamos más términos de la serie. La solución se puede computar fácilmente utilizando una cantidad finita de términos. En algunos casos pueden ser necesarios muchos términos de la serie, por lo que sería conveniente encontrar mejores formas de calcular $u(x, t)$.

2.3.8. Resumen

Resumamos el método de separación de variables para este ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{EDP :} & \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \text{CC :} & \quad \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0, \end{aligned} \\ \text{CI :} & \quad u(x, 0) = f(x). \end{aligned}$$

1. Nos aseguramos de que tenemos una EDP lineal y homogénea con CC lineales y homogéneas.
2. Temporalmente ignoramos la CI no nula.
3. Separamos variables (determinamos las ecuaciones diferenciales que aparecen al suponer soluciones producto) e introducimos una constante de separación.
4. Calculamos las posibles constantes de separación como los autovalores de un problema de contorno.

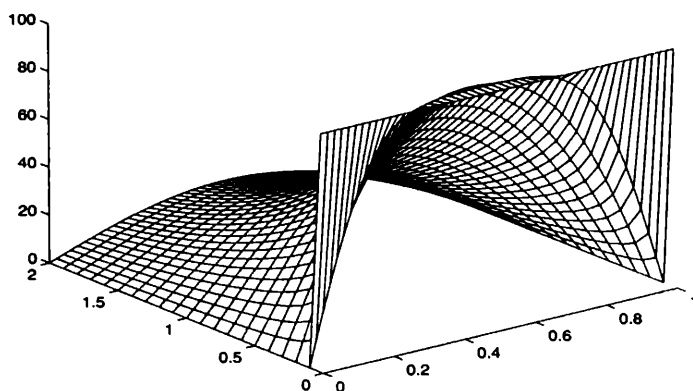


Figura 2.3.4: Dependencia temporal de la temperatura $u(x, t)$.

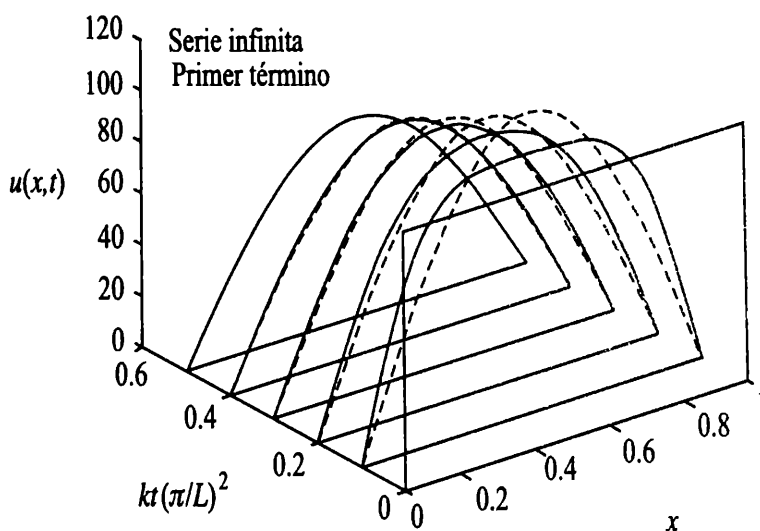


Figura 2.3.5: Dependencia temporal de la temperatura (usando la serie infinita) comparada con el primer término. Nótese que el primer término es una buena aproximación si el tiempo no es demasiado pequeño.

5. Resolvemos la otra ecuación diferencial. Construimos todas las soluciones producto de la EDP que se obtienen por este método.
6. Aplicamos el principio de superposición, obteniendo una combinación lineal de todas las soluciones producto.
7. Imponemos que se satisfaga la condición inicial.
8. Determinamos los coeficientes utilizando la ortogonalidad de las autofunciones.

Estos pasos se deben *comprender*, no memorizar. Es importante observar que

1. El principio de superposición se aplica a soluciones de la EDP (no se pueden sumar soluciones de distintas ecuaciones diferenciales ordinarias).

2. No se impone la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ hasta *después* de utilizar el principio de superposición.

EJERCICIOS 2.3

- 2.3.1. En las siguientes ecuaciones en derivadas parciales, ¿qué ecuaciones diferenciales ordinarias aparecen al aplicar el método de separación de variables?

$$* (a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$* (c) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$(d) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$* (e) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

$$* (f) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 2.3.2. Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi = 0.$$

Determinar los autovalores λ (y las correspondientes autofunciones), si ϕ satisface las siguientes condiciones de contorno. Estudiar tres casos: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$. Se puede suponer que los autovalores son reales.

- (a) $\phi(0) = 0$ y $\phi(\pi) = 0$
 *(b) $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 0$
 (c) $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(L) = 0$ (si es necesario, véase la Sección 2.4.1)
 *(d) $\phi(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(L) = 0$
 (e) $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ y $\phi(L) = 0$
 *(f) $\phi(a) = 0$ y $\phi(b) = 0$ (se puede asumir que $\lambda > 0$)
 (g) $\phi(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(L) + \phi(L) = 0$ (si es necesario, véase la Sección 5.8)

- 2.3.3. Consideremos la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

sujeta a las condiciones de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(L, t) = 0.$$

Resolver el problema de valor inicial si la temperatura es inicialmente

(a) $u(x, 0) = 6 \operatorname{sen} \frac{9\pi x}{L}$ (b) $u(x, 0) = 3 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} - \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L}$

* (c) $u(x, 0) = 2 \cos \frac{3\pi x}{L}$ (d) $u(x, 0) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq L/2 \\ 2 & L/2 < x < L \end{cases}$

La respuesta del apartado (c) puede involucrar algunas integrales que no es necesario evaluar.

2.3.4. Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con las condiciones $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$, y $u(x, 0) = f(x)$.

* (a) ¿Cuál es la energía térmica total de la varilla como función del tiempo?

(b) ¿Cuál es el flujo de energía térmica que sale de la varilla en $x = 0$?, ¿y en $x = L$?

* (c) ¿Qué relación existe entre los apartados (a) y (b)?

2.3.5. Evaluar (atención al caso $n = m$)

$$\int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx \quad \text{para } n > 0, m > 0.$$

Utilizar la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)].$$

***2.3.6.** Evaluar

$$\int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \quad \text{para } n \geq 0, m \geq 0.$$

Utilizar la identidad trigonométrica

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)].$$

Préstese especial atención a los casos $a - b = 0$ y $a + b = 0$.

2.3.7. Consideremos el siguiente problema de contorno (si es necesario, véase la Sección 2.4.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{con} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \text{y} \quad u(x, 0) = f(x).$$

(a) Dar una interpretación física, en una sola frase, para este problema.

- (b) Resolver por el método de separación de variables. Demostrar en primer lugar que no hay soluciones producto que crezcan exponencialmente con el tiempo. *Indicación:* la solución es

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n kt} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

¿Cuánto vale λ_n ?

- (c) Demostrar que la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se cumple si

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

- (d) Utilizando el Ejercicio 2.3.6, calcular A_0 y $A_n (n \geq 1)$.
 (e) ¿Cómo es la distribución de temperaturas cuando $t \rightarrow \infty$? Demostrar que ésta es la distribución de temperaturas en equilibrio (véase la Sección 1.4).

***2.3.8.** Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha u,$$

que corresponde a una varilla unidimensional con pérdida de calor a través de la superficie lateral y temperatura exterior 0° ($\alpha > 0$, véase el Ejercicio 1.2.4), o con superficie lateral aislada y una fuente de calor proporcional a la temperatura. Supongamos que las condiciones de contorno son

$$u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(L, t) = 0.$$

- (a) ¿Cuáles son las posibles distribuciones de temperaturas en equilibrio si $\alpha > 0$?
 (b) Resolver el problema dependiente del tiempo [$u(x, 0) = f(x)$] para $\alpha > 0$. Analizar la temperatura para tiempos grandes ($t \rightarrow \infty$) y comparar con el apartado (a).

***2.3.9.** Rehacer el Ejercicio 2.3.8 para $\alpha < 0$. Préstese especial cuidado al caso $-\alpha/k = (n\pi/L)^2$.

2.3.10. Para vectores de dimensiones dos y tres, la propiedad fundamental del producto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta$, implica que

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}||\mathbf{B}|. \quad (2.3.44)$$

En este ejercicio generalizamos esto a vectores n -dimensionales y a funciones, en cuyo caso (2.3.44) se conoce como **desigualdad de Schwarz**, aunque los nombres de Cauchy y Buniakovsky también se asocian con esta desigualdad.

- (a) Demuéstrese que $|\mathbf{A} - \gamma \mathbf{B}|^2 > 0$ implica (2.3.44), donde $\gamma = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$.
 (b) Expresar la desigualdad utilizando

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \frac{b_n}{c_n}.$$

- *(c) Generalizar (2.3.44) a funciones. *Indicación:* el producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ significa $\int_0^L A(x)B(x) dx$.

2.3.11. Resolver la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

dentro de un rectángulo, con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0, y) &= g(y), & u(x, 0) &= 0, \\ u(L, y) &= 0, & u(x, H) &= 0. \end{aligned}$$

Indicación: consúltese si es necesario la Sección 2.5.1.

Apéndice de la Sección 2.3: ortogonalidad de funciones

Dos vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} son ortogonales si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$. En términos de sus componentes, sean $\mathbf{A} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ y $\mathbf{B} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$; \mathbf{A} y \mathbf{B} son ortogonales si $\sum_i a_i b_i = 0$. Podemos pensar en una función $A(x)$ como un vector. Si sólo tres valores de x son importantes, x_1 , x_2 , y x_3 , entonces las componentes de la función $A(x)$ (viéndola como un vector) son $A(x_1) \equiv a_1$, $A(x_2) \equiv a_2$, y $A(x_3) \equiv a_3$. La función $A(x)$ es ortogonal a la función $B(x)$ (por definición) si $\sum_i a_i b_i = 0$. Sin embargo, en nuestros problemas, todos los valores de x entre 0 y L son importantes. *La función $A(x)$ se puede pensar como un vector de dimensión infinita*, cuyas componentes son $A(x_i)$ para todos los x_i de algún intervalo. De esta manera, la función $A(x)$ se diría que es ortogonal a $B(x)$ si $\sum_i A(x_i)B(x_i) = 0$, donde la suma tendría que incluir todos los puntos entre 0 y L . Es, por tanto, natural *definir* que la función $A(x)$ es ortogonal a $B(x)$ si $\int_0^L A(x)B(x) dx = 0$. La integral sustituye al producto escalar: ambos son ejemplos de "productos internos".

En el espacio tridimensional tenemos tres vectores unitarios mutuamente perpendiculares (ortogonales): \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} , que forman la base canónica. En términos de las componentes tenemos

$$\mathbf{A} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}.$$

a_1 es la proyección de \mathbf{A} en la dirección del vector \hat{i} y así sucesivamente. Algunas veces queremos representar \mathbf{A} en términos de otros vectores mutuamente ortogonales (no necesariamente unitarios) \mathbf{u} , \mathbf{v} , y \mathbf{w} , que forman lo que llamamos un *conjunto ortogonal de vectores*. Entonces

$$\mathbf{A} = \alpha_u \mathbf{u} + \alpha_v \mathbf{v} + \alpha_w \mathbf{w}.$$

Para determinar las coordenadas α_u , α_v , α_w respecto a este conjunto ortogonal, \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} podemos calcular algunos productos escalares. Por ejemplo,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \alpha_u \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \alpha_v \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \alpha_w \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}.$$

Observemos que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ y $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$, ya que estos vectores son mutuamente ortogonales. Así, podemos fácilmente calcular la coordenada α_u de \mathbf{A} en la dirección \mathbf{u} ,

$$\alpha_u = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \quad (2.3.45)$$

($\alpha_u \mathbf{u}$ es el vector proyección de \mathbf{A} en la dirección \mathbf{u}).

Para las funciones podemos actuar de forma similar. Si $f(x)$ se puede representar por una combinación lineal de un conjunto ortogonal, $\text{sen } n\pi x/L$, entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L},$$

donde los B_n se pueden interpretar como las coordenadas de $f(x)$ con respecto a la "dirección" (o vector de la base) $\text{sen } n\pi x/L$. Para determinar esas coordenadas calculamos el producto interno con una función (vector) arbitraria de la base $\text{sen } n\pi x/L$, donde el producto interno se define como la integral de su producto. De esta forma, igual que antes,

$$\int_0^L f(x) \text{sen } \frac{m\pi x}{L} dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^L \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{m\pi x}{L} dx.$$

Usando la ortogonalidad de las funciones $\text{sen } n\pi x/L$ [véase (2.3.32) para $n \neq m$], la coordenada (o el coeficiente) B_n es:

$$B_n = \frac{\int_0^L f(x) \text{sen } n\pi x/L dx}{\int_0^L \text{sen}^2 n\pi x/L dx}. \quad (2.3.46)$$

Compárese la fórmula (2.3.46) con la fórmula de proyección (2.3.45). Usando de nuevo (2.3.32), ahora para $n = m$, (2.3.46) se convierte en

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (2.3.47)$$

Las dos fórmulas (2.3.45) y (2.3.46) se han obtenido dividiendo por algo. En (2.3.45) dividimos por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, el cuadrado de la longitud del vector \mathbf{u} . Por eso podemos pensar en $\int_0^L \text{sen}^2 n\pi x/L dx$ como el cuadrado de la longitud de $\text{sen } n\pi x/L$ (aunque aquí el término longitud no significa más que la raíz cuadrada de esa integral). De esta manera, el cuadrado de la longitud de la función $\text{sen } n\pi x/L$ es $L/2$, lo cual explica el término $2/L$ en (2.3.47).

2.4. Diversos problemas de contorno para la ecuación del calor

2.4.1. Conducción del calor en una varilla con extremos aislados

Calculemos en detalle e interpretemos la solución del siguiente problema definido para $0 \leq x \leq L$ y $t \geq 0$:

$$\text{EDP : } \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \quad (2.4.1)$$

$$\text{CC1 : } \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0,} \quad (2.4.2)$$

$$\text{CC2 : } \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0,} \quad (2.4.3)$$

$$\text{CI : } \boxed{u(x, 0) = f(x).} \quad (2.4.4)$$

Recordemos que éste es un problema de conducción del calor en una varilla unidimensional con coeficientes térmicos constantes y sin fuentes. Este problema es bastante similar al problema tratado en la Sección 2.3, con la única diferencia de las condiciones de contorno. Aquí los extremos están aislados, mientras que en la Sección 2.3 los extremos tenían 0° de temperatura fija prescrita. Tanto la ecuación en derivadas parciales como las condiciones de contorno son lineales y homogéneas. Consecuentemente, aplicamos el método de separación de variables. Podemos seguir el procedimiento general descrito en la Sección 2.3.8. Si suponemos que hay soluciones producto,

$$u(x, t) = \phi(x)G(t), \quad (2.4.5)$$

la EDP implica como antes

$$\frac{dG}{dt} = -\lambda kG, \quad (2.4.6)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi, \quad (2.4.7)$$

donde λ es la constante de separación. De nuevo,

$$G(t) = ce^{-\lambda kt}. \quad (2.4.8)$$

Las condiciones de frontera aislada, (2.4.2) - (2.4.3) implican que las soluciones producto deben satisfacer $d\phi/dx(0) = 0$ y $d\phi/dx(L) = 0$. La constante de separación λ se determina encontrando aquellos valores para los que existen soluciones no triviales del siguiente problema de contorno:

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi,} \quad (2.4.9)$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{dx}(0) = 0,} \quad (2.4.10)$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{dx}(L) = 0.} \quad (2.4.11)$$

Aunque la ecuación diferencial ordinaria del problema de contorno es la misma que se analizó previamente, las condiciones de contorno son diferentes. Debemos repetir parte del análisis. De nuevo se deben discutir tres casos: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$ (porque supondremos que los autovalores son reales).

Para $\lambda > 0$, la solución general de (2.4.9) es de nuevo

$$\phi = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sen \sqrt{\lambda}x. \quad (2.4.12)$$

Necesitamos calcular $d\phi/dx$ para imponer las condiciones de contorno:

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{\lambda} \left(-c_1 \sen \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x \right). \quad (2.4.13)$$

La condición de contorno $d\phi/dx(0) = 0$ implica que $0 = c_2\sqrt{\lambda}$, y por tanto $c_2 = 0$, ya que $\lambda > 0$. Entonces, $\phi = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x$ y $d\phi/dx = -c_1\sqrt{\lambda} \sen \sqrt{\lambda}x$. Los autovalores λ y sus correspondientes autofunciones se determinan a partir de la condición de contorno que nos queda, $d\phi/dx(L) = 0$:

$$0 = -c_1\sqrt{\lambda} \sen \sqrt{\lambda}L.$$

Como antes, para obtener soluciones no triviales, $c_1 \neq 0$, y por tanto $\sen \sqrt{\lambda}L = 0$. Los autovalores obtenidos en el caso de $\lambda > 0$ son los mismos que en el problema anterior, $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, es decir,

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.14)$$

pero las autofunciones correspondientes son cosenos (no senos),

$$\phi(x) = c_1 \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.15)$$

Las soluciones producto resultantes de la EDP son

$$u(x, t) = A \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.4.16)$$

donde A es una constante multiplicativa arbitraria.

Antes de aplicar el principio de superposición debemos ver si hay algún otro autovalor. Si $\lambda = 0$, entonces

$$\phi = c_1 + c_2 x, \quad (2.4.17)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. La derivada de ϕ es

$$\frac{d\phi}{dx} = c_2.$$

Las dos condiciones de contorno, $d\phi/dx(0) = 0$ y $d\phi/dx(L) = 0$, dan la misma condición, $c_2 = 0$. Por tanto, existen soluciones no triviales del problema de contorno para $\lambda = 0$, las funciones $\phi(x)$ iguales a cualquier constante.

$$\phi(x) = c_1. \quad (2.4.18)$$

La parte dependiente del tiempo es también una constante en este caso, ya que $e^{-\lambda kt}$ para $\lambda = 0$ vale 1. Luego otra solución producto de la EDP y de las CC es $u(x, t) = A$, donde A es cualquier constante.

No esperamos encontrar autovalores $\lambda < 0$, ya que en ese caso la parte dependiente del tiempo crece exponencialmente. Además, no parece probable que podamos encontrar una combinación lineal no trivial de exponenciales que tenga pendiente cero a la vez en $x = 0$ y en $x = L$. En el Ejercicio 2.4.4 se pide demostrar que no hay autovalores $\lambda < 0$.

Antes de imponer la condición inicial utilizamos el principio de superposición. Deberíamos tomar una combinación lineal de *todas* las soluciones producto de la EDP (no solamente las que corresponden a $\lambda > 0$). Entonces,

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}. \quad (2.4.19)$$

Es interesante notar que esto es equivalente a

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}. \quad (2.4.20)$$

ya que $\cos 0 = 1$ y $e^0 = 1$. De hecho, (2.4.20) es a menudo más fácil de utilizar en la práctica. Nosotros preferimos la forma (2.4.19) en las primeras etapas del proceso de aprendizaje, ya que muestra más claramente que la solución consiste en términos que provienen de dos casos distintos, $\lambda = 0$ y $\lambda > 0$.

La condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se cumple si

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.4.21)$$

para $0 \leq x \leq L$. La validez de (2.4.21) se demostrará con la teoría de series de Fourier. Notemos que en el problema anterior $f(x)$ estaba representada por una serie de senos. Aquí $f(x)$ consiste en una serie de cosenos y un término constante. Los dos casos son distintos debido a las distintas condiciones de contorno. Para completar la solución necesitamos determinar los coeficientes A_0 y A_n ($n \geq 1$). Afortunadamente conocemos a partir de las tablas de integrales que las funciones $\cos n\pi x/L$ satisfacen la siguiente **relación de ortogonalidad**:

$$\int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{L}{2} & n = m \neq 0 \\ L & n = m = 0 \end{cases} \quad (2.4.22)$$

para n y m enteros no negativos. Observemos que los casos $n = 0$ o $m = 0$ corresponden a la autofunción constante 1. La constante $L/2$ es otra aplicación del resultado de que la media del cuadrado de una función seno o coseno es la mitad de la longitud del intervalo de integración. La constante L de (2.4.22) se obtiene de forma muy sencilla, ya que para $n = m = 0$, (2.4.22) se convierte en $\int_0^L dx = L$. La Ecuación (2.4.22) establece que las **funciones coseno** (incluyendo la función constante) **forman un conjunto ortogonal de funciones**. Podemos utilizar esta idea como lo hicimos antes para determinar los coeficientes. Multiplicando (2.4.21) por $\cos m\pi x/L$ e integrando de 0 a L obtenemos

$$\int_0^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx.$$

Esto es cierto para todo $m = 0, 1, 2, \dots$. El caso $m = 0$ corresponde a integrar (2.4.21) directamente. Utilizando las relaciones de ortogonalidad se sigue que sólo el m -ésimo término de la suma infinita es no nulo,

$$\int_0^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = A_m \int_0^L \cos^2 \frac{m\pi x}{L} dx.$$

La integral $\int_0^L \cos^2 m\pi x/L dx$ tiene dos casos diferentes: $m = 0$ y $m \neq 0$. Despejando

A_m obtenemos

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad (2.4.23)$$

$$(m \geq 1) \quad A_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx. \quad (2.4.24)$$

El que haya dos fórmulas es algo molesto en esta serie de senos y cosenos. Esto está causado simplemente por los factores $L/2$ y L en (2.4.22).

Existe una diferencia significativa entre las soluciones de la EDP para $\lambda > 0$ y la solución para $\lambda = 0$. Todas las soluciones para $\lambda > 0$ decaen exponencialmente con el tiempo, mientras que la solución para $\lambda = 0$ permanece constante con el tiempo. Por tanto, a medida que t tiende a infinito, la solución (complicada) en serie infinita (2.4.19) se aproxima al estado estacionario,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

No solamente es constante la temperatura de equilibrio A_0 , sino que esa constante es la media de la distribución inicial de temperaturas. Esto concuerda con la información obtenida previamente. Recordemos de la Sección 1.4 que la distribución de temperaturas en el equilibrio para el problema con fronteras aisladas no es única. Cualquier temperatura constante es una solución de equilibrio, pero utilizando la conservación de la energía térmica total sabemos que esa constante debe ser la media de la temperatura inicial.

2.4.2. Conducción del calor en un anillo delgado

Hemos estudiado un problema de flujo de calor cuyas autofunciones son senos y otro cuyas autofunciones son cosenos. En esta subsección mostraremos un problema de flujo de calor cuyas autofunciones son senos y cosenos.

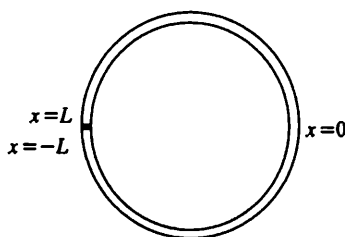


Figura 2.4.1: Anillo delgado.

Formulemos cuál es el problema de contorno y de valor inicial si un alambre delgado (con superficie lateral aislada) se curva formando una circunferencia, como

se ilustra en la Figura 2.4.1. Por razones que por ahora no explicamos tomaremos un alambre de longitud $2L$ (en lugar de L , como en los dos problemas previos de conducción del calor). Como la circunferencia mide $2\pi r$, el radio es $r = 2L/2\pi = L/\pi$. Si el alambre es suficientemente delgado es razonable suponer que la temperatura del mismo es constante en cada sección transversal. En esta situación se debería cumplir sobre el alambre una ecuación del calor unidimensional, donde la distancia es en realidad la longitud de arco x a lo largo del alambre:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.4.25)$$

Hemos supuesto que el alambre tiene coeficientes térmicos constantes y que no hay fuentes. Es conveniente en este problema medir la longitud de arco x de tal manera que x varíe desde $-L$ hasta $+L$ (en lugar de los límites más usuales, 0 y $2L$).

Supongamos que los dos extremos del alambre ($x = -L$ y $x = +L$) están conectados entre sí, de manera que se tienen condiciones de contacto térmico perfecto (véase el Ejercicio 1.3.2). La temperatura $u(x, t)$ es continua en el punto de unión, por lo que

$$u(-L, t) = u(L, t). \quad (2.4.26)$$

Puesto que el flujo de calor es a su vez continuo en ese punto (y la conductividad térmica es constante), la derivada de la temperatura debe ser también continua:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t). \quad (2.4.27)$$

Las dos condiciones de contorno para la ecuación en derivadas parciales son (2.4.26) y (2.4.27). La condición inicial es que la temperatura es una función dada de la posición a lo largo del alambre.

$$u(x, 0) = f(x). \quad (2.4.28)$$

El problema matemático consiste en la EDP lineal y homogénea (2.4.25) con las CC lineales y homogéneas (2.4.26) y (2.4.27). Como tal, procederemos de la manera usual a aplicar el método de separación de variables. Las soluciones producto $u(x, t) = \phi(x)G(t)$ para la ecuación del calor se han obtenido previamente, donde $G(t) = ce^{-\lambda kt}$. El problema de contorno correspondiente es

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\lambda \phi, \quad (2.4.29)$$

$$\phi(-L) = \phi(L), \quad (2.4.30)$$

$$\frac{d\phi}{dx}(-L) = \frac{d\phi}{dx}(L). \quad (2.4.31)$$

Las condiciones de contorno (2.4.30) y (2.4.31) involucran a ambos extremos (algunas veces se llaman de tipo **mixto**). Las condiciones de contorno específicas (2.4.30) - (2.4.31) se denominan **condiciones de contorno periódicas**, ya que aunque se puede pensar que físicamente el problema está definido sólo para $-L < x < L$, a menudo se considera definido de forma periódica para todo x ; la temperatura será una función periódica ($x = x_0$ es el mismo punto físico que $x = x_0 + 2L$, y por tanto debe tener la misma temperatura).

Si $\lambda > 0$, la solución general de (2.4.29) es de nuevo

$$\phi = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sen \sqrt{\lambda}x.$$

La condición de contorno $\phi(-L) = \phi(L)$ implica que

$$c_1 \cos \sqrt{\lambda}(-L) + c_2 \sen \sqrt{\lambda}(-L) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}L + c_2 \sen \sqrt{\lambda}L.$$

Como el coseno es una función par, $\cos \sqrt{\lambda}(-L) = \cos \sqrt{\lambda}L$, y como el seno es una función impar, $\sen \sqrt{\lambda}(-L) = -\sen \sqrt{\lambda}L$, luego $\phi(-L) = \phi(L)$ se cumple sólo si

$$c_2 \sen \sqrt{\lambda}L = 0. \quad (2.4.32)$$

Antes de resolver (2.4.32), analicemos la segunda condición de contorno, que involucra a la derivada,

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{\lambda} \left(-c_1 \sen \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x \right).$$

Entonces, $d\phi/dx(-L) = d\phi/dx(L)$ se cumple sólo si

$$c_1 \sqrt{\lambda} \sen \sqrt{\lambda}L = 0, \quad (2.4.33)$$

donde hemos utilizado de nuevo que los cosenos son pares y los senos impares. Las condiciones (2.4.32) y (2.4.33) se resuelven fácilmente. Si $\sen \sqrt{\lambda}L \neq 0$, entonces $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, que es justamente la solución trivial. Por tanto, para las soluciones no triviales, tenemos

$$\sen \sqrt{\lambda}L = 0,$$

ecuación que nos determina los autovalores λ . Encontramos (como antes) que $\sqrt{\lambda}L = n\pi$, o equivalentemente que

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.34)$$

Hemos elegido que el alambre tenga longitud $2L$ para que los autovalores tengan la misma fórmula que antes (esto significa que hay menos que recordar, ya que todos nuestros problemas tienen respuesta similar). Sin embargo, en este problema (a diferencia de los otros) no hay más condiciones que deban cumplir c_1 y c_2 . Ambas son arbitrarias. Por eso decimos que $\cos n\pi x/L$ y $\sin n\pi x/L$ son ambas autofunciones correspondientes al autovalor $\lambda = (n\pi/L)^2$,

$$\phi(x) = \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.35)$$

De hecho, cualquier combinación lineal de $\cos n\pi x/L$ y $\sin n\pi x/L$ es una autofunción,

$$\phi(x) = c_1 \cos \frac{n\pi x}{L} + c_2 \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.4.36)$$

pero se debe entender siempre que esto significa que ambas funciones son autofunciones. Existen entonces dos familias infinitas de soluciones producto de la ecuación en derivadas parciales: para $n = 1, 2, 3, \dots$, tenemos

$$u(x, t) = \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt} \quad \text{y} \quad u(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}. \quad (2.4.37)$$

Todas ellas corresponden a $\lambda > 0$.

Si $\lambda = 0$, la solución general de (2.4.29) es

$$\phi = c_1 + c_2 x.$$

La condición de contorno $\phi(-L) = \phi(L)$ implica que

$$c_1 - c_2 L = c_1 + c_2 L.$$

Luego $c_2 = 0$, $\phi(x) = c_1$ y $d\phi/dx = 0$. La otra condición de contorno, (2.4.30), se cumple de forma automática. Vemos entonces que

$$\phi(x) = c_1,$$

luego cualquier constante es una autofunción correspondiente al autovalor cero. Algunas veces decimos que $\phi(x) = 1$ es la autofunción, ya que es sabido que cualquier múltiplo de una autofunción es siempre una autofunción. Las soluciones producto $u(x, t)$ son también constantes en este caso. Notemos que sólo hay una autofunción independiente correspondiente a $\lambda = 0$, mientras que para cada autovalor positivo de este problema, $\lambda = (n\pi/L)^2$, hay dos autofunciones independientes, $\sin n\pi x/L$ y $\cos n\pi x/L$. Finalmente, como no nos debería sorprender ya, se puede demostrar que no hay autovalores $\lambda < 0$.

El principio de superposición se debe utilizar antes de aplicar la condición inicial. La solución más general que se puede obtener por el método de separación de variables consiste en una combinación lineal arbitraria de todas las soluciones

producto:

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}. \quad (2.4.38)$$

La constante a_0 es la solución producto correspondiente a $\lambda = 0$, mientras que necesitamos dos familias de coeficientes arbitrarios, a_n y b_n , para $\lambda > 0$. La condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se cumple si

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.4.39)$$

Aquí la función $f(x)$ es una combinación lineal de senos y cosenos a la vez (más una constante), a diferencia de los problemas previos, donde se utilizaban o bien senos o bien cosenos (incluyendo el término constante). Otra diferencia crucial es que (2.4.39) debe ser válida para todo el anillo, lo que significa que $-L \leq x \leq L$, mientras que las series de sólo senos o sólo cosenos eran válidas para $0 \leq x \leq L$. La teoría de series de Fourier nos mostrará que (2.4.39) es válida y, lo que es más, que las series anteriores de sólo senos o sólo cosenos son sólo casos especiales de la serie (2.4.39).

Ahora lo que queremos es determinar los coeficientes a_0 , a_n y b_n de (2.4.39). De nuevo las autofunciones forman un conjunto ortogonal ya que las tablas de integrales nos dan las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \\ 2L & n = m = 0 \end{cases} \quad (2.4.40)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \end{cases} \quad (2.4.41)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \quad (2.4.42)$$

donde n y m son enteros arbitrarios (no negativos). La autofunción constante corresponde a los casos $n = 0$ o $m = 0$. Las integrales del cuadrado del seno o del coseno

($n = m$) se calculan de nuevo por la regla de “la mitad de la longitud del intervalo”. La última de estas fórmulas, (2.4.42), es particularmente simple de obtener, ya que el seno es una función impar y el coseno una función par⁴. Notemos que, por ejemplo, $\cos n\pi x/L$ es ortogonal a cualquier otra autofunción [a los senos por (2.4.42), a los cosenos y a la autofunción constante por (2.4.40)].

Los coeficientes se obtienen de la misma manera que antes. Nos ahorramos unos pocos pasos si observamos que (2.4.39) es equivalente a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Si multiplicamos esto por $\cos m\pi x/L$ por un lado y por $\operatorname{sen} m\pi x/L$ por otro e integramos desde $x = -L$ hasta $x = +L$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \begin{Bmatrix} \cos \frac{m\pi x}{L} \\ \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \end{Bmatrix} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \begin{Bmatrix} \cos \frac{m\pi x}{L} \\ \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \end{Bmatrix} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \begin{Bmatrix} \cos \frac{m\pi x}{L} \\ \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \end{Bmatrix} dx. \end{aligned}$$

Si utilizamos (2.4.40) - (2.4.42), encontramos que

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = a_m \int_{-L}^L \cos^2 \frac{m\pi x}{L} dx,$$

$$\int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx = b_m \int_{-L}^L \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi x}{L} dx.$$

Despejando los coeficientes de la forma habitual llegamos

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ (m \geq 1) \quad a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

La solución del problema es (2.4.38), donde los coeficientes están dados por (2.4.43).

⁴El producto de una función par y una impar es una función impar. Por antisimetría la integral de una función impar sobre un intervalo simétrico es cero.

PROBLEMAS DE CONTORNO PARA $\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi$

Condiciones de contorno	$\phi(0) = 0$ $\phi(L) = 0$	$\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ $\frac{d\phi}{dx}(L) = 0$	$\phi(-L) = \phi(L)$ $\frac{d\phi}{dx}(-L) = \frac{d\phi}{dx}(L)$
Autovalores λ_n	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 1, 2, 3, \dots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
Autofunciones	$\text{sen } \frac{n\pi x}{L}$	$\text{cos } \frac{n\pi x}{L}$	$\text{sen } \frac{n\pi x}{L}$ y $\text{cos } \frac{n\pi x}{L}$
Series	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{cos } \frac{n\pi x}{L}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{cos } \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L}$
Coefficientes	$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx$	$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$ $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{cos } \frac{n\pi x}{L} dx$	$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$ $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{cos } \frac{n\pi x}{L} dx$ $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx$

Es importante notar en estos casos que, cuando $\lambda = 0$ es un autovalor, la autofunción correspondiente es una constante (que corresponde a $n = 0$ en $\text{cos } n\pi x/L$).

2.4.3. Resumen de problemas de contorno

En muchos problemas, incluyendo los que hemos estudiado, la ecuación diferencial ordinaria específica de coeficientes constantes,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi,$$

constituye la parte fundamental del problema de contorno. Reunimos en una tabla las fórmulas más relevantes para los autovalores y las autofunciones para las condiciones de contorno típicas que ya hemos estudiado. Será útil entender estos resultados porque se utilizarán a menudo a lo largo de este texto.

EJERCICIOS 2.4

*2.4.1. Resolver la ecuación del calor $\partial u/\partial t = k\partial^2 u/\partial x^2$, $0 < x < L$, $t > 0$, con las condiciones

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

$$(a) \quad u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < L/2 \\ 1 & x > L/2 \end{cases} \quad (b) \quad u(x, 0) = 6 + 4 \cos \frac{3\pi x}{L}$$

$$(c) \quad u(x, 0) = -2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \quad (d) \quad u(x, 0) = -3 \cos \frac{8\pi x}{L}$$

***2.4.2.** Resolver el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{con} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0,$$

$$u(L, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = f(x).$$

Puede suponerse que ninguna solución de la ecuación del calor crece exponencialmente con el tiempo. Será necesario además buscar condiciones de ortogonalidad adecuadas para las autofunciones.

***2.4.3.** Resolver el problema de autovalores

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\lambda \phi,$$

con las condiciones $\phi(0) = \phi(2\pi)$ y $\frac{d\phi}{dx}(0) = \frac{d\phi}{dx}(2\pi)$.

2.4.4. Demostrar explícitamente que no hay autovalores negativos para el problema

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\lambda \phi \quad \text{con} \quad \frac{d\phi}{dx}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\phi}{dx}(L) = 0.$$

2.4.5. Este problema presenta una deducción alternativa de la ecuación del calor para un alambre delgado. La ecuación para un alambre circular de grosor finito es la ecuación del calor bidimensional (en coordenadas polares). Demostrar que ésta se reduce a (2.4.25) si la temperatura no depende de r y el alambre es muy delgado.

2.4.6. Determinar la distribución de temperaturas en el equilibrio para el anillo delgado de la Sección 2.4.2:

- (a) directamente a partir del problema de equilibrio (véase la Sección 1.4);
- (b) calculando el límite cuando $t \rightarrow \infty$ del problema dependiente del tiempo.

2.4.7. Resolver la ecuación de Laplace dentro de un círculo de radio a ,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

con la condición de contorno $u(a, \theta) = f(\theta)$. *Indicación:* si es necesario, véase la Sección 2.5.2.

2.5. Ecuación de Laplace: soluciones y propiedades cualitativas

2.5.1. Ecuación de Laplace en un rectángulo

En esta sección aplicaremos las técnicas aprendidas anteriormente a un tipo diferente de problemas. Consideremos el problema estacionario del calor en un dominio bidimensional. Para concretar, consideremos la temperatura de equilibrio dentro de un rectángulo ($0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$), donde la temperatura en la frontera es una función que depende únicamente de la posición (es decir, es independiente del tiempo). La temperatura de equilibrio $u(x, y)$ cumple la ecuación de Laplace con las siguientes condiciones de contorno:

$$\text{EDP : } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.5.1)$$

$$\text{CC1 : } u(0, y) = g_1(y), \quad (2.5.2)$$

$$\text{CC2 : } u(L, y) = g_2(y), \quad (2.5.3)$$

$$\text{CC3 : } u(x, 0) = f_1(x), \quad (2.5.4)$$

$$\text{CC4 : } u(x, H) = f_2(x), \quad (2.5.5)$$

donde $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g_1(y)$ y $g_2(y)$ son funciones dadas de x e y respectivamente. Aquí, la ecuación en derivadas parciales es lineal y homogénea, pero las condiciones de contorno, aunque lineales, no son homogéneas. No podemos aplicar el método de separación de variables a este problema en su forma actual, porque cuando separamos variables el problema de contorno (que nos determina la constante de separación) debe tener condiciones de contorno homogéneas. En este ejemplo, todas las condiciones de contorno son no homogéneas. Podemos superar esta dificultad observando que el problema es no homogéneo debido a las cuatro condiciones de contorno no homogéneas. La idea subyacente al principio de superposición se puede utilizar a veces para problemas no homogéneos (véase el Ejercicio 2.2.4). Dividimos nuestro problema en cuatro, cada uno con una sola condición no homogénea, y ponemos

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y), \quad (2.5.6)$$

donde cada $u_i(x, y)$ cumple la ecuación de Laplace con una condición de contorno no homogénea y las otras tres condiciones de contorno homogéneas, como se muestra en la Figura 2.5.1. En lugar de resolver directamente u , indicaremos cómo resolver u_1 , u_2 , u_3 y u_4 . ¿Por qué la suma cumple nuestro problema? Comprobemos que la EDP y las cuatro CC se cumplen. Como u_1 , u_2 , u_3 y u_4 cumplen la ecuación de Laplace, que es lineal y homogénea, $u \equiv u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ también cumple esa misma EDP lineal y homogénea, por el principio de superposición. En $x = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ y $u_4 = g_1(y)$. Por tanto, en $x = 0$, $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = g_1(y)$, la condición no homogénea original. De forma similar podemos comprobar que las cuatro condiciones no homogéneas se cumplen.

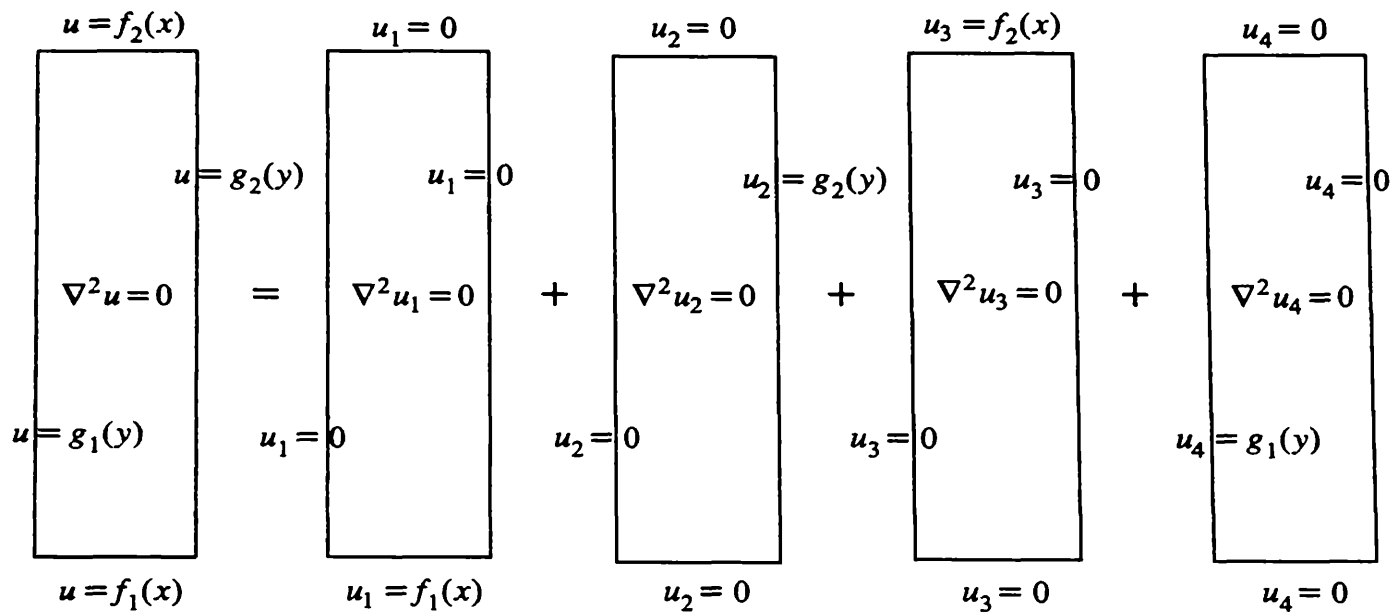


Figura 2.5.1: Ecuación de Laplace en un rectángulo.

El método para calcular cualquiera de las $u_i(x, y)$ es el mismo: sólo cambian ciertos detalles. Sólo calcularemos $u_4(x, y)$ y dejaremos el resto para los ejercicios:

$$\text{EDP : } \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} = 0, \quad (2.5.7)$$

$$\text{CC1 : } u_4(0, y) = g_1(y), \quad (2.5.8)$$

$$\text{CC2 : } u_4(L, y) = 0, \quad (2.5.9)$$

$$\text{CC3 : } u_4(x, 0) = 0, \quad (2.5.10)$$

$$\text{CC4 : } u_4(x, H) = 0. \quad (2.5.11)$$

Proponemos resolver este problema por el método de separación de variables. Comenzamos ignorando la condición no homogénea $u_4(0, y) = g_1(y)$. En su momento sumaremos las soluciones producto obtenidas para obtener $g_1(y)$. Busquemos soluciones producto

$$u_4(x, y) = h(x)\phi(y). \quad (2.5.12)$$

De las tres condiciones de contorno homogéneas obtenemos que

$$h(L) = 0, \quad (2.5.13)$$

$$\phi(0) = 0, \quad (2.5.14)$$

$$\phi(H) = 0. \quad (2.5.15)$$

Luego la solución que depende de y , $\phi(y)$, tiene dos condiciones de contorno homogéneas, mientras que la solución que depende de x , $h(x)$, tiene sólo una. Si sustituimos (2.5.12) en la ecuación de Laplace obtenemos

$$\phi(y) \frac{d^2 h}{dx^2} + h(x) \frac{d^2 \phi}{dy^2} = 0.$$

Se pueden separar las variables dividiendo por $h(x)\phi(y)$, obteniendo

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dy^2}. \quad (2.5.16)$$

El lado izquierdo es sólo función de x mientras que el derecho es sólo función de y . Ambos deben ser iguales a una constante de separación. ¿Queremos usar $-\lambda$ o λ ? Una de ellas es la conveniente. Si la constante de separación es negativa (como lo era antes), (2.5.16) implica que $h(x)$ oscila y que $\phi(y)$ está compuesta por exponenciales. Esto parece poco adecuado, ya que las condiciones de contorno homogéneas (2.5.13) - (2.5.15) demuestran que la solución que depende de y cumple dos condiciones homogéneas: $\phi(y)$ debe ser cero en $y = 0$ y en $y = H$. No esperamos que funcionen las exponenciales en esta variable. Por otro lado, si la constante de separación es positiva, (2.5.16) implica que $h(x)$ está compuesta por exponenciales mientras que $\phi(y)$ oscila. Esto parece más razonable y por tanto introducimos la constante de separación λ (aunque *no* suponemos que $\lambda \geq 0$):

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dy^2} = \lambda. \quad (2.5.17)$$

Esto nos lleva a dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h}{dx^2} &= \lambda h, \\ \frac{d^2 \phi}{dy^2} &= -\lambda \phi. \end{aligned}$$

El problema dependiente de x *no* es un problema de contorno, ya que no tiene dos condiciones de contorno homogéneas.

$$\boxed{\frac{d^2 h}{dx^2} = \lambda h,} \quad (2.5.18)$$

$$\boxed{h(L) = 0.} \quad (2.5.19)$$

Sin embargo, el problema que depende de y sí que es un problema de contorno y se utilizará para determinar los autovalores λ , (las constantes de separación):

$$\boxed{\frac{d^2 \phi}{dy^2} = -\lambda \phi,} \quad (2.5.20)$$

$$\boxed{\phi(0) = 0,} \quad (2.5.21)$$

$$\boxed{\phi(H) = 0.} \quad (2.5.22)$$

Este problema de contorno es uno que ya ha aparecido antes, pero aquí la longitud del intervalo es H . Todos los autovalores son positivos, $\lambda > 0$. Las autofunciones son claramente senos, ya que $\phi(0) = 0$. Más aún, la condición $\phi(H) = 0$ implica que

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda &= \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 \\ \phi(y) &= \text{sen} \frac{n\pi y}{H} \end{aligned}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5.23)$$

Para obtener soluciones producto debemos resolver (2.5.18) con la condición (2.5.19). Como $\lambda = (n\pi/H)^2$,

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 h. \quad (2.5.24)$$

La solución general es una combinación lineal de exponenciales o una combinación lineal de funciones hiperbólicas. Podemos utilizar la que queramos, pero ninguna resulta particularmente adaptada a la resolución de la condición de contorno homogénea $h(L) = 0$. Podemos obtener nuestra solución más rápidamente si observamos que $\cosh n\pi(x - L)/H$ y $\sinh n\pi(x - L)/H$ son soluciones linealmente

independientes de (2.5.24). La solución general se puede escribir como una combinación lineal de ellas dos:

$$h(x) = a_1 \cosh \frac{n\pi}{H}(x - L) + a_2 \sinh \frac{n\pi}{H}(x - L), \quad (2.5.25)$$

donde ahora debe estar claro que $h(L) = 0$ implica que $a_1 = 0$ (ya que $\cosh 0 = 1$ y $\sinh 0 = 0$). Como podíamos haber imaginado

$$h(x) = a_2 \sinh \frac{n\pi}{H}(x - L). \quad (2.5.26)$$

La razón por la que (2.5.25) es la solución (además del hecho de que resuelve la ecuación diferencial) es que es una simple traslación de la solución más familiar en términos de $\cosh n\pi x/L$ y $\sinh n\pi x/L$. Podemos trasladar soluciones de ecuaciones diferenciales sólo si la ecuación diferencial no cambia (es decir, es *invariante*) por traslaciones. Como (2.5.24) tiene coeficientes constantes, situar el origen en $x = L$, (haciendo $x' = x - L$) no afecta a la ecuación diferencial, ya que $d^2h/dx'^2 = (n\pi/H)^2 h$ según la regla de la cadena. Según esto, por ejemplo, $\cosh n\pi x'/H = \cosh n\pi(x - L)/H$ es una solución.

Las soluciones producto son

$$u_4(x, y) = A \sen \frac{n\pi y}{H} \sinh \frac{n\pi}{H}(x - L). \quad (2.5.27)$$

Podemos ahora comprobar que la ecuación de Laplace se cumple al igual que las tres condiciones homogéneas. Es interesante notar que una parte (la que depende de y) oscila y la otra (la que depende de x) no. Ésta es una propiedad general de la ecuación de Laplace, no está asociada a la geometría concreta (un rectángulo) ni a las condiciones de contorno.

Queremos utilizar estas soluciones producto para cumplir la condición que falta, la condición de contorno no homogénea $u_4(0, y) = g_1(y)$. Ninguna de las soluciones producto por separado *tiene por qué cumplir* las condiciones no homogéneas, por lo que debemos utilizar de nuevo el principio de superposición. Si (2.5.27) es una solución, también lo es

$$u_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sen \frac{n\pi y}{H} \sinh \frac{n\pi}{H}(x - L). \quad (2.5.28)$$

Evaluando en $x = 0$ determinaremos los coeficientes A_n a partir de la condición de contorno no homogénea:

$$g_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sen \frac{n\pi y}{H} \sinh \frac{n\pi}{H}(-L).$$

Éste es el mismo tipo de serie de funciones seno que hemos estudiado ya brevemente, tomando $A_n \sinh n\pi(-L)/H$ como sus coeficientes. Entonces, por la ortogonalidad de las funciones $\sin n\pi y/H$ para y entre 0 y H ,

$$A_n \sinh \frac{n\pi}{H}(-L) = \frac{2}{H} \int_0^H g_1(y) \sin \frac{n\pi y}{H} dy.$$

Como $\sinh n\pi(-L)/H$ nunca es cero, podemos dividir por esta cantidad y obtener finalmente una fórmula para los coeficientes:

$$A_n = \frac{2}{H \sinh n\pi(-L)/H} \int_0^H g_1(y) \sin \frac{n\pi y}{H} dy. \quad (2.5.29)$$

La fórmula (2.5.28) con los coeficientes calculados en (2.5.29) es la solución única de $u_1(x, y)$. La solución $u(x, y)$ se obtiene sumando cuatro soluciones de este tipo.

2.5.2. Ecuación de Laplace en un disco

Supongamos que tenemos un disco delgado de radio a (con propiedades térmicas constantes y sin fuentes) con la temperatura prescrita en la frontera, tal como se ilustra en la Figura 2.5.2. Si la temperatura en la frontera es independiente del tiempo, entonces es razonable determinar la distribución de temperaturas en el equilibrio. La temperatura satisface la ecuación de Laplace, $\nabla^2 u = 0$. La geometría de este problema sugiere utilizar coordenadas polares, luego tendremos $u = u(r, \theta)$. En particular, en el círculo $r = a$ la distribución de temperatura es una función prescrita de θ , $u(a, \theta) = f(\theta)$. El problema que queremos resolver es

$$\text{EDP: } \nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad (2.5.30)$$

$$\text{CC: } u(a, \theta) = f(\theta). \quad (2.5.31)$$

A primera vista podría parecer que no podemos utilizar separación de variables porque nos faltan condiciones homogéneas. Sin embargo, la introducción de coordenadas polares requiere un poco de estudio que ilustrará el uso del método de separación de variables. Si resolvemos la ecuación de Laplace en un rectángulo (véase la Sección 2.5.1), $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$, necesitamos condiciones en los extremos de los intervalos de definición de las variables, $x = 0$, L e $y = 0$, H . Afortunadamente, estos extremos coinciden con las fronteras físicas. Sin embargo, en las coordenadas polares, $0 \leq r \leq a$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (donde hay cierta libertad en nuestra definición del ángulo θ). Matemáticamente, necesitamos condiciones en los

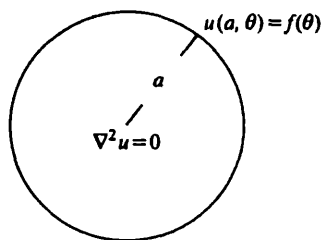


Figura 2.5.2: Ecuación de Laplace en un disco.

puntos finales de las variables del sistema coordenado, $r = 0$, a y $\theta = -\pi$, π . Aquí, sólo $r = a$ corresponde a una frontera física. Por tanto, necesitamos condiciones que vengan motivadas por el problema físico en los extremos $r = 0$ y $\theta = \pm\pi$. Las coordenadas polares son singulares en $r = 0$; por razones físicas supondremos que la temperatura es **acotada** en ese punto:

$$\text{acotación en el origen: } |u(0, \theta)| < \infty. \quad (2.5.32)$$

Matemáticamente necesitamos condiciones también en $\theta = \pm\pi$. La situación es similar a la del alambre circular. $\theta = -\pi$ corresponde a los mismos puntos que $\theta = \pi$. Aunque no hay realmente una frontera en $\theta = \pm\pi$, diremos que la temperatura es continua en ese punto y que el flujo de calor también es continuo en la dirección θ , lo que implica:

periodicidad:

$$\begin{array}{l} u(r, -\pi) = u(r, \pi) \\ \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi) \end{array} \quad (2.5.33)$$

como si las dos regiones estuvieran en contacto térmico perfecto allí (véase el Ejercicio 1.3.2). Las Ecuaciones (2.5.33) se llaman **condiciones de periodicidad**; son equivalentes a $u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi)$. Notemos que las condiciones obtenidas, (2.5.32) y (2.5.33), son todas lineales y homogéneas (es fácil comprobar que $u \equiv 0$ satisface estas tres condiciones). En esta forma el problema matemático parece bastante similar a la ecuación de Laplace dentro de un rectángulo. Hay cuatro condiciones. Aquí, afortunadamente, sólo una es no homogénea, $u(a, \theta) = f(\theta)$. Este problema es entonces adecuado para el método de separación de variables.

Buscaremos soluciones producto,

$$u(r, \theta) = \phi(\theta)G(r), \quad (2.5.34)$$

que satisfagan la EDP (2.5.30) y las tres condiciones homogéneas (2.5.32) y (2.5.33). Notemos que (2.5.34) *no tiene por qué satisfacer* la condición de contorno no homogénea (2.5.31). Sustituyendo (2.5.34) en las condiciones de periodicidad vemos

que

$$\begin{aligned}\phi(-\pi) &= \phi(\pi), \\ \frac{d\phi}{d\theta}(-\pi) &= \frac{d\phi}{d\theta}(\pi); \end{aligned} \tag{2.5.35}$$

la parte que depende de θ también satisface las **condiciones de contorno periódicas**. La solución producto cumplirá la ecuación de Laplace si

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) \phi(\theta) + \frac{1}{r^2} G(r) \frac{d^2\phi}{d\theta^2} = 0.$$

Las variables *no* se separan al dividir por $G(r)\phi(\theta)$, ya que $1/r^2$ sigue multiplicando a los términos dependientes de θ . En lugar de eso, dividiremos por $(1/r^2)G(r)\phi(\theta)$, en cuyo caso

$$\frac{r}{G} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{d\theta^2} = \lambda. \tag{2.5.36}$$

La constante de separación la introducimos como λ (mejor que $-\lambda$) ya que hay dos condiciones homogéneas en θ , (2.5.35), y por tanto esperamos oscilaciones en θ . La Ecuación (2.5.36) da lugar a dos ecuaciones diferenciales ordinarias. El problema de contorno que nos determinará la constante de separación es

$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = -\lambda\phi$	$\tag{2.5.37}$
$\phi(-\pi) = \phi(\pi)$	
$\frac{d\phi}{d\theta}(-\pi) = \frac{d\phi}{d\theta}(\pi)$	

Los autovalores λ se determinan de la forma usual. De hecho, éste es uno de los tres problemas estándar, idéntico al del alambre circular (con $L = \pi$). Luego los autovalores son

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 = n^2. \tag{2.5.38}$$

con las correspondientes autofunciones

$$\text{sen } n\theta \quad \text{y} \quad \text{cos } n\theta. \tag{2.5.39}$$

El caso $n = 0$ debe estar incluido (siendo la autofunción una constante).

El problema radial es

$$\frac{r}{G} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) = \lambda = n^2, \tag{2.5.40}$$

que escrito en la forma más usual se convierte en

$$r^2 \frac{d^2 G}{dr^2} + r \frac{dG}{dr} - n^2 G = 0. \quad (2.5.41)$$

Aquí, la condición en $r = 0$ ya ha sido discutida, hemos prescrito $|u(0, \theta)| < \infty$. Para las soluciones producto, $u(r, \theta) = \phi(\theta)G(r)$, se sigue que la condición en el origen es que $G(r)$ debe estar acotada allí,

$$|G(0)| < \infty. \quad (2.5.42)$$

La Ecuación (2.5.41) es lineal y homogénea, pero no tiene coeficientes constantes. Existen muy pocas ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes no constantes que podamos resolver fácilmente. La Ecuación (2.5.41) es una de ellas, un ejemplo de una ecuación conocida por varios nombres: **equidimensional**, **de Cauchy** o **de Euler**. La forma más fácil de resolver (2.5.41) es observar que para el operador diferencial lineal de esa ecuación, cualquier potencia $G = r^p$ se reproduce a sí misma⁵. Sustituyendo $G = r^p$ en (2.5.41), obtenemos que $[p(p-1) + p - n^2]r^p = 0$. Por tanto, existen normalmente dos soluciones distintas.

$$p = \pm n.$$

excepto cuando $n = 0$, en cuyo caso sólo hay una solución independiente de la forma r^p . Para $n \neq 0$, la solución general de (2.5.41) es

$$G = c_1 r^n + c_2 r^{-n}. \quad (2.5.43)$$

Para $n = 0$ (y este caso es importante ya que $\lambda = 0$ es un autovalor en este problema), una solución es $r^0 = 1$, o cualquier constante. Una segunda solución para $n = 0$ se puede obtener fácilmente a partir de (2.5.40). Si $n = 0$, $\frac{d}{dr} (r \frac{dG}{dr}) = 0$. Integrando, $r \frac{dG}{dr}$ es una constante, o equivalentemente, $\frac{dG}{dr}$ es proporcional a $1/r$. La segunda solución independiente es por tanto $\ln r$. Luego para $n = 0$, la solución general de (2.5.41) es

$$G = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \ln r. \quad (2.5.44)$$

Para la Ecuación (2.5.41) sólo tenemos una condición homogénea que imponer, $|G(0)| < \infty$, y por tanto no es un problema de autovalores. La condición de acotación no hubiera impuesto ninguna restricción a los problemas que hemos estudiado previamente. Sin embargo, aquí (2.5.43) o (2.5.44) muestran soluciones que pueden tender a ∞ cuando $r \rightarrow 0$. Por tanto, para que $|G(0)| < \infty$, $c_2 = 0$ en (2.5.43) y $\bar{c}_2 = 0$ en (2.5.44). La solución dependiente del radio (que está acotada en $r = 0$) es

$$G(r) = c_1 r^n \quad n \geq 0,$$

⁵Para los operadores lineales con coeficientes constantes, las exponenciales se reproducen a sí mismas.

que para $n = 0$ se reduce a una constante arbitraria.

Las soluciones producto obtenidas por el método de separación de variables que satisfacen las tres condiciones homogéneas son

$$r^n \cos n\theta (n \geq 0) \quad \text{y} \quad r^n \sin n\theta (n \geq 1).$$

Observemos que igual que con las coordenadas rectangulares en la ecuación de Laplace, hay oscilaciones en una variable (aquí son en θ) pero no en la otra variable (r). Por el principio de superposición, la siguiente serie es una solución de la ecuación de Laplace en un círculo:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \sin n\theta, \quad \begin{array}{l} 0 \leq r < a \\ -\pi < \theta \leq \pi. \end{array} \quad (2.5.45)$$

Para resolver la condición no homogénea, $u(a, \theta) = f(\theta)$,

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n a^n \sin n\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi. \quad (2.5.46)$$

La temperatura prescrita es una combinación lineal de senos y cosenos (incluyendo un término constante, para $n = 0$). Ésta es exactamente la misma cuestión que respondimos en la Sección 2.4.2 con $L = \pi$, siendo ahora $A_n a^n$ el coeficiente de $\cos n\theta$ y $B_n a^n$ el coeficiente de $\sin n\theta$. Utilizando las fórmulas de ortogonalidad se sigue que

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta, \\ (n \geq 1) \quad A_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \\ B_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta. \end{aligned} \quad (2.5.47)$$

Como $a^n \neq 0$, los coeficientes A_n y B_n se pueden calcular de forma única a partir de (2.5.47).

La Ecuación (2.5.45) con los coeficientes dados por (2.5.47) determina la distribución de temperaturas en el equilibrio dentro de un círculo. La solución es relativamente complicada, requiriendo a menudo la evaluación numérica de las dos series infinitas. Para interpretaciones adicionales de esta solución véase el Capítulo 9 sobre funciones de Green.

2.5.3. Flujo de un fluido alrededor de un cilindro circular (sustentación)

En el flujo de calor, la conservación de la energía térmica se puede usar para deducir, bajo ciertas condiciones, la ecuación de Laplace, $\nabla^2 u = 0$. En la mecánica

de fluidos, la conservación de la masa y la conservación del momento se pueden usar también para deducir la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \psi = 0,$$

de la siguiente manera. En los ejercicios se demuestra que la **conservación de la masa** de un fluido junto con la suposición de que la densidad de masa ρ es constante lleva a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{o en dos dimensiones,} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.5.48)$$

donde la **velocidad** tiene componentes x e y , $\mathbf{u} = (u, v)$. A menudo se introduce una **función de corriente** ψ que automáticamente satisface (2.5.48):

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.5.49)$$

Frecuentemente se dibujan las líneas de corriente ($\psi = \text{constante}$) que son paralelas al flujo del fluido. Se puede demostrar que en algunas circunstancias el fluido es irrotacional ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$) por lo que la función de corriente satisface la ecuación de Laplace

$$\boxed{\nabla^2 \psi = 0.} \quad (2.5.50)$$

El ejemplo más sencillo es un flujo constante en la dirección x , $\mathbf{u} = (U, 0)$, en el que la función de corriente es $\psi = Uy$, que claramente satisface la ecuación de Laplace.

Como primer paso para diseñar las alas de los aviones, los científicos han considerado el flujo alrededor de un cilindro circular de radio a . Para más detalles referimos al interesado a Acheson [1990]. La función de corriente debe cumplir la ecuación de Laplace que, como antes, en coordenadas polares es (2.5.30). Supondremos que lejos del cilindro el flujo es uniforme, luego como una aproximación para r grande:

$$\psi \approx Uy = Ur \sin \theta, \quad (2.5.51)$$

ya que utilizaremos coordenadas polares. La condición de contorno es que la componente radial del flujo de fluido debe ser cero en $r = a$. El flujo de fluido debe ser paralelo a la frontera, y por tanto podemos suponer:

$$\psi(a, \theta) = 0. \quad (2.5.52)$$

Por separación de variables, incluyendo el caso $n = 0$ dado por (2.5.44),

$$\psi(r, \theta) = c_1 \ln r + c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \sin n\theta, \quad (2.5.53)$$

donde podríamos haber incluido términos $\cos n\theta$ (pero se anularían). Aplicando la condición de contorno en $r = a$, encontramos

$$\begin{aligned} c_1 \ln a + c_2 &= 0, \\ A_n a^n + B_n a^{-n} &= 0, \end{aligned}$$

luego

$$\psi(r, \theta) = c_1 \ln \frac{r}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(r^n - \frac{a^{2n}}{r^n} \right) \sin n\theta. \quad (2.5.54)$$

Para que la velocidad del fluido sea aproximadamente una constante en el infinito con $\psi \approx Uy = Ur \sin \theta$ para r grande, $A_n = 0$ para $n \geq 2$ y $A_1 = U$. Entonces,

$$\psi(r, \theta) = c_1 \ln \frac{r}{a} + U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta. \quad (2.5.55)$$

Se puede demostrar en general que la velocidad del fluido en coordenadas polares se puede obtener a partir de la función de corriente: $u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ y $u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$. Luego la componente θ de la velocidad del fluido es $u_\theta = -\frac{c_1}{r} - U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$. La **circulación** se define como $\int_0^{2\pi} u_\theta r d\theta = -2\pi c_1$. En la Figura 2.5.3 se esbozan diferentes flujos, para una velocidad dada en el infinito, dependiendo de la circulación alrededor del cilindro.

La **presión** p del fluido ejerce una fuerza en la dirección opuesta a la normal exterior del cilindro $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Las fuerzas de **arrastre** o **resistencia al avance** (en la dirección x) y de **sustentación** (en la dirección y), por unidad de longitud en la dirección z , ejercidas por el fluido sobre el cilindro son

$$\mathbf{F} = - \int_0^{2\pi} p(\cos \theta, \sin \theta) a d\theta. \quad (2.5.56)$$

Para flujos estacionarios como éste, la presión se determina por la **condición de Bernoulli**

$$p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 = \text{constante}. \quad (2.5.57)$$

Por tanto, la presión es más baja cuando la velocidad es más alta. Si la circulación es en el sentido de las agujas del reloj alrededor del cilindro (una circulación negativa), entonces intuitivamente (según podemos verificar) la velocidad será más alta por encima del cilindro que por debajo y la presión será más baja en la parte alta del cilindro, por tanto se generará una sustentación (una fuerza positiva en la dirección y). En el cilindro, $u_r = 0$, luego allí $|\mathbf{u}|^2 = u_\theta^2$. Se puede demostrar que la componente x de la fuerza, la resistencia al arrastre, es cero, pero la componente y ,

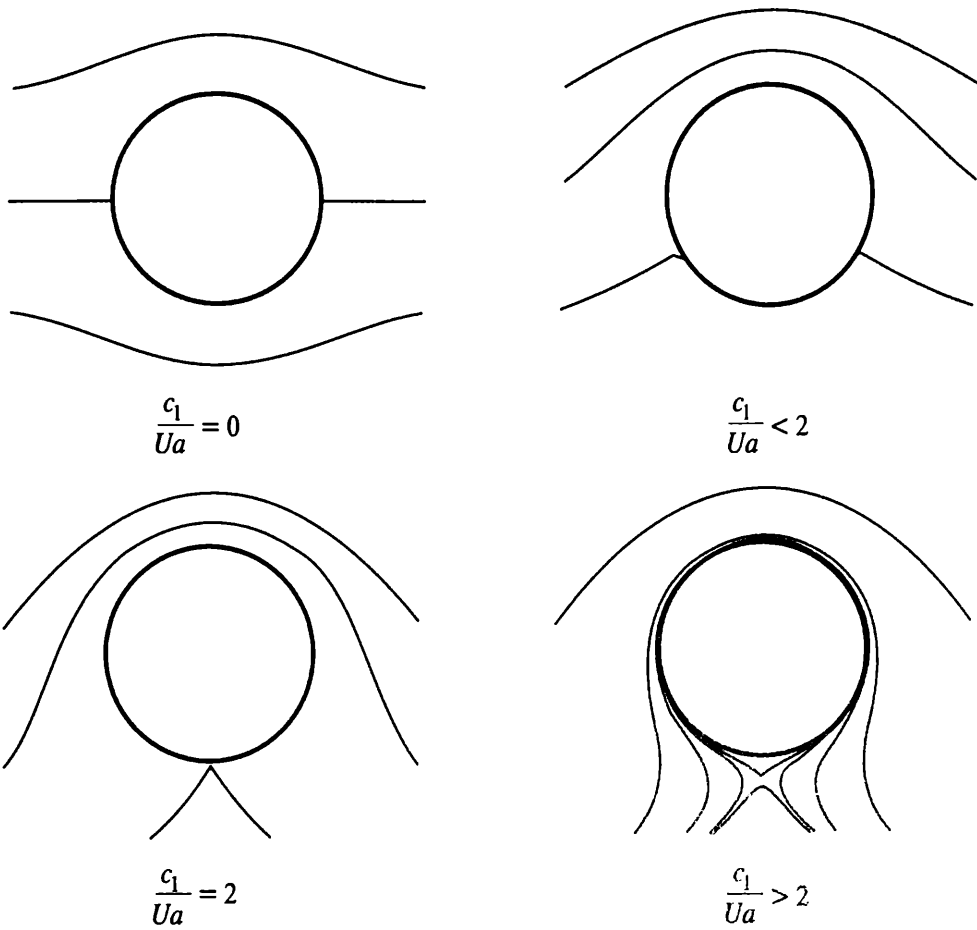


Figura 2.5.3: Flujo rodeando un cilindro; sustentación = $2\pi\rho c_1 U$.

la sustentación, es (ya que la integral en la que aparece la constante se anula):

$$F_y = \frac{1}{2}\rho \int_0^{2\pi} \left[-\frac{c_1}{r} - U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \text{sen } \theta \right]^2 \text{sen } \theta a d\theta, \quad (2.5.58)$$

$$F_y = \rho \frac{c_1}{a} U 2 \int_0^{2\pi} \text{sen}^2 \theta a d\theta = \rho 2\pi c_1 U, \quad (2.5.59)$$

donde hemos simplificado utilizando que $\int_0^{2\pi} \text{sen } \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \text{sen}^3 \theta d\theta = 0$, debido a que la función seno es impar. La sustentación se anula si la circulación es cero. Una circulación negativa (con c_1 positiva) produce una fuerza de sustentación en el cilindro por parte del fluido.

En el mundo real la resistencia al avance es más complicada. Puede aparecer una capa límite debido a la viscosidad del fluido. La presión es continua a través de la capa límite, por lo que el análisis anterior sigue siendo a menudo válido. Sin embargo, las cosas se complican mucho cuando la capa límite se separa del cilindro, en cuyo caso aparece una fuerza de resistencia al avance significativa (esto ha sido ignorado en este tratamiento elemental). Un avión volará si la sustentación es mayor que su peso. Sin embargo, para volar rápido necesitamos un motor potente que ejerza una fuerza, en la dirección x , que venza la resistencia al avance.

2.5.4. Propiedades cualitativas de la ecuación de Laplace

Algunas veces el método de separación de variables no se puede utilizar. Si queremos información cuantitativa, pueden ser necesarios métodos numéricos (véase el Capítulo 6). En esta subsección describiremos brevemente algunas propiedades cualitativas que se pueden deducir para la ecuación de Laplace.

Teorema del valor medio. La solución de la ecuación de Laplace dentro de un círculo que hemos obtenido en la Sección 2.5.2 por el método de separación de variables conlleva un importante resultado. Si evaluamos la temperatura en el origen, $r = 0$, descubrimos a partir de (2.5.45) que

$$u(0, \theta) = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta;$$

es decir, la temperatura allí es igual al valor medio de la temperatura en la frontera del círculo. Ésta es la llamada **propiedad de la media** para la ecuación de Laplace, y se cumple en general en el siguiente sentido: supongamos que deseamos resolver la ecuación de Laplace en una región arbitraria R (véase la Figura 2.5.4) y consideremos un punto *genérico* P dentro de R , así como un círculo de radio r_0 pequeño (de modo que el círculo esté dentro de R). Utilizando coordenadas polares centradas en P , denotemos por $f(\theta)$ la temperatura en la circunferencia. Nuestro análisis previo sigue siendo válido y entonces **la temperatura en cualquier punto es la media de la temperatura a lo largo de cualquier circunferencia centrada en ese punto (contenida en R).**

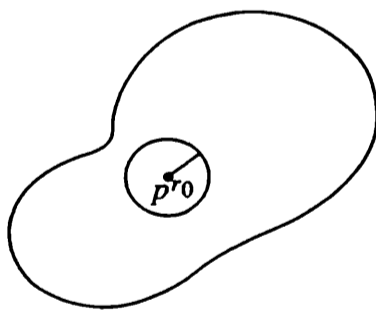


Figura 2.5.4: Círculo dentro de una región arbitraria.

Principios del máximo. Podemos utilizar estos argumentos para probar el **principio del máximo** para la ecuación de Laplace: **en el estado estacionario la temperatura no puede alcanzar su máximo en el interior** (a menos que la temperatura sea constante en todas partes) suponiendo que no hay fuentes. Demostremos este resultado por reducción al absurdo. Supongamos que el máximo se alcanzara en el punto P . Como este máximo coincidiría con la media en todos los puntos de cualquier circunferencia centrada en P (por ejemplo la dibujada en la Figura 2.5.4), es imposible que la temperatura en P sea más alta que en todos los puntos de alrededor. Esto contradice la suposición que hicimos de que P es un punto de máximo. El principio del máximo no es sorprendente. Si la temperatura tuviera su valor más alto en el punto P , entonces con el tiempo la concentración de energía

térmica se difundiría y en el estado estacionario el máximo no podría estar en el interior. Si llamamos $\psi = -u$, también podemos demostrar que la temperatura no puede alcanzar su mínimo en el interior. Se sigue que **en el estado estacionario, el máximo y el mínimo de la temperatura se alcanzan en la frontera.**

Problemas bien propuestos y unicidad. El principio del máximo es una herramienta muy importante para un análisis profundo de las ecuaciones en derivadas parciales, especialmente para establecer propiedades cualitativas (*véase*, por ejemplo, Protter y Weinberger [1967]). Diremos que un problema está **bien propuesto** si existe una solución única que depende continuamente de los datos no homogéneos (es decir, la solución varía poco si los datos se cambian ligeramente). Éste es un concepto importante para los problemas físicos. Si la solución cambiara dramáticamente con sólo un pequeño cambio en los datos, entonces cualquier medida física debería ser exacta para que la solución fuera fiable. Afortunadamente, la mayoría de los problemas estándar de ecuaciones en derivadas parciales están bien propuestos. Por ejemplo, el principio del máximo se puede usar para probar que la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ con $u = f(\mathbf{x})$ en la frontera está bien propuesta. Supongamos que variamos los datos de contorno una pequeña cantidad, de tal manera que

$$\nabla^2 v = 0 \quad \text{con } v = g(\mathbf{x}) \text{ sobre la frontera,}$$

donde $g(\mathbf{x})$ es casi la misma que $f(\mathbf{x})$ en todos los puntos de la frontera. Consideremos la diferencia entre estas dos soluciones, $w = u - v$. Por la linealidad,

$$\nabla^2 w = 0 \quad \text{con } w = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}) \text{ en la frontera.}$$

El principio del máximo (y del mínimo) para la ecuación de Laplace implica que el máximo y el mínimo están sobre la frontera. Por tanto, en cualquier punto interior,

$$\text{mín}(f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})) \leq w \leq \text{máx}(f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})). \quad (2.5.60)$$

Como $g(\mathbf{x})$ es casi la misma que $f(\mathbf{x})$ en todas partes, w es pequeña y por tanto la solución v es casi la misma que u ; la solución de la ecuación de Laplace varía ligeramente si los datos se alteran ligeramente.

Probemos ahora, por reducción al absurdo, que la solución de la ecuación de Laplace es única. Supongamos que hubiera dos soluciones, u y v como antes, que cumplen la misma condición de contorno [es decir, $(f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}))$]. Si consideramos la diferencia ($w = u - v$), entonces los principios del máximo y del mínimo implican [*véase* (2.5.60)] que dentro de la región se tiene

$$0 \leq w \leq 0.$$

En conclusión, $w = 0$ en todo punto del interior, luego $u = v$, lo que demuestra que, si existe una solución, es única. Estas propiedades (unicidad y dependencia continua de los datos) demuestran que la ecuación de Laplace, con valor de u prescrito en la frontera, es un problema bien propuesto.

Condición de solubilidad. Si sobre la frontera el dato prescrito es el flujo de calor $-K_0 \nabla u \cdot \hat{n}$, en lugar de la temperatura, la ecuación de Laplace puede no tener soluciones [véase un ejemplo unidimensional en el Ejercicio 1.4.7(b)]. Para ver esto integramos $\nabla^2 u = 0$ sobre la región bidimensional dada

$$0 = \iint \nabla^2 u \, dx \, dy = \iint \nabla \cdot (\nabla u) \, dx \, dy.$$

Utilizando el teorema de la divergencia (bidimensional), concluimos que (véase el Ejercicio 1.5.8)

$$0 = \oint \nabla u \cdot \hat{n} \, ds. \quad (2.5.61)$$

Como $\nabla u \cdot \hat{n}$ es proporcional al flujo de calor a través de la frontera, (2.5.61) implica que el flujo *neto* de calor a través de la frontera debe ser cero para que exista un estado estacionario. Esto es claro físicamente porque de otro modo habría un cambio (con el tiempo) de la energía térmica en el interior, lo que contradice la suposición de estado estacionario. La Ecuación (2.5.61) se llama **condición de solubilidad** o **condición de compatibilidad** para la ecuación de Laplace.

EJERCICIOS 2.5

2.5.1. Resolver la ecuación de Laplace dentro del rectángulo $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$, con las siguientes condiciones de contorno:

$$*(a) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, H) = f(x).$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = g(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, H) = 0.$$

$$*(c) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad u(L, y) = g(y), \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, H) = 0.$$

$$(d) \quad u(0, y) = g(y), \quad u(L, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad u(x, H) = 0.$$

$$*(e) \quad u(0, y) = 0, \quad u(L, y) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0), \quad u(x, H) = f(x).$$

$$(f) \quad u(0, y) = f(y), \quad u(L, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H) = 0.$$

$$(g) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x > L/2 \\ 1 & x < L/2 \end{cases}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H) = 0.$$

2.5.2. Considérese la función $u(x, y)$, que satisface la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < L$, $0 < y < h$, con las siguientes condiciones de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H) = f(x).$$

*(a) *Sin* resolver este problema, explicar brevemente la condición física bajo la cual existe solución.

- (b) Resolver este problema por el método de separación de variables. Demostrar que el método funciona sólo bajo la condición deducida en el apartado (a).
- (c) La solución del apartado (b) contiene una constante arbitraria. Calcularla considerando la ecuación del calor dependiente del tiempo (1.5.11), con la condición inicial

$$u(x, y, 0) = g(x, y).$$

- *2.5.3.** Resolver la ecuación de Laplace *en el exterior* de un disco ($r \geq a$) con las condiciones de contorno:

$$(a) \quad u(a, \theta) = \ln 2 + 4 \cos 3\theta, \quad (b) \quad u(a, \theta) = f(\theta).$$

Se puede suponer que $u(r, \theta)$ es finito cuando $r \rightarrow \infty$.

- *2.5.4.** Demostrar, utilizando (2.5.45) y (2.5.47) que, para la ecuación de Laplace en un disco ($r \leq a$), se tiene

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{\theta}) \left[-\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\theta - \bar{\theta}) \right] d\bar{\theta}.$$

Sumar la serie geométrica resultante usando la fórmula $\cos z = \operatorname{Re} [e^{iz}]$, para obtener la fórmula integral de Poisson.

- 2.5.5.** Resolver la ecuación de Laplace dentro del cuarto de círculo de radio 1 ($0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq r \leq 1$) con las siguientes condiciones de contorno:

$$* (a) \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0) = 0, \quad u(r, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad u(1, \theta) = f(\theta).$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad u(1, \theta) = f(\theta).$$

$$* (c) \quad u(r, 0) = 0, \quad u(r, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = f(\theta).$$

$$(d) \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \frac{\pi}{2}) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(1, \theta) = g(\theta).$$

Demostrar que la solución del apartado (d) existe sólo si $\int_0^{\pi/2} g(\theta) d\theta = 0$. Explicar físicamente esta condición.

- 2.5.6.** Resolver la ecuación de Laplace dentro de un semicírculo ($0 < r < a$, $0 < \theta < \pi$), con las condiciones de contorno:

$$*(a) \quad u = 0 \text{ sobre el diámetro y } u(a, \theta) = g(\theta).$$

$$(b) \quad \text{El diámetro está aislado y } u(a, \theta) = g(\theta).$$

- 2.5.7.** Resolver la ecuación de Laplace dentro de un sector circular de 60° de radio a , sujeto a las condiciones de contorno:

$$(a) \quad u(r, 0) = 0, \quad u\left(r, \frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad u(a, \theta) = f(\theta).$$

$$* (b) \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}\left(r, \frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad u(a, \theta) = f(\theta).$$

2.5.8. Resolver la ecuación de Laplace dentro de un anillo circular ($a < r < b$) con las siguientes condiciones de contorno:

$$* (a) \quad u(a, \theta) = f(\theta), \quad u(b, \theta) = g(\theta).$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = 0, \quad u(b, \theta) = g(\theta).$$

$$(c) \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = f(\theta), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(b, \theta) = g(\theta).$$

Si existe alguna condición de solubilidad, enunciarla y explicarla físicamente.

***2.5.9.** Resolver la ecuación de Laplace dentro de un sector circular de 90° de un anillo ($a < r < b$, $0 < \theta < \pi/2$) con las condiciones de contorno siguientes:

$$(a) \quad u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi/2) = 0, \quad u(a, \theta) = 0, \quad u(b, \theta) = f(\theta).$$

$$(b) \quad u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi/2) = f(r), \quad u(a, \theta) = 0, \quad u(b, \theta) = 0.$$

2.5.10. Utilizando los principios del máximo para la ecuación de Laplace, probar que la solución de la ecuación de Poisson, $\nabla^2 u = g(\mathbf{x})$, con la condición $u = f(\mathbf{x})$ en la frontera, es única.

2.5.11. Resolver el Ejercicio 1.5.8.

2.5.12. (a) Utilizando el teorema de la divergencia, obtener una expresión alternativa para $\iint u \nabla^2 u \, dx \, dy \, dz$.

(b) Usando el apartado (a), probar que la solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ (con u prescrita en la frontera) es única.

(c) Modificar el apartado (b) si $\nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ en la frontera.

(d) Modificar el apartado (b) si tenemos ahora $\nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} + hu = 0$ sobre la frontera. Demostrar que la ley de enfriamiento de Newton corresponde a $h < 0$.

2.5.13. Probar que la temperatura que cumple la ecuación de Laplace no puede alcanzar su mínimo en el interior.

2.5.14. Demostrar que la ecuación del calor “retrógrada”,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con las condiciones $u(0, t) = u(L, t) = 0$ y $u(x, 0) = f(x)$, no es un problema bien propuesto. *Indicación:* demostrar que si los datos se cambian en una cantidad arbitrariamente pequeña, por ejemplo,

$$f(x) \rightarrow f(x) + \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

para n grande, entonces la solución $u(x, t)$ cambia en una cantidad grande.

2.5.15. Resolver la ecuación de Laplace dentro de una banda semiinfinita ($0 < x < \infty$, $0 < y < H$), con las condiciones de contorno:

$$(a) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H) = 0, \quad u(0, y) = f(y),$$

$$(b) \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, H) = 0, \quad u(0, y) = f(y),$$

$$(c) \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, H) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = f(y),$$

$$(d) \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = f(y).$$

Demostrar que la solución del apartado (d) existe sólo si $\int_0^H f(y) dy = 0$.

2.5.16. Consideremos la ecuación de Laplace en un rectángulo $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq H$, con las condiciones de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = g(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H) = f(x).$$

(a) ¿Cuál es la condición de solubilidad y su interpretación?

(b) Demostrar que $u(x, y) = A(x^2 - y^2)$ es una solución si $f(x)$ y $g(y)$ son constantes [bajo la condición del apartado (a)].

(c) Bajo la condición del apartado (a), resolver el caso general [$f(x)$ y $g(y)$ no constantes]. *Indicaciones:* usar el apartado (b) y el hecho de que $f(x) = f_{av} + [f(x) - f_{av}]$, donde $f_{av} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$.

2.5.17. Probar que la densidad de masa $\rho(x, t)$ satisface $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$ debido a la conservación de masa.

2.5.18. Si la densidad de masa es constante, utilizando el resultado del Ejercicio 2.5.17 demostrar que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

2.5.19. Demostrar que las líneas de corriente son paralelas a la velocidad del fluido.

2.5.20. Demostrar que siempre existe una función de corriente, $\nabla \times \mathbf{u} = 0$.

2.5.21. A partir de $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ y $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, deducir que $u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ y $u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$.

2.5.22. Demostrar que la fuerza de resistencia al avance es cero para un fluido uniforme alrededor de un cilindro que tiene circulación.

- 2.5.23.** Consideremos la velocidad u_θ en el cilindro. ¿Dónde tienen lugar el máximo y el mínimo?
- 2.5.24.** Consideremos de nuevo la velocidad u_θ en el cilindro. Si la circulación es negativa, demostrar que la velocidad será mayor por encima del cilindro que por debajo.
- 2.5.25.** Un punto de estancamiento es aquél en el que $\mathbf{u} = 0$. ¿Para qué valores de la circulación existe un punto de estancamiento en el cilindro?
- 2.5.26.** ¿Para qué valores de θ será $u_r = 0$ fuera del cilindro? Para estos θ , ¿dónde (en qué valores de r) se tendrá también $u_\theta = 0$?
- 2.5.27.** Demostrar que $\psi = \alpha \frac{\text{sen } \theta}{r}$ satisface la ecuación de Laplace. Demostrar que las líneas de corriente son círculos. Dibujar las líneas de corriente.

Capítulo 3

Series de Fourier

3.1. Introducción

Al resolver ecuaciones en derivadas parciales por el método de separación de variables hemos descubierto que ciertas condiciones importantes [como por ejemplo la condición inicial, $u(x, 0) = f(x)$] se pueden cumplir solamente si $f(x)$ se puede igualar a una combinación lineal de autofunciones de un problema de contorno dado. Hemos estudiado tres casos específicos. Uno involucraba una serie de funciones seno, otro una serie de cosenos solamente (incluyendo un término constante) y el tercero una serie que incluía todos estos términos.

Comenzaremos investigando series con senos y cosenos a la vez, porque demostraremos que las otras son sólo casos especiales de estas series más generales. Para problemas con condiciones de frontera periódicas en el intervalo $-L \leq x \leq L$, nos preguntamos si la siguiente serie infinita (conocida como **serie de Fourier**) tiene sentido:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.1.1)$$

¿Converge la serie infinita? ¿Converge a $f(x)$? ¿Es la serie infinita resultante realmente una solución de la ecuación en derivadas parciales (y cumple también todas las otras condiciones subsidiarias)? Los matemáticos nos dicen que ninguna de estas preguntas tiene una respuesta sencilla. Sin embargo, *las series de Fourier normalmente funcionan bastante bien* (especialmente en situaciones en que surgen de forma natural a partir de problemas físicos). Joseph Fourier desarrolló este tipo de series en su famoso tratado sobre el flujo del calor, a comienzos del siglo XIX.

La primera dificultad que surge es que esperamos que (3.1.1) no será válido para *todas* las funciones $f(x)$. Sin embargo, (3.1.1) será válido para algunos tipos de funciones y necesitaremos sólo una pequeña modificación para otros tipos de funciones. Para tratar varios conceptos fácilmente, trataremos sólo funciones $f(x)$ que son suaves a trozos. Una función $f(x)$ es **suave a trozos** (en algún intervalo) si el intervalo se puede dividir en subintervalos, tales que en cada uno de ellos la función

$f(x)$ sea continua¹ y su derivada df/dx sea también continua. Así, la función $f(x)$ puede no ser continua, pero el único tipo de discontinuidad permitida es un número finito de discontinuidades de salto. Una función $f(x)$ tiene **una discontinuidad de salto** en el punto $x = x_0$, si existen tanto el límite por la izquierda $[f(x_0^-)]$ como el límite por la derecha $[f(x_0^+)]$, y son *distintos*, como se ilustra en la Figura 3.1.1. Un ejemplo de una función suave a trozos aparece en la Figura 3.1.2. Observemos que $f(x)$ tiene dos discontinuidades de salto, en $x = x_1$ y en $x = x_3$. La función $f(x)$ es continua en $x_1 \leq x \leq x_3$, pero df/dx no es continua para todo x con $x_1 \leq x \leq x_3$. La derivada df/dx es continua en $x_1 \leq x \leq x_2$ y en $x_2 \leq x \leq x_3$. El intervalo se puede dividir en subintervalos en los que $f(x)$ y df/dx sean continuas. En este caso hay cuatro trozos, $x \leq x_1$, $x_1 \leq x \leq x_2$, $x_2 \leq x \leq x_3$, y $x \geq x_3$. Casi todas las funciones que aparecen en la práctica (y ciertamente la mayoría de las que tratamos en este libro) serán suaves a trozos. Demos sin embargo un ejemplo de una función que no es suave a trozos. Consideremos $f(x) = x^{1/3}$, tal como se muestra en la Figura 3.1.3. No es suave a trozos en ningún intervalo que contenga a $x = 0$, porque $df/dx = 1/3x^{-2/3}$ es ∞ en $x = 0$. En otras palabras, cualquier región que contenga a $x = 0$ no se puede dividir en subintervalos de tal manera que df/dx sea continua en cada uno de ellos.

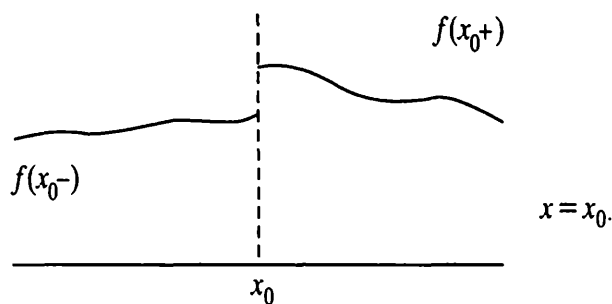


Figura 3.1.1: Discontinuidad de salto en $x = x_0$.

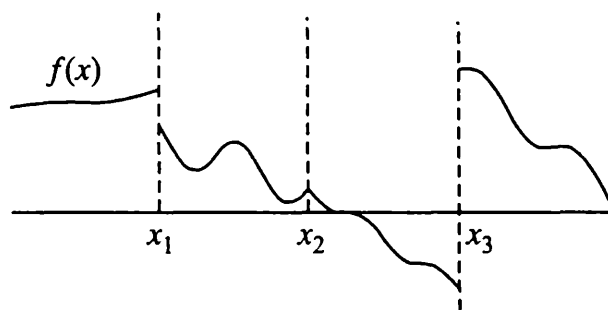


Figura 3.1.2: Ejemplo de una función suave a trozos.

Todas las funciones que aparecen en una serie de Fourier son periódicas con periodo $2L$. Por tanto, la *serie de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $-L \leq x \leq L$ es periódica con periodo $2L$* . La función $f(x)$ no es necesariamente periódica. Necesitamos una **extensión periódica** de $f(x)$. Para construir la extensión periódica de $f(x)$, dibujamos sencillamente $f(x)$ para $-L \leq x \leq L$ y después repetimos ese

¹No damos aquí la definición de función continua. Sin embargo, un hecho útil conocido es que si una función tiende a ∞ en un punto, entonces *no* es continua en ningún intervalo que incluya ese punto.

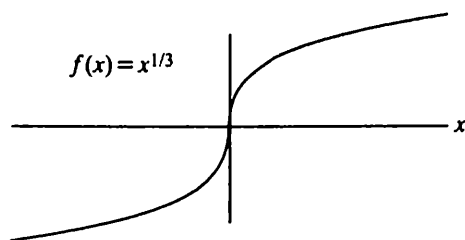


Figura 3.1.3: Ejemplo de una función que no es suave a trozos.

mismo patrón con periodo $2L$ trasladando el dibujo original para $-L \leq x \leq L$. Por ejemplo, en la Figura 3.1.4 dibujamos la extensión periódica de $f(x) = \frac{3}{2}x$ (la función $f(x) = \frac{3}{2}x$ se dibuja con línea de puntos para $|x| > L$). Observemos la diferencia entre $f(x)$ y su extensión periódica.

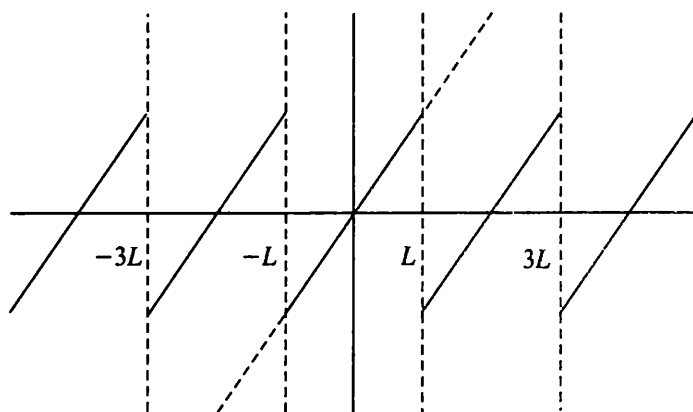


Figura 3.1.4: Extensión periódica de $f(x) = \frac{3}{2}x$.

3.2. Enunciado del teorema de convergencia

Definiciones de los coeficientes de Fourier y las series de Fourier. Tenemos que distinguir cuidadosamente entre una función $f(x)$ y su serie de Fourier en el intervalo $-L \leq x \leq L$:

$$\text{serie de Fourier} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.2.1)$$

La serie infinita puede incluso no converger y si converge, puede que no converja a $f(x)$. Sin embargo, si la serie converge, aprendimos en el Capítulo 2 cómo determinar los **coeficientes de Fourier** a_0 , a_n y b_n usando algunas relaciones de ortogonalidad, (2.3.32). Utilizaremos ahora esos resultados como definición de los coeficientes de

Fourier:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \\
 b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.2}$$

La serie de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $-L \leq x \leq L$ se define como la serie infinita (3.2.1), donde los coeficientes de Fourier están dados por (3.2.2). Notamos inmediatamente que una serie de Fourier no existe a menos que, por ejemplo, a_0 exista [es decir, a menos que $|\int_{-L}^L f(x) dx| < \infty$]. Esto elimina ciertas funciones de nuestra consideración. Por ejemplo, no preguntaremos cuál es la serie de Fourier de $f(x) = 1/x^2$.

Incluso en situaciones en que $\int_{-L}^L f(x) dx$ exista, la serie infinita puede no converger; más aún, si converge, puede no converger a $f(x)$. Utilizamos la notación

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},
 \tag{3.2.3}$$

donde el símbolo \sim significa que a la derecha tenemos la serie de Fourier de $f(x)$ (en el intervalo $-L \leq x \leq L$) incluso si la serie diverge, pero las dos funciones pueden ser completamente diferentes. El símbolo \sim se lee “su serie de Fourier (en un intervalo dado) es”.

Teorema de convergencia de las series de Fourier. Para comenzar enunciamos un teorema que resume ciertas propiedades de las series de Fourier:

Si $f(x)$ es suave a trozos en el intervalo $-L \leq x \leq L$, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ converge

1. a la extensión periódica de $f(x)$, donde la extensión periódica sea continua;
2. a la media de los dos límites laterales,

$$\frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)],$$

donde la extensión periódica tenga una discontinuidad de salto.

Nos referiremos a este resultado como **teorema de convergencia de series de**

Fourier. Su demostración se puede encontrar en muchas de las referencias de la bibliografía.

Matemáticamente, si $f(x)$ es suave a trozos, entonces para $-L < x < L$ (excluyendo los extremos),

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.2.4)$$

donde los coeficientes de Fourier están dados por (3.2.2). En los puntos donde $f(x)$ es continua, $f(x+) = f(x-)$ y, por tanto, (3.2.4) implica que para $-L < x < L$,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

La serie de Fourier converge realmente a $f(x)$ en los puntos entre $-L$ y $+L$ donde $f(x)$ es continua. En los puntos extremos, $x = L$ y $x = -L$, la serie infinita converge a la media de los dos valores de la extensión periódica. Fuera del rango $-L \leq x \leq L$, la serie de Fourier converge a un valor fácilmente determinado usando la conocida periodicidad (con periodo $2L$) de la serie de Fourier.

Gráfica de las series de Fourier. Ahora estamos listos para aplicar el teorema de Fourier. Para dibujar la gráfica de una serie de Fourier de $f(x)$ (en el intervalo $-L \leq x \leq L$), seguimos los siguientes pasos:

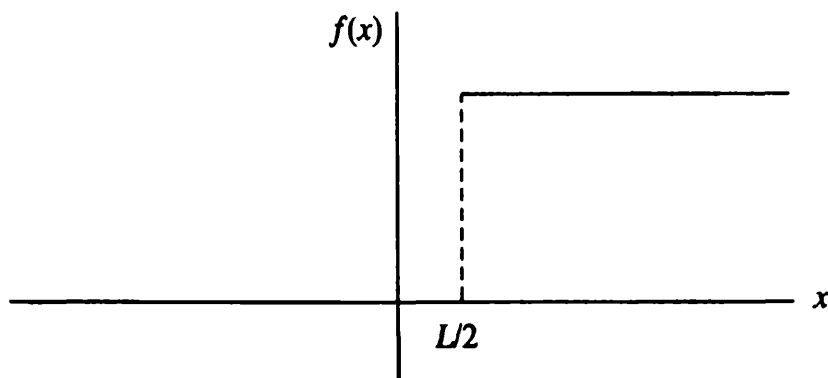
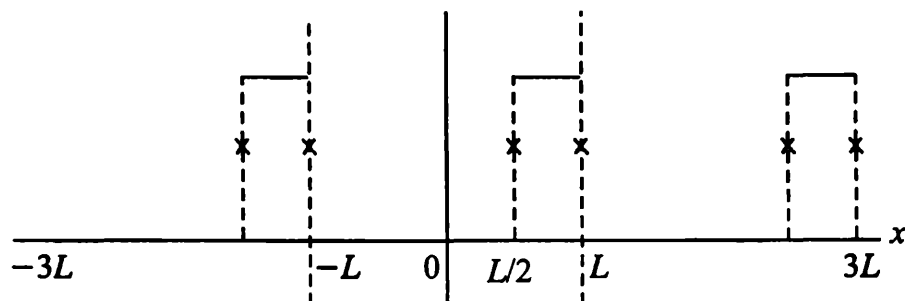
1. dibujamos $f(x)$ (preferentemente sólo para $-L \leq x \leq L$);
2. dibujamos la extensión periódica de $f(x)$.

De acuerdo con el teorema de Fourier, la serie de Fourier converge (aquí “converge” significa “es igual”) a la extensión periódica donde la extensión periódica es continua (lo que ocurrirá en casi todas partes). Sin embargo, en los puntos con discontinuidad de salto de la extensión periódica, la serie de Fourier converge a la media. Por tanto, hay un tercer paso:

3. marcamos con una cruz, “×”, el punto medio de los dos valores en todas las discontinuidades de salto de la extensión periódica.

Ejemplo. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < \frac{L}{2}, \\ 1 & x > \frac{L}{2}. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Figura 3.2.1: Dibujo de $f(x)$.Figura 3.2.2: Serie de Fourier de $f(x)$.

Nos gustaría determinar la serie de Fourier de $f(x)$ en $-L \leq x \leq L$. Comenzamos dibujando $f(x)$ para todo x en la Figura 3.2.1 (aunque sólo necesitamos el dibujo para $-L \leq x \leq L$.) Observemos que $f(x)$ es suave a trozos, luego podemos aplicar el teorema de Fourier. La extensión periódica de $f(x)$ se dibuja en la Figura 3.2.2. A menudo se comprende mejor el proceso si se dibujan al menos tres periodos completos, $-3L \leq x \leq 3L$, incluso aunque en las aplicaciones a las ecuaciones en derivadas parciales sólo sea absolutamente necesario el intervalo $-L \leq x \leq L$. La serie de Fourier de $f(x)$ es igual a la extensión periódica de $f(x)$ cuando la extensión periódica es continua (es decir, en todo x excepto en los puntos de discontinuidad de salto, que son $x = L/2, L, L/2 + 2L, -L, L/2 - 2L$, etc.). Según el teorema de Fourier, en estos puntos la serie de Fourier de $f(x)$ debe converger a la media. Estos puntos se deben marcar como en la Figura 3.2.2. En $x = L/2$ y $x = L$ (al igual que en $x = L/2 \pm 2nL$ y $x = L \pm 2nL$), la serie de Fourier converge a la media, $\frac{1}{2}$. En resumen, para este ejemplo,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = -L \\ 0 & -L < x < L/2 \\ \frac{1}{2} & x = L/2 \\ 1 & L/2 < x < L \\ \frac{1}{2} & x = L. \end{cases}$$

La serie de Fourier puede converger a funciones muy extrañas, pero no son demasiado diferentes de la función original.

Coefficientes de Fourier. Para una $f(x)$ dada, *no* es necesario calcular los coeficientes de Fourier para dibujar la serie de Fourier $f(x)$. Sin embargo, es importante saber cómo calcular los coeficientes de Fourier, dados por (3.2.2). El cálculo

de los coeficientes de Fourier requiere algunas operaciones algebraicas, que algunas veces no son más que un ejercicio de aplicación del método de integración por partes. A menudo, los cálculos se pueden simplificar usando tablas de integrales o programas de cálculo simbólico. En cualquier caso, siempre podemos utilizar un ordenador para aproximar los coeficientes numéricamente. Como ejemplo realmente sencillo, pero que ilustra algunos puntos importantes, consideremos la función $f(x)$ dada por (3.2.5). Según (3.2.2), los coeficientes son

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2L} \int_{L/2}^L dx = \frac{1}{4}, \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \int_{L/2}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big|_{L/2}^L \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{L} \int_{L/2}^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{-1}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{L/2}^L \\ &= \frac{1}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi \right). \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Omitimos aquí las simplificaciones que surgen al observar que $\operatorname{sen} n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$, y otras similares.

EJERCICIOS 3.2

3.2.1. Para las siguientes funciones, dibujar la serie de Fourier de $f(x)$ (en el intervalo $-L \leq x \leq L$). Comparar $f(x)$ con su serie de Fourier:

- | | |
|---|---|
| (a) $f(x) = 1$ | * (b) $f(x) = x^2$ |
| (c) $f(x) = 1 + x$ | * (d) $f(x) = e^x$ |
| (e) $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$ | * (f) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 + x & x > 0 \end{cases}$ |
| (g) $f(x) = \begin{cases} x & x < L/2 \\ 0 & x > L/2 \end{cases}$ | |

3.2.2. Dibujar la serie de Fourier de las siguientes funciones $f(x)$ (en el intervalo $-L \leq x \leq L$) y calcular los coeficientes de Fourier:

* (a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = e^{-x}$

* (c) $f(x) = \text{sen} \frac{\pi x}{L}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < L/2 \\ 0 & |x| > L/2 \end{cases}$

* (f) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$

3.2.3. Demostrar que la operación de calcular una serie de Fourier es lineal: es decir, demostrar que la serie de Fourier de $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ es la suma de c_1 veces la serie de Fourier de $f(x)$ y c_2 veces la serie de Fourier de $g(x)$.

3.2.4. Supongamos que $f(x)$ es suave a trozos. ¿A qué valor converge la serie de Fourier de $f(x)$ en el punto extremo $x = -L$?, ¿y en $x = L$?

3.3. Series de Fourier de senos y cosenos

En esta sección demostramos que las series que sólo contienen senos (y las que sólo contienen cosenos) son casos especiales de series de Fourier.

3.3.1. Serie de Fourier de senos

Funciones impares. Una función impar es una función con la propiedad $f(-x) = -f(x)$. El gráfico de una función impar para $x < 0$ se obtiene cambiando de signo la imagen reflejada de $f(x)$ para $x > 0$, tal como se muestra en la Figura 3.3.1. Ejemplos de funciones impares son $f(x) = x^3$ (de hecho, cualquier potencia impar) y $f(x) = \text{sen} 4x$. La integral de una función impar en un intervalo simétrico es cero (cualquier contribución que haya para $x > 0$ se cancelará con la contribución de $x < 0$).

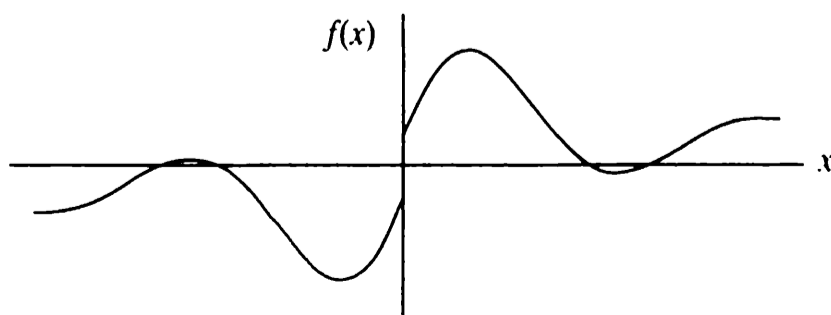


Figura 3.3.1: Una función impar.

Serie de Fourier de funciones impares. Calculemos los coeficientes de Fourier de una función impar:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

Ambos son cero porque el integrando, $f(x) \cos n\pi x/L$, es impar [al ser producto de una función par, $\cos n\pi x/L$, y una impar, $f(x)$]. Como $a_n = 0$, las funciones coseno (que son pares) no aparecerán en la serie de Fourier de una función impar. La serie de Fourier de una función impar es una serie infinita de funciones impares (senos):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.3.1)$$

si $f(x)$ es impar. En este caso las fórmulas para los coeficientes de Fourier b_n se pueden simplificar:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (3.3.2)$$

ya que la integral de una función par en un intervalo simétrico, de $-L$ a $+L$, es dos veces la integral de 0 a L . Para las funciones impares sólo necesitamos la información sobre $f(x)$ para $0 \leq x \leq L$.

Serie de Fourier de senos. Sólo ocasionalmente nos encontraremos ante una función impar a la que tengamos que calcular su serie de Fourier, pero frecuentemente aparecen series de senos en el contexto de separación de variables. Recordemos que la temperatura de una varilla unidimensional $0 < x < L$ con temperatura cero en los extremos [$u(0, t) = u(L, t) = 0$] satisface

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}, \quad (3.3.3)$$

donde la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se cumple si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.3.4)$$

Por tanto, se debe representar $f(x)$ como una serie de senos; (3.3.4) tiene la misma forma que (3.3.1). Sin embargo, existe una diferencia significativa. En (3.3.1) sabemos que $f(x)$ es una función impar definida para $-L \leq x \leq L$. En (3.3.4), $f(x)$ está sólo definida para $0 \leq x \leq L$ (pues es la distribución de temperatura inicial); $f(x)$ no es necesariamente impar. Si conocemos $f(x)$ solamente para $0 \leq x \leq L$,

entonces podemos *extenderla* como una función impar (véase la Figura 3.3.2), obteniendo otra función llamada **extensión impar de $f(x)$** . La extensión impar de $f(x)$ está definida para $-L \leq x \leq L$, y podemos aplicar el teorema de convergencia de series de Fourier [si la extensión impar de $f(x)$ es suave a trozos, lo que a su vez requiere que $f(x)$ sea suave a trozos en $0 \leq x \leq L$]. Más aún, como la extensión impar de $f(x)$ es ciertamente impar, su serie de Fourier sólo tiene senos:

$$\text{extensión impar de } f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{ sen } n\pi x/L, \quad -L \leq x \leq L,$$

donde los B_n están dados por (3.3.2). Nosotros estamos interesados solamente en lo que ocurre entre $x = 0$ y $x = L$. En esa región $f(x)$ es idéntica a su extensión impar:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{ sen } \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.3.5)$$

donde

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{ sen } \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (3.3.6)$$

Llamamos a ésta la **serie de Fourier de senos de $f(x)$** (en el intervalo $0 \leq x \leq L$). Esta serie (3.3.5) no es más que un ejemplo de serie de Fourier y, como tal, podemos aplicarle el teorema de convergencia. Debemos recordar que $f(x)$ está definida solamente para $0 \leq x \leq L$, aunque podemos pensar en ella directamente como una función impar en $-L \leq x \leq L$, utilizando la extensión anterior. La Fórmula (3.3.6) es muy importante, pero no necesitamos memorizarla. Se puede *deducir* a partir de las fórmulas para una serie de Fourier suponiendo simplemente que $f(x)$ es impar. La Fórmula (3.3.6) tiene un factor 2 porque el integrando es par y las integrales son sólo de $x = 0$ a $x = L$.

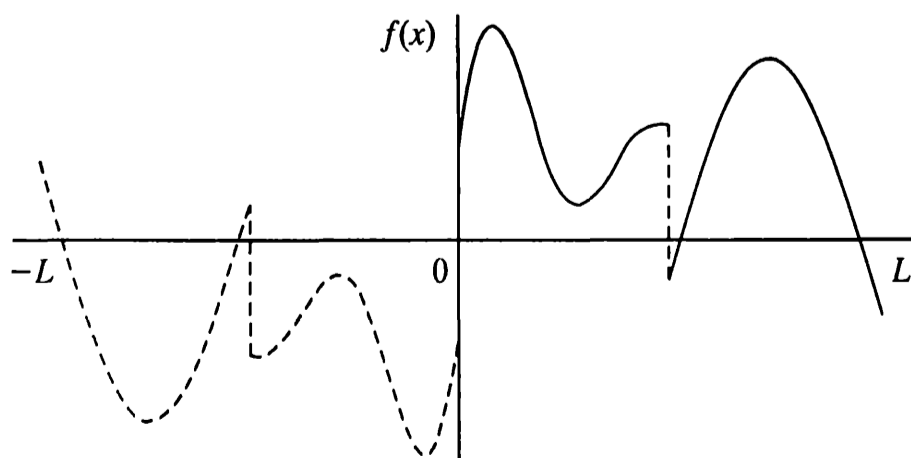


Figura 3.3.2: Extensión impar de $f(x)$.

Según el teorema de Fourier, dibujar la serie de Fourier de senos de $f(x)$ es fácil:

1. Dibujamos $f(x)$ (para $0 < x < L$).
2. Dibujamos la extensión impar de $f(x)$.
3. Extendemos como una función periódica (con periodo $2L$).
4. Marcamos con una "×" la media donde la extensión impar periódica de $f(x)$ tenga una discontinuidad de salto.

Ejemplo. Como ejemplo, mostremos cómo dibujar la serie de Fourier de senos de $f(x) = 100$. Consideramos $f(x) = 100$ sólo para $0 \leq x \leq L$. Comenzamos dibujando en la Figura 3.3.3 su extensión impar. La serie de Fourier de senos de $f(x)$ es igual a la serie de Fourier de la extensión impar de $f(x)$. En la Figura 3.3.4 repetimos periódicamente la extensión impar (con periodo $2L$). En los puntos de discontinuidad, marcamos la media con una "×". De acuerdo con el teorema de Fourier (como se muestra en la Figura 3.3.4), la serie de Fourier de senos de 100 será igual a 100 para $0 < x < L$, pero la serie no es igual a 100 en $x = 0$ ni en $x = L$:

$$100 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L. \quad (3.3.7)$$

En $x = 0$, la Figura 3.3.4 muestra que la serie de Fourier de senos converge a 0, porque en $x = 0$, al considerar la extensión impar, obtenemos la media de 100 y -100 , que es 0. Por razones similares, la serie de Fourier de senos también converge a 0 en $x = L$. Estas observaciones concuerdan con el resultado de sustituir $x = 0$ (y $x = L$) en la serie infinita de senos. Los coeficientes de Fourier se determinan mediante (3.3.6) como antes [véase (2.3.42)]

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{200}{L} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{400}{n\pi} & n \text{ impar.} \end{cases} \quad (3.3.8)$$

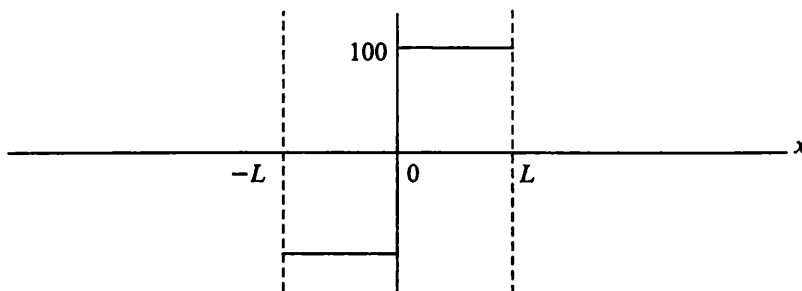


Figura 3.3.3: Extensión impar de $f(x) = 100$.

Ejemplo físico. Uno de los ejemplos más simples es la serie de Fourier de senos de una constante. Este problema apareció al intentar resolver la ecuación del calor unidimensional con condiciones de contorno nulas y temperatura inicial constante

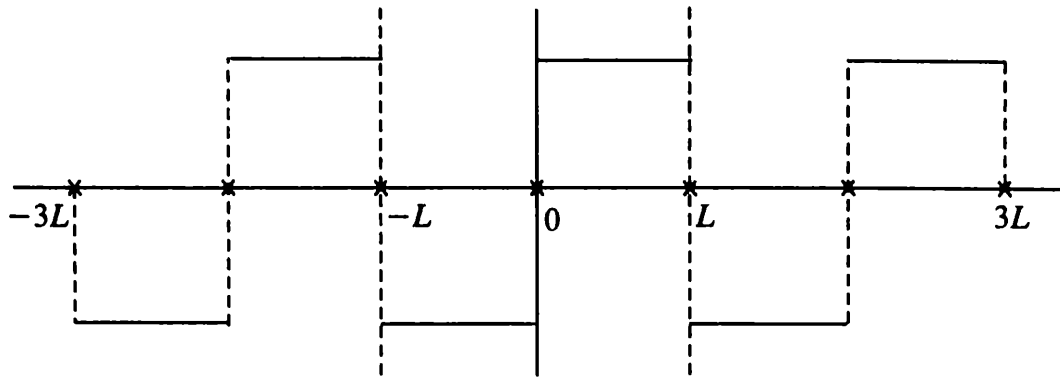


Figura 3.3.4: Serie de Fourier de senos de $f(x) = 100$.

igual a 100° :

$$\begin{aligned} \text{EDP : } \quad \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ \text{CC1 : } \quad u(0, t) &= 0, \\ \text{CC2 : } \quad u(L, t) &= 0, \\ \text{CI : } \quad u(x, 0) &= f(x) = 100^\circ \end{aligned}$$

Recordemos que vimos en la Sección 2.3 que el método de separación de variables implicaba

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}. \quad (3.3.9)$$

La condición inicial se cumple si

$$100 = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L.$$

Esta serie se puede interpretar como la serie de Fourier de senos de $f(x) = 100$ [véase (3.3.8)]. Equivalentemente, B_n se puede determinar a partir de la ortogonalidad de las funciones $\operatorname{sen} n\pi x/L$ [véase (2.3.42)].

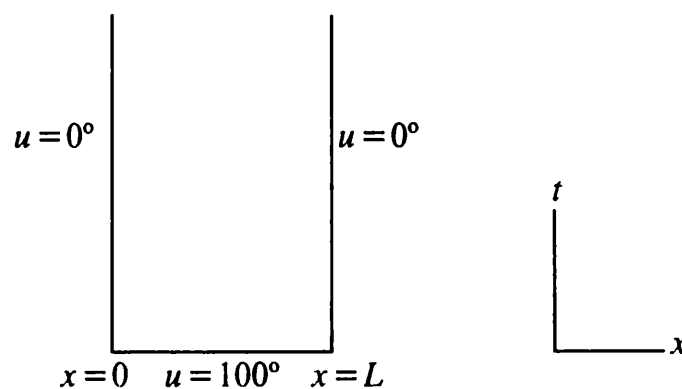


Figura 3.3.5: Condiciones iniciales y de contorno.

Matemáticamente, la serie de Fourier de la condición inicial tiene un comportamiento bastante malo en $x = 0$ (y en $x = L$). De hecho, para este problema, la situación física no está muy bien definida en $x = 0$ (en el instante $t = 0$). Esto se podría ilustrar en un diagrama espacio-tiempo (Figura 3.3.5). Observemos que la

Figura 3.3.5 demuestra que el dominio de nuestro problema es $t \geq 0$ y $0 \leq x \leq L$. Sin embargo, existe un conflicto en el punto $x = 0$, $t = 0$, entre la condición inicial y la condición de contorno. La condición inicial ($t = 0$) prescribe que la temperatura es de 100° incluso cuando $x \rightarrow 0$, mientras que la condición de contorno ($x = 0$) prescribe que la temperatura es de 0° también cuando $t \rightarrow 0$. Por tanto, el problema físico tiene una discontinuidad en $x = 0$, $t = 0$. En el mundo físico real, la temperatura no puede ser discontinua. Hemos introducido una discontinuidad en nuestro modelo matemático al hacer pasar “instantáneamente” la varilla (en $t = 0$) de un baño a 100° a otro a 0° en el punto $x = 0$. Esta operación requiere en la práctica un tiempo positivo, con lo que la temperatura es en realidad continua. No obstante, la transición de 0° a 100° ocurriría en tiempo y distancia extremadamente pequeños. Introducimos la discontinuidad en la temperatura para aproximar la situación física real, más complicada. El teorema de Fourier nos muestra cómo la discontinuidad física en $x = 0$ (inicialmente, en $t = 0$) se reproduce matemáticamente. La serie de Fourier de senos de 100° (que representa la solución física en $t = 0$) tiene la agradable propiedad de que es igual a 100° para todos los x dentro de la varilla, $0 < x < L$ (cumpliendo, por tanto, la condición inicial allí), pero es igual a 0° en los extremos, $x = 0$ y $x = L$ (cumpliendo así las condiciones de contorno). La serie de Fourier de senos de 100° es una función matemática extraña, pero también lo es la aproximación física para la que se necesita.

Cálculo de una serie de Fourier y fenómeno de Gibbs. Para familiarizarnos con las series de Fourier y sus aplicaciones, consideremos la serie de Fourier de senos de $f(x) = 100$,

$$100 = \frac{400}{\pi} \left(\frac{\text{sen } \pi x/L}{1} + \frac{\text{sen } 3\pi x/L}{3} + \frac{\text{sen } 5\pi x/L}{5} + \dots \right). \quad (3.3.10)$$

¿Es creíble la fórmula (3.3.10)? Ciertamente, no es válida en $x = 0$ (ni tampoco en el otro extremo, $x = L$), ya que en $x = 0$ todos los términos de la serie son nulos (no pueden, por tanto, sumar 100). Sin embargo, la teoría de las series de Fourier nos asegura que (3.3.10) es válida en todo punto excepto en los dos extremos. Por ejemplo, es válida en $x = L/2$. Sustituyendo $x = L/2$ en (3.3.10) vemos que

$$100 = \frac{400}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right) \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

A primera vista esta fórmula puede resultar extraña, pero de hecho es la famosa fórmula de Euler para π . Se puede usar para *aproximar* π (aunque de forma poco eficiente); también se puede demostrar que es cierta sin recurrir a la teoría de series trigonométricas infinitas (véase el Ejercicio 3.3.17). La validez de (3.3.10) para otros valores de x , $0 < x < L$, puede también sorprender. Dibujemos el lado izquierdo y el derecho de (3.3.10), esperando convencernos de la igualdad. Esbozaremos la gráfica del miembro derecho añadiendo sucesivamente la contribución de cada término de la serie. Desde luego, no podemos sumar toda la serie infinita; nos pararemos en una cantidad finita de términos. De hecho, dibujaremos la suma de los primeros términos

para ver cómo la serie se aproxima a la constante 100 a medida que el número de términos aumenta. Es útil saber que $400/\pi = 127,32395\dots$ (aunque para un esquema aproximado nos servirán también los valores 125 ó 130). El primer término, $(400/\pi) \sin \pi x/L$, es la primera función seno, con una gráfica que sube y baja; no es una buena aproximación a la constante 100, como vemos en la Figura 3.3.6. Por otro lado, para ser sólo un término de una serie infinita no es tan mala aproximación. El siguiente término a sumar es $(400/3\pi) \sin 3\pi x/L$. Ésta es una oscilación sinusoidal con un tercio de la amplitud y un tercio del periodo del primer término. Es positivo cerca de $x = 0$ y $x = L$, donde la aproximación necesita crecer, y es negativo cerca de $x = L/2$, donde la aproximación necesita decrecer. En la Figura 3.3.7 se representa con una línea de puntos este segundo sumando, así como su suma con el primer término. Observemos que la suma de los dos primeros términos no nulos ya parecen constituir una mejora considerable respecto del primer término. En las Figuras 3.3.6 a 3.3.9 presentamos las gráficas (generadas por ordenador) de algunas sumas parciales.

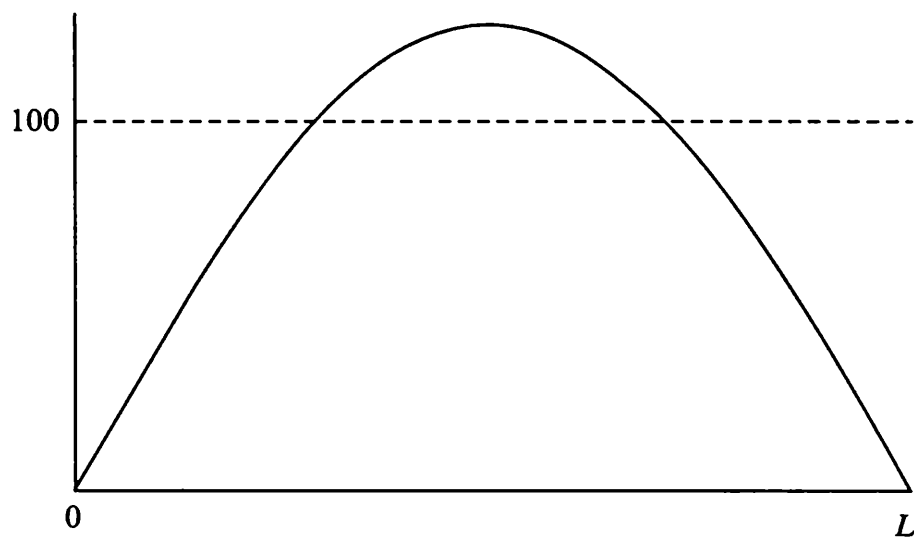


Figura 3.3.6: Primer término de la serie de Fourier de senos de $f(x) = 100$.

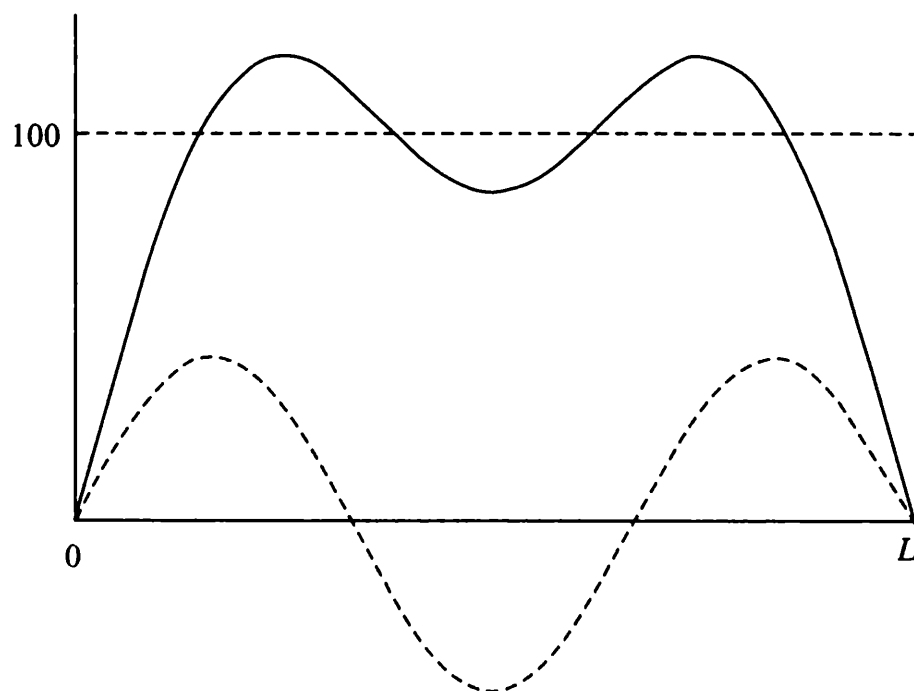


Figura 3.3.7: Primeros dos términos no nulos de la serie de Fourier de senos de $f(x) = 100$.

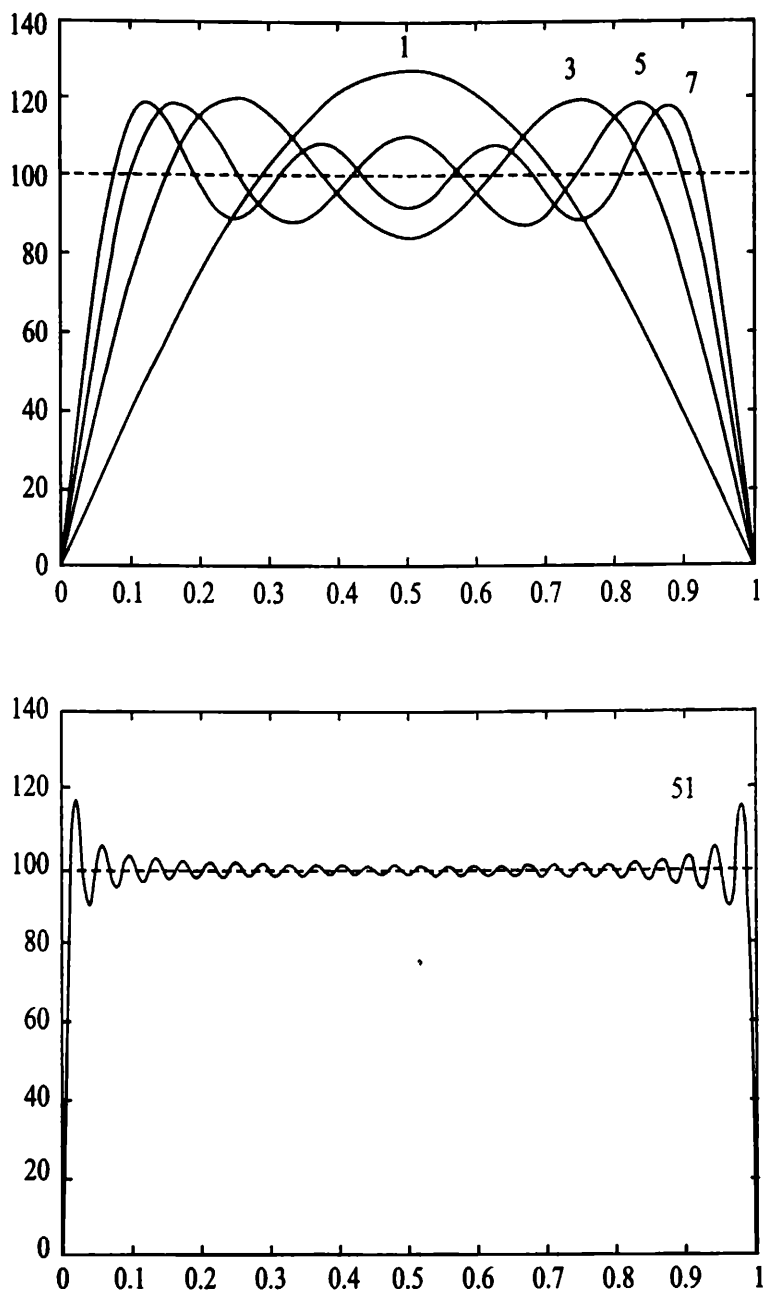


Figura 3.3.8: Varias sumas parciales de la serie de Fourier de senos de $f(x) = 100$. Utilizando 51 términos, la suma finita es una buena aproximación a $f(x) = 100$ lejos de los extremos. Cerca de ellos (donde hay una discontinuidad de salto de 200), el sobrepaso es del 9% (fenómeno de Gibbs).

Realmente podemos aprender mucho de la Figura 3.3.8. Quizá ahora parezca razonable creer que la serie infinita converge a 100 para $0 < x < L$. Los peores sitios (es decir, donde la suma finita difiere más del valor 100), están cada vez más cerca de $x = 0$ y $x = L$ según el número de términos aumenta. *Para una cantidad finita de términos de la serie*, la solución comienza en cero en $x = 0$ y se dispara por encima de 100, es lo que llamamos el **sobrepaso** o **exceso** (en inglés *overshoot*) primario. Es interesante ver cómo la Figura 3.3.8 ilustra claramente el sobrepaso. Podemos incluso extrapolar para imaginar lo que ocurre para 1000 términos. La serie será más y más precisa según el número de términos aumenta. Podríamos

esperar que el sobrepaso desapareciera cuando $n \rightarrow \infty$, pero por el contrario, se forma un pico en los puntos de máximo sobrepaso, donde la solución no parece que se aproxime a 100, sino que toma valores próximos a 118. Este sobrepaso es un ejemplo del llamado **fenómeno de Gibbs**. En general (para n grande), existe un exceso (y el correspondiente defecto (*undershoot*)) de aproximadamente el 9% de la discontinuidad de salto. En este caso (véase la Figura 3.3.4), la serie de Fourier de senos de $f(x) = 100$ salta de -100 a $+100$ en $x = 0$. Por tanto, la suma finita sobrepasará el valor esperado en alrededor de un 9% de 200, aproximadamente 18. El fenómeno de Gibbs ocurre sólo cuando una serie *finita* de autofunciones aproxima a una función *discontinua*.

Otro ejemplo de una serie de Fourier de senos. Consideremos la serie de Fourier de senos de $f(x) = x$. La gráfica de $f(x) = x$ está dibujada en el intervalo $0 \leq x \leq L$ en la Figura 3.3.9(a), así como su extensión impar periódica en la 3.3.9(b). La discontinuidad de salto de la extensión impar periódica en $x = (2n-1)L$ muestra que, por ejemplo, la serie de Fourier de senos de $f(x) = x$ converge a cero en $x = L$, mientras que $f(L) \neq 0$. Notemos que la serie de Fourier de senos de $f(x) = x$ realmente es igual a x para $-L < x < L$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad -L < x < L. \quad (3.3.11)$$

Podemos determinar los coeficientes de Fourier mediante la fórmula (3.3.6),

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad (3.3.12)$$

evaluando la integral, por ejemplo, por partes.

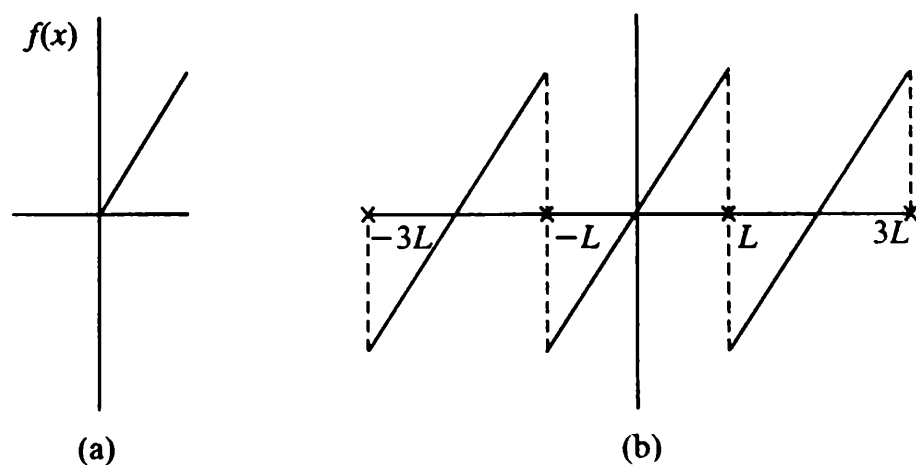


Figura 3.3.9: (a) $f(x) = x$, y (b) su serie de Fourier de senos.

Ejemplo. Consideremos ahora la serie de Fourier de senos de $f(x) = \cos \pi x/L$. Puede parecer que lo que se pide es un desarrollo en serie de senos de una función par, pero en las aplicaciones a menudo la función sólo está dada en $0 \leq x \leq L$ y *debemos* desarrollarla en serie de senos debido a las condiciones de contorno. En la Figura 3.3.10(a) mostramos la gráfica de $\cos \pi x/L$, y en la 3.3.10(b) la de su extensión impar. La serie de Fourier de senos de $f(x)$ es igual a la serie de Fourier

de la extensión impar de $f(x)$. Por tanto, repetimos el dibujo de la Figura 3.3.10(b) periódicamente (véase la Figura 3.3.11), situando el símbolo “x” en la media de los dos valores en las discontinuidades de salto. La representación en serie de Fourier de senos de $\cos \pi x/L$ es

$$\cos \frac{\pi x}{L} \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L,$$

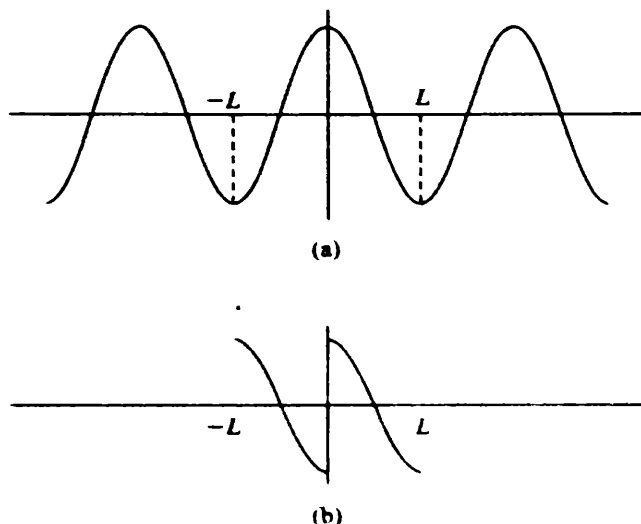


Figura 3.3.10: (a) $f(x) = \cos \pi x/L$, y (b) su extensión impar.

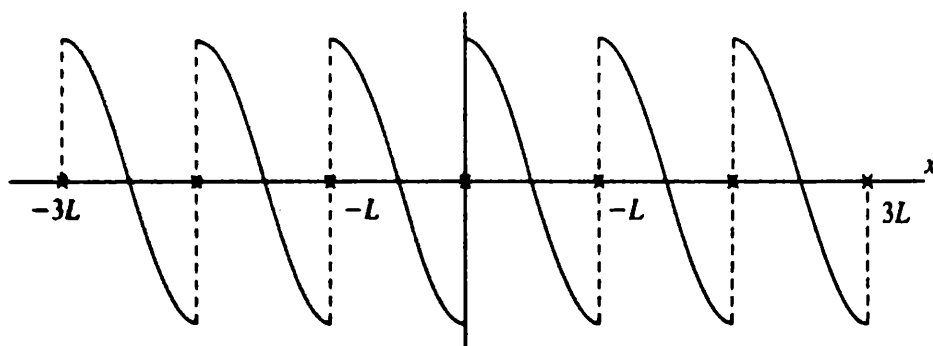


Figura 3.3.11: Serie de Fourier de senos de $f(x) = \cos \pi x/L$.

donde con cierto esfuerzo obtenemos

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \cos \frac{\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ \frac{4n}{\pi(n^2-1)} & n \text{ par.} \end{cases} \quad (3.3.13)$$

De acuerdo con la Figura 3.3.11 (basada en el teorema de convergencia de series de Fourier), se da la igualdad entre la función y sus serie de Fourier de senos, en el intervalo $0 < x < L$, pero no en los extremos $x = 0$ y $x = L$:

$$\cos \frac{\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L.$$

En $x = 0$ y en $x = L$ la serie debe converger a 0, ya que todos los términos de la serie son nulos. La Figura 3.3.11 concuerda con esto. Puede que estemos un poco confundidos por un aspecto de este problema, pues recordemos que $\sin n\pi x/L$ es ortogonal a $\cos m\pi x/L$, y por tanto esperábamos que todos los B_n de (3.3.12) fueran cero. Sin embargo, $B_n \neq 0$. La sutileza consiste en que debemos recordar que $\cos m\pi x/L$ y $\sin n\pi x/L$ son ortogonales en el intervalo $-L \leq x \leq L$, $\int_{-L}^L \cos m\pi x/L \sin n\pi x/L dx = 0$, pero no lo son en el intervalo $0 \leq x \leq L$.

3.3.2. Series de Fourier de cosenos

Funciones pares. Ideas similares son válidas para las funciones pares, en las que $f(-x) = f(x)$. Desarrollemos los resultados básicos. Los coeficientes de las funciones seno de una serie de Fourier serán cero para una función par,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0,$$

ya que en ese caso $f(x) \sin n\pi x/L$ es impar. La serie de Fourier de una función par es una representación de $f(x)$ mediante una suma formada exclusivamente por funciones pares (cosenos):

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.3.14)$$

Los coeficientes de los cosenos se pueden evaluar utilizando información sobre $f(x)$ sólo entre $x = 0$ y $x = L$, ya que

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad (3.3.15)$$

$$(n \geq 1) \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (3.3.16)$$

utilizando el hecho de que si $f(x)$ es par, entonces $f(x) \cos n\pi x/L$ también lo es.

A menudo la función dada $f(x)$ no es una función par. Usualmente, al tratar de representar una función arbitraria $f(x)$ usando una serie infinita de funciones $\cos n\pi x/L$, que son las autofunciones del problema de contorno $d^2\phi/dx^2 = -\lambda\phi$ con $d\phi/dx(0) = 0$ y $d\phi/dx(L) = 0$, queríamos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.3.17)$$

sólo para $0 < x < L$. Habíamos determinado previamente que los coeficientes A_n son los mismos que los dados por (3.3.15) y (3.3.16), pero la razón era la ortogonalidad de las funciones $\cos n\pi x/L$. Para relacionar (3.3.17) con una serie de Fourier, simplemente introducimos la **extensión par de $f(x)$** (véase un ejemplo en la Figura 3.3.12). Si $f(x)$ es suave a trozos en $0 \leq x \leq L$, entonces su extensión par lo

será también, por lo que podemos aplicar el teorema de convergencia de series de Fourier a la extensión par de $f(x)$, y ya que tal extensión es una función par, su serie de Fourier contendrá sólo cosenos:

$$\text{extensión par de } f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad -L \leq x \leq L,$$

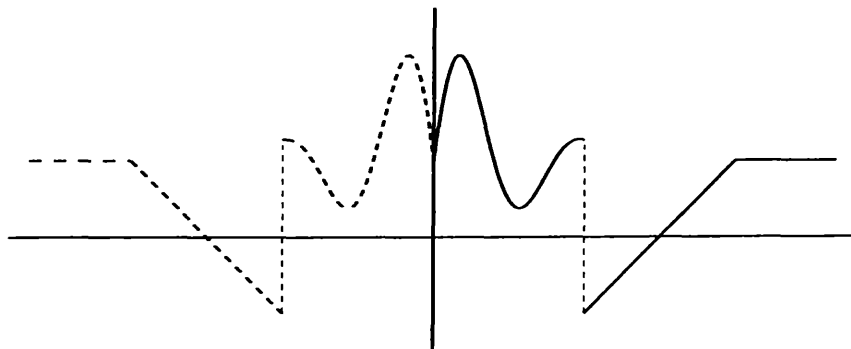


Figura 3.3.12: Extensión par de $f(x)$.

donde los coeficientes a_n están dados por (3.3.15) y (3.3.16). En el intervalo de interés, $0 \leq x \leq L$, la función $f(x)$ es idéntica a su extensión par. La serie resultante en ese intervalo se denomina **serie de Fourier de cosenos de $f(x)$** (en el intervalo $0 \leq x \leq L$):

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.3.18)$$

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad (3.3.19)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (3.3.20)$$

La serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ es exactamente la serie de Fourier de la extensión par de $f(x)$. Como podemos aplicar el teorema de convergencia de series de Fourier, podemos dibujar la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ mediante el siguiente esquema:

1. dibujamos $f(x)$ (para $0 < x < L$);
2. dibujamos la extensión par de $f(x)$;
3. la extendemos como función periódica (con periodo $2L$);
4. marcamos con una "×" la media en los puntos de discontinuidad.

Ejemplo. Consideremos la serie de Fourier de cosenos de $f(x) = x$, función que representamos en la Figura 3.3.13(a) (notemos que $f(x)$ es impar). Consideramos $f(x)$ sólo desde $x = 0$ a $x = L$ y la extendemos como función par en la Figura 3.3.13(b). A continuación dibujamos la serie de Fourier de la extensión par, extendiéndola periódicamente (véase la Figura 3.3.14). Observemos que entre $x = 0$ y $x = L$ la serie de Fourier de cosenos no tiene discontinuidades de salto. La serie de Fourier de cosenos de $f(x) = x$ es en realidad igual a x , luego

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.3.21)$$

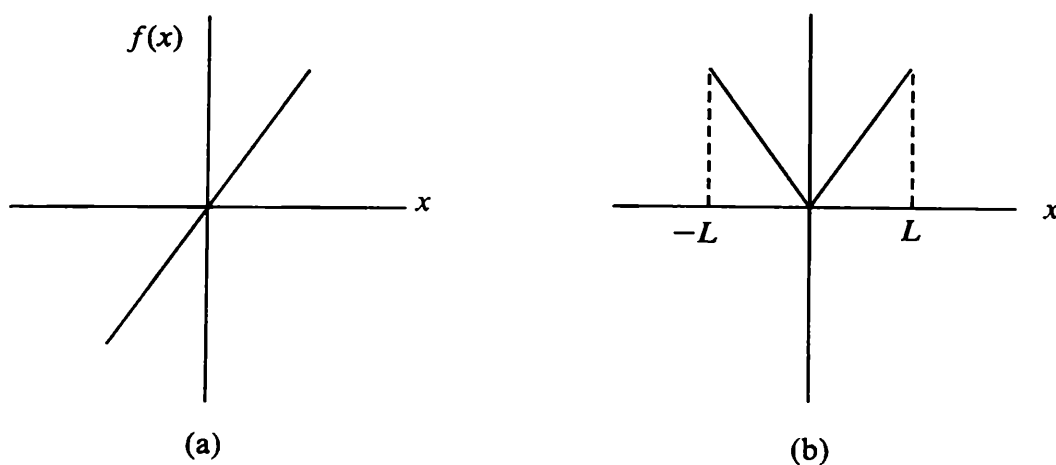


Figura 3.3.13: (a) $f(x) = x$, y (b) su extensión par.

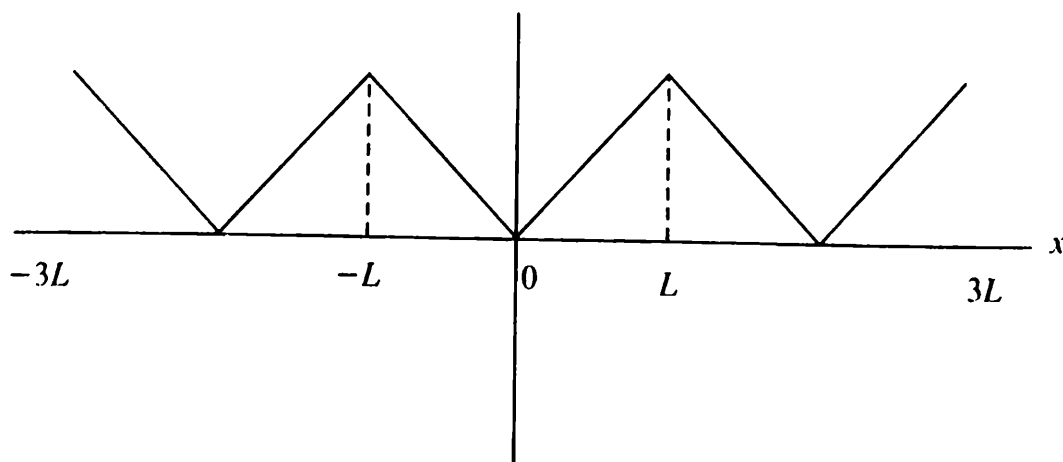


Figura 3.3.14: Serie de Fourier de cosenos de la extensión par de $f(x)$.

Los coeficientes están dados por las siguientes integrales:

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L x \, dx = \frac{1}{L} \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^L = \frac{L}{2}, \quad (3.3.22)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx = \frac{2L}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1). \quad (3.3.23)$$

La última integral se puede evaluar integrando por partes, utilizando tablas o algún programa de cálculo simbólico. Omitimos los detalles.

3.3.3. Representación de $f(x)$ en serie de senos y cosenos

Puede parecer evidente que cualquier función $f(x)$ (que sea suave a trozos) se puede representar a la vez como serie de Fourier de senos y como serie de Fourier de cosenos. El tipo de serie elegido vendrá determinado por las condiciones de contorno (si el problema surge en el contexto de resolver una ecuación en derivadas parciales utilizando el método de separación de variables). También es posible utilizar series de Fourier que incluyen senos y cosenos. Como ejemplo, consideremos las gráficas de la serie de Fourier, serie de Fourier de senos y serie de Fourier de cosenos de

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{L}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} & x < 0 \\ x & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L - x & x > \frac{L}{2}. \end{cases}$$

La gráfica de $f(x)$ está dibujada para $-L < x < L$ en la Figura 3.3.15. La serie de Fourier de $f(x)$ se dibuja repitiendo este esquema con periodo $2L$. Por otro lado, la serie de Fourier de senos (o de cosenos) se obtiene dibujando primero la extensión impar (o par) de la función $f(x)$ antes de repetir el esquema por periodicidad. Las tres series están dibujadas en la Figura 3.3.16. Observemos que para $-L \leq x \leq L$ sólo la serie de Fourier de $f(x)$ es realmente igual a $f(x)$. Sin embargo, en los tres casos la serie es igual a $f(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq L$.

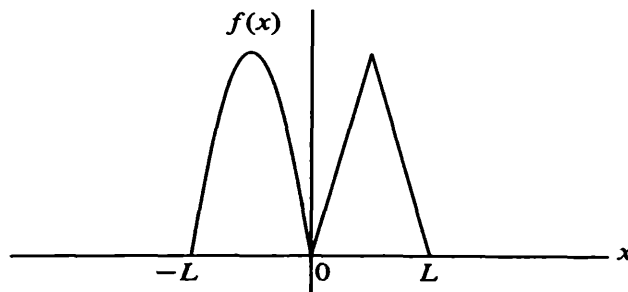


Figura 3.3.15: Gráfico de $f(x)$ para $-L < x < L$.

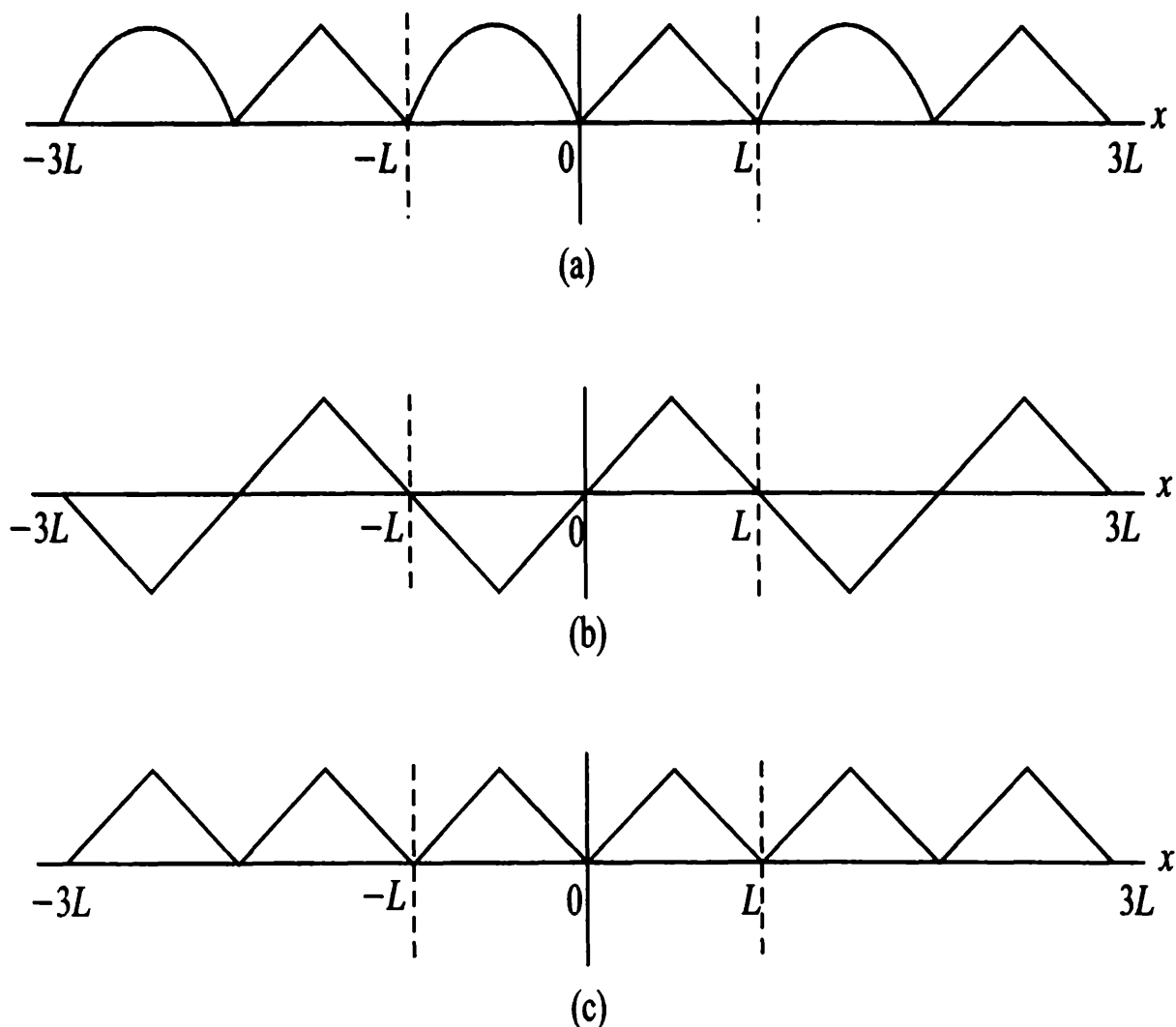


Figura 3.3.16: (a) Serie de Fourier de $f(x)$; (b) serie de Fourier de senos de $f(x)$; (c) serie de Fourier de cosenos de $f(x)$.

3.3.4. Partes par e impar

Consideremos la serie de Fourier de una función $f(x)$ que no es necesariamente par ni impar:

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.3.24)$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Es interesante ver que una serie de Fourier es la suma de una serie de cosenos y una serie de senos. Pero, por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x/L$ no es en general la serie de Fourier de senos de $f(x)$, porque los coeficientes, $b_n = 1/L \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} n\pi x/L dx$, no son en general los mismos que los coeficientes de una serie de Fourier de senos, $2/L \int_0^L f(x) \operatorname{sen} n\pi x/L dx$. Esta serie de senos debería ser por sí misma la serie de Fourier de senos de alguna función; calculemos esta función.

La Ecuación (3.3.24) muestra que $f(x)$ está representada como una suma de funciones pares (porque la serie de cosenos debe ser una función par) y una función impar (similarmente, la serie de senos debe ser impar). Esto es una propiedad general de las funciones, pues para cualquier función es bastante obvio que

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]. \quad (3.3.25)$$

Notemos que el primer término es una función par, que llamamos **parte par de $f(x)$** . El segundo término es una función impar, que llamamos **parte impar de $f(x)$** :

$$f_p(x) \equiv \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] \quad \text{y} \quad f_i(x) \equiv \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]. \quad (3.3.26)$$

De esta forma, cualquier función se escribe como la suma de una función impar (la parte impar) y una función par (la parte par). Por ejemplo, si $f(x) = 1/(1+x)$,

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} \right] = \frac{1}{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2}.$$

Esto es la suma de una función par, $1/(1-x^2)$, y una función impar, $-x/(1-x^2)$. Consecuentemente, la serie de Fourier de $f(x)$ es igual a la serie de Fourier de $f_p(x)$ [que es una serie de cosenos porque $f_p(x)$ es par], más la serie de Fourier de $f_i(x)$ [que es una serie de senos ya que $f_i(x)$ es impar]. Esto demuestra que la serie de senos (o cosenos) que aparece en (3.3.24) es la serie de Fourier de senos (o de cosenos) de $f_i(x)$ ($f_p(x)$). Resumimos nuestro resultado con el enunciado:

La serie de Fourier de $f(x)$ es igual a la serie de Fourier de senos de $f_i(x)$ más la serie de Fourier de cosenos de $f_p(x)$, donde $f_p(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)]$, y $f_i(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$.

Hay que tener cuidado de no confundir este resultado con las *extensiones* par e impar. Por ejemplo, la *parte par de $f(x)$* es $f_p(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)]$, mientras que:

$$\text{extensión par de } f(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

3.3.5. Series de Fourier continuas

El teorema de convergencia de las series de Fourier muestra que la serie de Fourier de $f(x)$ puede ser una función diferente de $f(x)$. Sin embargo, en el intervalo de interés, ambas funciones coinciden excepto en los pocos puntos en que la extensión periódica de $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto. Las series de senos (y de cosenos) tienen el mismo comportamiento, pero en lugar de $f(x)$ hay que considerar la extensión impar (o par) de la función. Además de los puntos de discontinuidad

de salto de la propia $f(x)$, las distintas extensiones de la función pueden introducir otras discontinuidades de salto. Por los ejemplos de la sección precedente observamos que *algunas veces* la serie resultante no tiene ninguna discontinuidad de salto. En estos casos, la serie de Fourier de $f(x)$ será igual a $f(x)$ en el intervalo de interés. En ese caso, la serie de Fourier misma será una función continua.

Merece la pena resumir las condiciones bajo las cuales una serie de Fourier es continua:

Para una función $f(x)$ suave a trozos, su serie de Fourier es continua en $-L \leq x \leq L$ si y sólo si $f(x)$ es continua y $f(-L) = f(L)$.

Es necesario que $f(x)$ sea continua; de otro modo habrá discontinuidades de salto [y la serie de Fourier de $f(x)$ convergerá a la media]. En la Figura 3.3.17 ilustramos el significado de la condición $f(-L) = f(L)$, mostrando dos funciones *continuas*, de las cuáles sólo una de ellas satisface $f(-L) = f(L)$. La condición $f(-L) = f(L)$ garantiza que el esquema repetido periódicamente (con periodo $2L$) sea continuo en los puntos extremos. El enunciado que hemos recuadrado más arriba es un resultado fundamental para las series de Fourier. Explica los siguientes teoremas similares para las series de Fourier de senos y de cosenos.

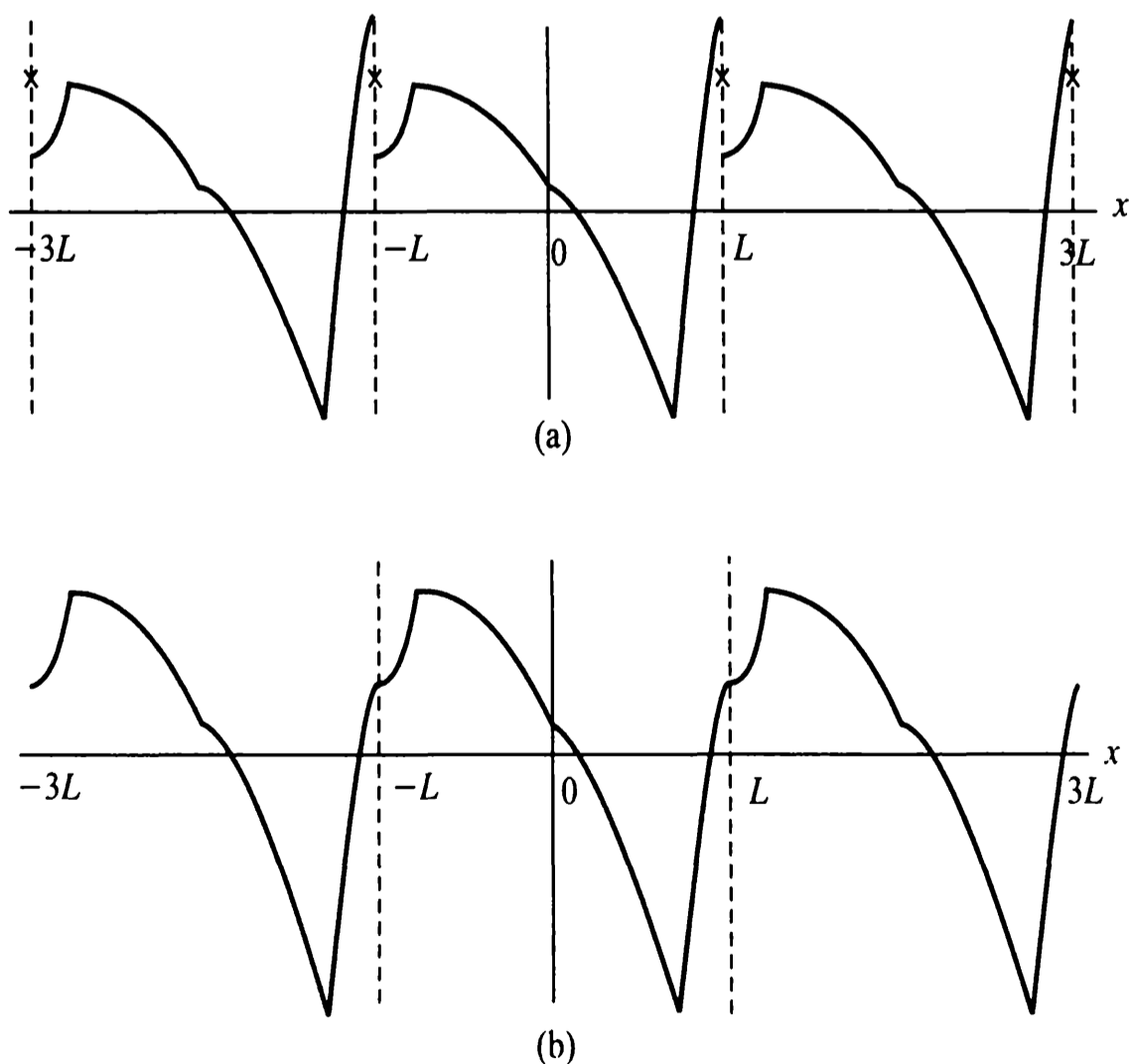


Figura 3.3.17: Serie de Fourier de una función continua con (a) $f(-L) \neq f(L)$, y (b) $f(-L) = f(L)$.

Consideremos la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ (función que ya ha sido extendida de forma par). Si $f(x)$ es continua, ¿es continua la serie de Fourier de cosenos? Un ejemplo que es continuo en $0 \leq x \leq L$ se muestra en la Figura 3.3.18. En primer lugar, extendemos $f(x)$ de forma par y luego periódicamente. Vemos fácilmente que:

Para una función $f(x)$ suave a trozos, la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ es continua en $0 \leq x \leq L$ si y sólo si $f(x)$ es continua.

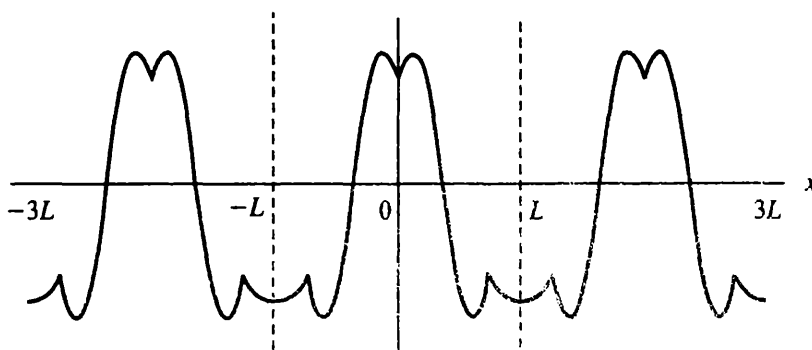


Figura 3.3.18: Serie de Fourier de cosenos de una función continua.

Observemos que no son necesarias condiciones adicionales sobre $f(x)$ para que la serie de cosenos sea continua [además de que $f(x)$ sea continua]. Una razón para este resultado es que si $f(x)$ es continua en $0 \leq x \leq L$, entonces la extensión par será continua en $-L \leq x \leq L$. Notemos también que la extensión par toma el mismo valor en $\pm L$. Por tanto, la extensión periódica será automáticamente continua en los puntos extremos.

Comparemos este resultado con lo que ocurre con una serie de Fourier de senos. En la Figura 3.3.19 se consideran cuatro ejemplos, todos ellos con funciones continuas en $0 \leq x \leq L$. En las tres primeras figuras comprobamos que puede ocurrir que la serie de Fourier de senos de una función sea discontinua. Vemos que:

Para funciones $f(x)$ suaves a trozos, la serie de Fourier de senos es continua en $0 \leq x \leq L$ si y sólo si $f(x)$ es continua, y se tiene $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$.

Si $f(0) \neq 0$, entonces la extensión impar de $f(x)$ tendrá una discontinuidad de salto en $x = 0$, como se ilustra en las Figuras 3.3.19(a) y (c). Si $f(L) \neq 0$, entonces la extensión impar en $x = -L$ tendrá signo contrario de $f(L)$, con lo que la extensión periódica no será continua en los puntos finales si $f(L) \neq 0$, como puede verse en las Figuras 3.3.19(a) y (b).

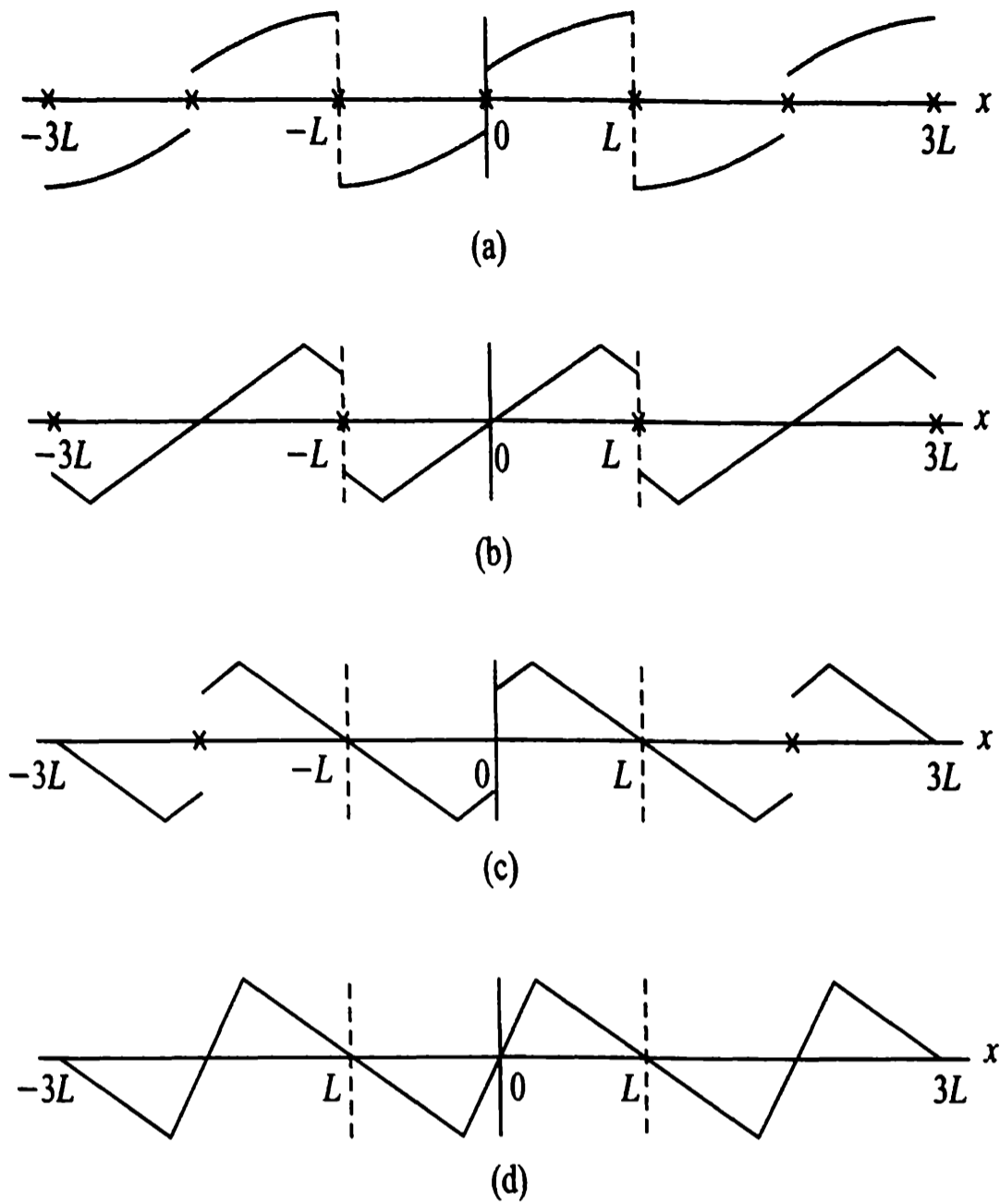


Figura 3.3.19: Serie de Fourier de senos de una función continua con: (a) $f(0) \neq 0$ y $f(L) \neq 0$; (b) $f(0) = 0$ pero $f(L) \neq 0$; (c) $f(L) = 0$ pero $f(0) \neq 0$; y (d) $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$.

EJERCICIOS 3.3

3.3.1. Para las siguientes funciones, dibujar $f(x)$, la serie de Fourier de $f(x)$, la serie de Fourier de senos de $f(x)$ y la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$:

(a) $f(x) = 1$

(b) $f(x) = 1 + x$

(c) $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 1 + x & x > 0 \end{cases}$

* (d) $f(x) = e^x$

(e) $f(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$

3.3.2. Dibujar para las siguientes funciones la serie de Fourier de senos y determinar sus coeficientes de Fourier:

$$(a) f(x) = \cos \pi x/L \quad [comprobar la fórmula (3.3.13)]$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} 1 & x < L/6 \\ 3 & L/6 < x < L/2 \\ 0 & x > L/2 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 0 & x < L/2 \\ x & x > L/2 \end{cases}$$

$$*(d) f(x) = \begin{cases} 1 & x < L/2 \\ 0 & x > L/2 \end{cases}$$

3.3.3. Dibujar la serie de Fourier de senos de las siguientes funciones. Dibujar también, aproximadamente, la suma de una cantidad *finita* de términos no nulos (por lo menos los dos primeros) de la serie de Fourier de senos:

(a) $f(x) = \cos \pi x/L$ [usar la fórmula (3.3.13)].

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 & x < L/2 \\ 0 & x > L/2 \end{cases}$

(c) $f(x) = x$ [usar la fórmula (3.3.12)].

3.3.4. Dibujar la serie de Fourier de cosenos de $f(x) = \sin \pi x/L$. Analizar brevemente.

3.3.5. Para las siguientes funciones, dibujar la serie de Fourier de cosenos y calcular sus coeficientes de Fourier:

$$(a) f(x) = x^2, \quad (b) f(x) = \begin{cases} 1 & x < L/6 \\ 3 & L/6 < x < L/2 \\ 0 & x > L/2 \end{cases}, \quad (c) f(x) = \begin{cases} 0 & x < L/2 \\ x & x > L/2 \end{cases}$$

3.3.6. Dibujar la serie de Fourier de cosenos de las siguientes funciones. También dibujar aproximadamente la suma de un número finito de términos no nulos (por lo menos los dos primeros) de la serie de Fourier de cosenos:

(a) $f(x) = x$ [usar las fórmulas (3.3.22) y (3.3.23)].

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < L/2 \\ 1 & x > L/2 \end{cases}$ [usar las fórmulas (3.2.6) y (3.2.7)].

(c) $f(x) = \begin{cases} 1 & x < L/2 \\ 0 & x > L/2 \end{cases}$ [sumar las funciones de los apartados (b) y (c)].

3.3.7. Demostrar que e^x es la suma de una función par y una impar.

3.3.8. (a) Obtener una fórmula para la extensión par de cualquier función $f(x)$. Comparar con la fórmula de la parte par de $f(x)$.

(b) Hacer lo mismo con la extensión impar de $f(x)$ y la parte par de $f(x)$.

(c) Calcular y dibujar las cuatro funciones de los apartados (a) y (b) si

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

Sumar gráficamente las partes par e impar de $f(x)$. ¿Qué ocurre? Similarmen-
te, sumar las extensiones par e impar. ¿Qué ocurre entonces?

3.3.9. ¿Cuál es la suma de la serie de Fourier de senos y la de cosenos de $f(x)$? ¿Cuál es la suma de las extensiones par e impar de $f(x)$?

***3.3.10.** Si $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ e^{-x} & x > 0 \end{cases}$, cuáles son las partes par e impar de $f(x)$?

3.3.11. Dada la gráfica de $f(x)$, describir un procedimiento para dibujar las partes par e impar de $f(x)$.

3.3.12. (a) Demostrar gráficamente que los términos pares (n par) de la serie de Fourier de senos de cualquier función en $0 \leq x \leq L$ son impares (antisimétricos) alrededor de $x = L/2$.

(b) Considerar una función $f(x)$ que es impar alrededor de $x = L/2$. Demostrar que los coeficientes impares (n impar) de la serie de Fourier de senos de $f(x)$ en $0 \leq x \leq L$ son nulos.

***3.3.13.** Considerar una función $f(x)$ que es par alrededor de $x = L/2$. Demostrar que los coeficientes pares (n par) de la serie de Fourier de senos de $f(x)$ en $0 \leq x \leq L$ son nulos.

3.3.14. (a) Considerar una función $f(x)$ que es par alrededor de $x = L/2$. Demostrar que los coeficientes impares (n impar) de la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ en $0 \leq x \leq L$ son nulos.

(b) Explicar el resultado del apartado (a) considerando una serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq L/2$.

3.3.15. Considerar una función $f(x)$ que es impar alrededor de $x = L/2$. Demostrar que los coeficientes pares (n par) de la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ en $0 \leq x \leq L$ son nulos.

3.3.16. Se pueden definir series de Fourier en intervalos distintos de $-L \leq x \leq L$. Supongamos que $g(y)$ está definida para $a \leq y \leq b$. Representar $g(y)$ usando funciones trigonométricas periódicas con periodo $b - a$. Determinar fórmulas para los coeficientes. *Indicación:* usar la transformación lineal,

$$y = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2L}x.$$

3.3.17. Considérese la integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

- (a) Evaluarla explícitamente.
- (b) Usar la serie de Taylor de $1/(1+x^2)$ (que es una serie geométrica) para obtener una expresión como serie infinita para la integral.
- (c) Igualar los resultados de los apartados (a) y (b) para obtener una fórmula para π .

3.3.18. Para funciones continuas:

- (a) ¿Bajo qué condiciones es $f(x)$ igual a su serie de Fourier para todo x , $-L \leq x \leq L$?
- (b) ¿Bajo qué condiciones es $f(x)$ igual a su serie de Fourier de senos para todo x , $0 \leq x \leq L$?
- (c) ¿Bajo qué condiciones es $f(x)$ igual a su serie de Fourier de cosenos para todo x , $0 \leq x \leq L$?

3.4. Diferenciación término a término de series de Fourier

Al resolver ecuaciones en derivadas parciales por el método de separación de variables, las condiciones de contorno homogéneas algunas veces sugieren que la solución deseada es o bien una serie infinita de senos o de cosenos. Por ejemplo, consideremos la ecuación del calor unidimensional con condiciones de contorno cero. Como antes, queremos resolver el problema de valor inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.4.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x). \quad (3.4.2)$$

Por el método de separación de variables, combinado con el principio de superposición (tomando una combinación lineal *finita* de soluciones), sabemos que la función

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt},$$

satisface la ecuación en derivadas parciales y las dos condiciones de contorno homogéneas. Para cumplir las condiciones iniciales necesitamos una serie infinita. ¿Resuelve la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt} \quad (3.4.3)$$

nuestro problema? La teoría de series de Fourier de senos demuestra que los coeficientes de Fourier B_n se pueden determinar para que se cumpla cualquier condición

inicial (suave a trozos) [tenemos $B_n = 2/L \int_0^L f(x) \operatorname{sen} n\pi x/L dx$]. Para ver si la serie infinita cumple realmente la ecuación en derivadas parciales, sustituimos (3.4.3) en (3.4.1). Si la serie de Fourier infinita se puede derivar término a término, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{\infty} k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt},$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-(n\pi/L)^2 kt}.$$

Por tanto, la serie infinita de Fourier obtenida por el método de separación de variables cumple la ecuación del calor ($\partial u/\partial t = k\partial^2 u/\partial x^2$) si es válida la derivación término a término de una serie de Fourier.

Diferenciación término a término de series infinitas. Desafortunadamente, las series infinitas (incluso las series convergentes) no siempre se pueden derivar término a término, es decir, no siempre es cierto que

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{du_n}{dx};$$

el intercambio de operaciones entre la diferenciación y la suma infinita no siempre está justificado. Sin embargo, encontraremos que al resolver ecuaciones en derivadas parciales todas las operaciones que hemos realizado con las series de Fourier infinitas son válidas. Enunciaremos y probaremos algunos teoremas sobre la validez de la diferenciación término a término de las series de Fourier que aparecen al resolver ecuaciones en derivadas parciales.

Contraejemplo. Incluso para las series de Fourier, la diferenciación término a término no siempre es válida. Para ilustrar la dificultad de derivar término a término, consideremos la serie de Fourier de senos de x (en el intervalo $0 \leq x \leq L$), que se esboza en la Figura 3.4.1. A partir de (3.3.11) y (3.3.12), tenemos

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{en } 0 \leq x < L.$$

Si derivamos la función del lado izquierdo obtenemos la función 1. Sin embargo, si derivamos formalmente término a término la función de la derecha llegamos a

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos \frac{n\pi x}{L},$$

que es una serie de cosenos, aunque no es la serie de cosenos de $f(x) = 1$ (la serie de cosenos de 1 es simplemente 1). Tenemos, por tanto, un ejemplo en el que no podemos derivar término a término².

²Además, la serie resultante incluso no converge en ningún sitio, ya que el término n -ésimo no tiende a cero.

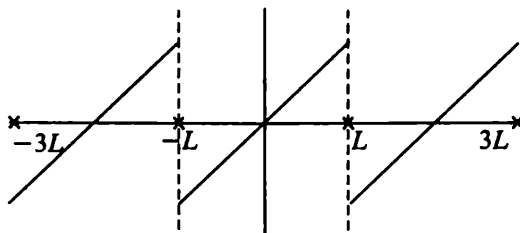


Figura 3.4.1: Serie de Fourier de senos de $f(x) = x$.

Series de Fourier. Esta dificultad surge siempre que la serie de Fourier de $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto. La derivación término a término no está justificada en estas situaciones. El resultado que es cierto (y que probamos en un ejercicio) es que:

Una serie de Fourier que es continua se puede derivar término a término si $f'(x)$ es suave a trozos.

El resultado de la derivación término a término es la serie de Fourier de $f'(x)$, que puede no ser continua. Resultados similares para las series de senos y cosenos son de uso mucho más frecuente al resolver ecuaciones en derivadas parciales.

Serie de Fourier de cosenos. Para las series de Fourier de cosenos se tiene:

Si $f'(x)$ es suave a trozos, entonces si la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$ es continua, se puede derivar término a término.

El resultado de la derivación término a término es la serie de Fourier de senos de $f'(x)$, que puede no ser continua. Recordemos que $f(x)$ sólo necesita ser continua para que su serie de Fourier de cosenos sea continua. Por tanto, este teorema se puede enunciar de la siguiente forma alternativa:

Si $f'(x)$ es suave a trozos, entonces la serie de Fourier de cosenos de una función continua $f(x)$ se puede derivar término a término.

Aplicemos estos enunciados a la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.4.4)$$

donde el signo “=” significa que la serie infinita converge a $f(x)$ para todo x ($0 \leq x \leq L$) ya que $f(x)$ es continua. Matemáticamente, los teoremas anteriores establecen que la derivación término a término es válida,

$$f'(x) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right) A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.4.5)$$

donde el signo “ \sim ” quiere decir aquí que se tiene la igualdad, donde la serie de Fourier de senos de $f'(x)$ es continua, y que la serie converge a la media, donde la serie de Fourier de senos de $f'(x)$ es discontinua.

Ejemplo. Consideremos la serie de Fourier de cosenos de x [véanse (3.3.21) - (3.3.23)],

$$x = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.4.6)$$

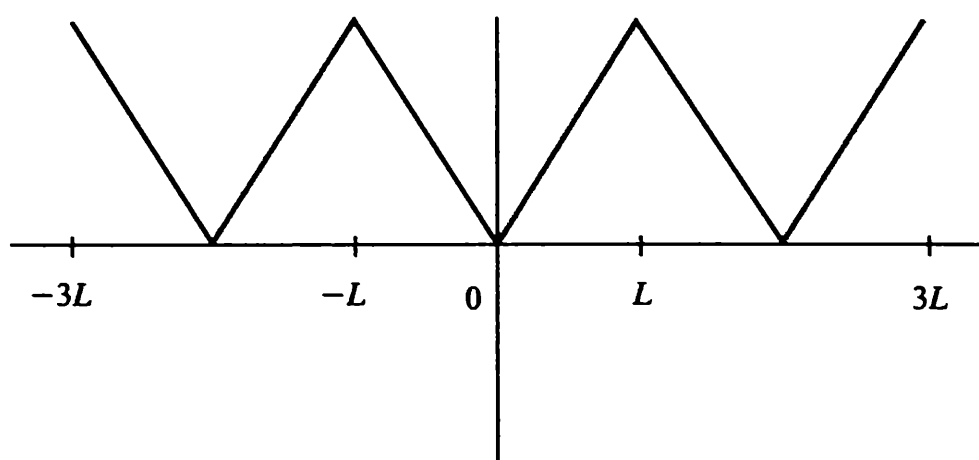


Figura 3.4.2: Serie de Fourier de cosenos de $f(x) = x$.

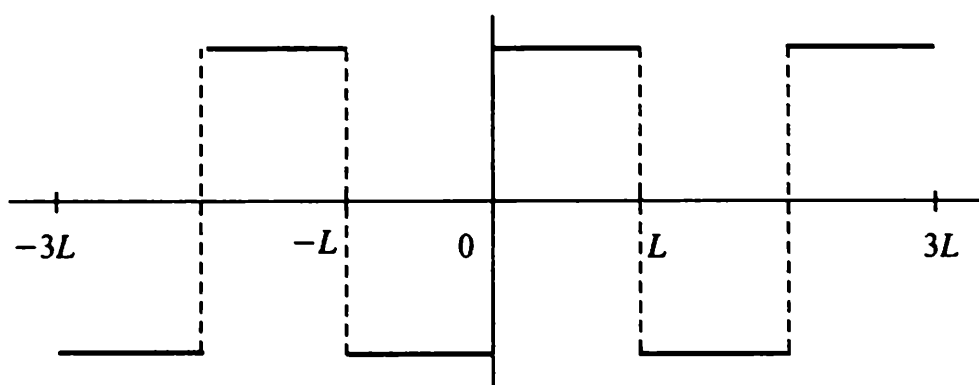


Figura 3.4.3: Serie de Fourier de senos de df/dx .

que aparece en la Figura 3.4.2. Notemos que esta serie es continua para $0 \leq x \leq L$, por lo que utilizamos el signo “=” en (3.4.6). La derivada de esta serie de Fourier de cosenos está dibujada en la Figura 3.4.3: es la serie de Fourier de senos de $f(x) = 1$. La serie de Fourier de senos de $f(x) = 1$ se puede obtener derivando término a término la serie de Fourier de cosenos de $f(x) = x$. Suponiendo que la derivación término a término de (3.4.6) es válida como enunciamos, se sigue que

$$1 \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.4.7)$$

que es efectivamente correcta [véase (3.3.8)].

Serie de Fourier de senos. Un resultado similar es válido para las series de Fourier de senos:

Si $f'(x)$ es suave a trozos, entonces *si la serie de Fourier de senos de $f(x)$ es continua, se puede derivar término a término.*

Sin embargo, si $f(x)$ es continua, entonces la serie de Fourier de senos es continua sólo si $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$. Por tanto, debemos ser cuidadosos al derivar término a término una serie de Fourier de senos. En particular,

Si $f'(x)$ es suave a trozos, entonces *la serie de Fourier de senos de una función continua $f(x)$, sólo se puede derivar término a término si $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$.*

Demostraciones. Las demostraciones de estos teoremas son todas bastante similares. Incluimos una porque es una manera de aprender más sobre las series de Fourier y su derivabilidad. Probaremos la validez de la derivación término a término de la serie de Fourier de senos de una función $f(x)$ continua:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.4.8)$$

Habrà igualdad en (3.4.8) sólo si $f(0) = f(L) = 0$. Si $f'(x)$ es suave a trozos, entonces $f'(x)$ tiene una serie de Fourier de cosenos

$$f'(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.4.9)$$

Esta serie no converge a $f'(x)$ en los puntos de discontinuidad de $f'(x)$. Si podemos verificar que

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right) B_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

es decir, si $A_0 = 0$ y $A_n = (n\pi/L)B_n$, habremos demostrado que una serie de Fourier de senos se puede derivar término a término. Los coeficientes de la serie de Fourier de cosenos se obtienen a partir de (3.4.9). Si integramos por partes, obtenemos

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f'(x) dx = \frac{1}{L} [f(L) - f(0)], \quad (3.4.10)$$

$$(n \neq 0) \quad A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \left[f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L + \frac{n\pi}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right]. \quad (3.4.11)$$

Pero, según (3.4.8), B_n es el coeficiente de la serie de Fourier de senos de $f(x)$,

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

y por tanto, para $n \neq 0$,

$$A_n = \frac{n\pi}{L} B_n + \frac{2}{L} [(-1)^n f(L) - f(0)]. \quad (3.4.12)$$

Vemos entonces comparando los coeficientes de la serie de Fourier de cosenos que la serie de Fourier de senos se puede derivar término a término sólo si se tiene a la vez $f(L) - f(0) = 0$ (para que $A_0 = 0$) y $(-1)^n f(L) - f(0) = 0$ [para que $A_n = (n\pi/L)B_n$]. Ambas condiciones se cumplen sólo si

$$f(0) = f(L) = 0,$$

que son exactamente las condiciones para que la serie de Fourier de senos de una función continua sea continua. Por tanto, hemos completado la prueba. Sin embargo, esta demostración nos ha dado más información. Hemos obtenido la fórmula para derivar la serie de Fourier de senos de una función continua cuando la serie no es continua. Tenemos que:

Si $f'(x)$ es suave a trozos, entonces la serie de Fourier de senos de una función continua $f(x)$,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

no se puede, en general, derivar término a término. Sin embargo,

$$f'(x) \sim \frac{1}{L} [f(L) - f(0)] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\pi}{L} B_n + \frac{2}{L} ((-1)^n f(L) - f(0)) \right] \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.4.13)$$

En esta demostración puede parecer que nunca hemos necesitado que $f(x)$ sea continua. Sin embargo, utilizamos integración por partes para obtener (3.4.9). En el estudio habitual del cálculo, la integración por partes se establece como válida si $u(x)$ y $v(x)$ y sus derivadas son continuas. Esto es demasiado restrictivo para nuestro trabajo. Tal como se aclara en un ejercicio, afirmamos que la integración por partes es válida sólo con que $u(x)$ y $v(x)$ sean continuas. No es necesario que sus derivadas sean continuas. Por tanto, el resultado de la integración por partes es válido únicamente cuando $f(x)$ es continua.

Ejemplo. Consideremos la serie de Fourier de senos de $f(x) = x$,

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.4.14)$$

Ya sabemos que la serie de Fourier de cosenos de $(d/dx)x = 1$ no se obtiene derivando término a término (3.4.14), ya que $f(L) \neq 0$. Sin embargo, podemos aplicar (3.4.13) ya que $f(x)$ es continua [y $f'(x)$ es suave a trozos]. Observando que $f(0) = 0$, $f(L) = L$ y $(n\pi/L)b_n = 2(-1)^{n+1}$, se sigue que la serie de Fourier de cosenos de df/dx es

$$\frac{df}{dx} \sim 1.$$

La función constante 1 es exactamente la serie de Fourier de cosenos de df/dx , ya que $f = x$ implica que $df/dx = 1$. Por tanto, el lado derecho de (3.4.13) nos da la expresión correcta de la serie de Fourier de cosenos de $f'(x)$ cuando conocemos la serie de Fourier de senos de $f(x)$, incluso si $f(0) \neq 0$ y/o $f(L) \neq 0$.

Método de desarrollo en autofunciones. Veamos cómo nuestros resultados sobre las condiciones bajo las que una serie de Fourier se puede derivar término a término se pueden aplicar en nuestro estudio de ecuaciones en derivadas parciales. Consideremos la ecuación del calor (3.4.1) con condiciones de contorno nulas en $x = 0$ y $x = L$. Demostraremos que (3.4.3) es la representación en serie infinita de la solución de este problema utilizando un esquema alternativo para obtener (3.4.3), conocido como el **método de desarrollo en autofunciones**, cuya importancia está en que también se puede usar cuando hay fuentes o las condiciones de contorno no son homogéneas (véanse los Ejercicios 3.4.9-3.4.12 y el Capítulo 7). Comenzamos desarrollando la solución desconocida, $u(x, t)$, en términos de las autofunciones del problema (con condiciones de contorno homogéneas). En este ejemplo, las autofunciones son $\sin n\pi x/L$, lo que sugiere una serie de Fourier de senos para cada tiempo:

$$u(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}; \quad (3.4.15)$$

los coeficientes de la serie de Fourier de senos, B_n , dependerán del tiempo, $B_n(t)$. La Ecuación (3.4.15) es válida si $u(x, t)$ es suave a trozos; de hecho, nuestra formulación física requiere más, a saber, que $u(x, t)$ y $\partial u/\partial x$ sean funciones continuas de x . Más aún, será conveniente suponer que $\partial^2 u/\partial x^2$ es por lo menos suave a trozos.

La condición inicial [$u(x, 0) = f(x)$] se cumple si

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.4.16)$$

lo cual determina los coeficientes de la serie de Fourier de senos en el instante inicial

$$B_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (3.4.17)$$

Lo que resta investigar es si la representación en serie de Fourier de senos de $u(x, t)$, (3.4.15), puede cumplir la ecuación del calor, $\partial u/\partial t = k\partial^2 u/\partial x^2$. Para estudiar

esto debemos derivar la serie de Fourier de senos. Es aquí donde nos serán útiles los resultados sobre diferenciación término a término.

En primer lugar necesitamos calcular dos derivadas respecto a x . Si $u(x, t)$ es continua, entonces la serie de Fourier de senos de $u(x, t)$ se puede derivar término a término si $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$. Como éstas son exactamente las condiciones de contorno sobre $u(x, t)$, se sigue de (3.4.15) que

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} B_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.4.18)$$

Como suponemos también que $\partial u / \partial x$ es continua, tenemos una igualdad en (3.4.18). Más aún, la serie de Fourier de cosenos de $\partial u / \partial x$ se puede ahora derivar término a término, llegando a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 B_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.4.19)$$

Notemos la importancia de la solución por separación de variables. Hemos derivado la serie de senos cuando teníamos las condiciones de contorno que permitían derivarla. La serie de cosenos la hemos derivado sin tener ninguna condición de contorno aplicada a ella, pero recordemos que para derivar una serie de Fourier de cosenos no necesitamos ninguna condición extra. Para completar la sustitución de la serie de Fourier de senos dentro de la ecuación en derivadas parciales sólo necesitamos calcular $\partial u / \partial t$. Si también podemos derivar término a término con respecto a t , entonces

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dB_n}{dt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.4.20)$$

Si esta última derivación término a término está justificada, vemos que la serie de Fourier de senos (3.4.15) resuelve la ecuación en derivadas parciales si

$$\frac{dB_n}{dt} = -k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 B_n(t). \quad (3.4.21)$$

Por tanto, el coeficiente de la serie de Fourier de senos $B_n(t)$ satisface una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes. La solución de (3.4.21) es

$$B_n(t) = B_n(0) e^{-(n\pi/L)^2 kt},$$

donde $B_n(0)$ está dado por (3.4.17). Por tanto, hemos deducido que (3.4.3) es válida, justificando el método de separación de variables.

¿Podemos justificar la derivación término a término con respecto al parámetro t ? El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales esta operación es válida:

La serie de Fourier de una función continua $u(x, t)$ (dependiente de un parámetro t),

$$u(x, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right],$$

se puede derivar término a término con respecto al parámetro t , obteniéndose,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \sim a'_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a'_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L} + b'_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right],$$

si $\partial u / \partial t$ es suave a trozos.

Omitimos su demostración (véase el Ejercicio 3.4.7), que depende del hecho de que la identidad

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-L}^L g(x, t) dx = \int_{-L}^L \frac{\partial g}{\partial t} dx,$$

es válida si g es continua.

En resumen, hemos verificado que la serie de Fourier de senos es realmente una solución de la ecuación del calor que cumple las condiciones de contorno $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$. Ahora tenemos dos razones para elegir una serie de Fourier de senos para este problema. La primera, que el método de separación de variables implica que si $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$, entonces las autofunciones adecuadas son $\operatorname{sen} n\pi x / L$. En segundo lugar, ahora vemos que todas las derivaciones de la serie infinita están justificadas, para lo que necesitamos suponer que $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$, exactamente las condiciones físicas de contorno.

EJERCICIOS 3.4

3.4.1. Se sabe que la fórmula de integración por partes,

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \frac{du}{dx} dx,$$

es válida para funciones $u(x)$ y $v(x)$ que son continuas y tienen primeras derivadas continuas. Sin embargo, supondremos que u , v , du/dx , y dv/dx son continuas sólo para $a \leq x \leq c$ y $c \leq x \leq b$; suponemos que todas esas cantidades pueden tener una discontinuidad de salto en $x = c$.

***(a)** Obtener una expresión para $\int_a^b u (dv/dx) dx$ en términos de $\int_a^b v (du/dx) dx$.

(b) Demostrar que esto se reduce a la fórmula de integración por partes si u y v son continuas en $x = c$. No es necesario que du/dx y dv/dx sean continuas en $x = c$.

3.4.2. Supóngase que $f(x)$ y df/dx son suaves a trozos. Probar que la serie de Fourier de $f(x)$ se puede derivar término a término si la serie de Fourier de $f(x)$ es continua.

3.4.3. Supóngase que $f(x)$ es continua excepto por una discontinuidad de salto en $x = x_0$, $f(x_0^-) = \alpha$ y $f(x_0^+) = \beta$ y que df/dx es suave a trozos.

*(a) Calcular la serie de Fourier de senos de df/dx en términos de los coeficientes de la serie de Fourier de cosenos de $f(x)$.

(b) Calcular la serie de Fourier de cosenos de df/dx en términos de los coeficientes de la serie de Fourier de senos de $f(x)$.

3.4.4. Supóngase que $f(x)$ y df/dx son suaves a trozos.

(a) Probar que la serie de Fourier de senos de una función continua $f(x)$ sólo se puede derivar término a término si $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$.

(b) Probar que la serie de Fourier de cosenos de una función continua $f(x)$ se puede derivar término a término.

3.4.5. Utilizando (3.3.13) obtener la serie de Fourier de cosenos de $\sin \pi x/L$.

3.4.6. Hay algunos errores en la siguiente demostración, encontrarlos y corregirlos.

En este problema intentamos obtener los coeficientes de Fourier de cosenos de e^x :

$$e^x = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.4.22)$$

Derivando, obtenemos

$$e^x = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} A_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

la serie de Fourier de senos de e^x . Derivando de nuevo llegamos a que

$$e^x = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.4.23)$$

Como las Ecuaciones (3.4.22) y (3.4.23) nos dan la serie de Fourier de cosenos de e^x , deben ser idénticas. Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} A_0 = 0 \\ A_n = 0 \end{array} \right\} \text{ (¡obviamente falso!)}$$

Corrigiendo los errores se pueden calcular A_0 y A_n sin utilizar la técnica habitual, que nos da $A_n = 2/L \int_0^L e^x \cos n\pi x/L dx$.

3.4.7. Probar que la serie de Fourier de una función continua $u(x, t)$ se puede derivar término a término con respecto al parámetro t si $\partial u/\partial t$ es suave a trozos.

3.4.8. Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con las condiciones $(\partial u / \partial x)(0, t) = 0$, $(\partial u / \partial x)(L, t) = 0$, y $u(x, 0) = f(x)$. Resolver este problema de la forma siguiente: buscar la solución como una serie de Fourier de cosenos; suponer que u y $\partial u / \partial x$ son continuas y que $\partial^2 u / \partial x^2$ y $\partial u / \partial t$ son suaves a trozos. Justificar todas las diferenciaciones de series infinitas.

***3.4.9** Consideremos la ecuación del calor con una fuente conocida $q(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x, t), \quad \text{con } u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(L, t) = 0.$$

Supongamos que $q(x, t)$ (para cada $t > 0$) es una función suave a trozos de x . Supongamos también que u y $\partial u / \partial x$ son funciones continuas de x (para $t > 0$) y que $\partial^2 u / \partial x^2$ y $\partial u / \partial t$ son suaves a trozos. En ese caso,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

¿Qué ecuación diferencial ordinaria cumple $b_n(t)$? No es necesario resolver esta ecuación diferencial.

3.4.10. Modificar el Ejercicio 3.4.9 si ahora tenemos las condiciones $(\partial u / \partial x)(0, t) = 0$ y $(\partial u / \partial x)(L, t) = 0$.

3.4.11. Consideremos la ecuación del calor *no homogénea* con una fuente de calor estacionaria

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x).$$

Resolver esta ecuación con la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x)$$

y las condiciones de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(L, t) = 0.$$

Supóngase que existe una solución continua (con derivadas continuas). *Indicaciones:* desarrollar la solución en serie de Fourier de senos (es decir, utilizar el método de desarrollo en autofunciones); desarrollar $g(x)$ también en serie de Fourier de senos; calcular la serie de Fourier de senos de la solución. Justificar todas las diferenciaciones respecto a x .

***3.4.12.** Resolver el siguiente problema *no homogéneo*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} + e^{-2t} \cos \frac{3\pi x}{L},$$

suponiendo que $2 \neq k(3\pi/L)^2$, con las condiciones

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \text{y} \quad u(x, 0) = f(x).$$

Utilizar el siguiente método: buscar la solución como una serie de cosenos. Justificar todas las diferenciaciones de series infinitas (suponiendo la continuidad adecuada).

3.4.13. Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con las condiciones

$$u(0, t) = A(t), \quad u(L, t) = 0, \quad \text{y} \quad u(x, 0) = g(x).$$

Supóngase que $u(x, t)$ tiene una serie de Fourier de senos. Determinar la ecuación diferencial para los coeficientes de Fourier (suponiendo la continuidad adecuada).

3.5. Integración término a término de series de Fourier

Al hacer manipulaciones matemáticas con series infinitas debemos recordar que algunas propiedades de las series finitas no son ciertas para series infinitas. En particular, la Sección 3.4 indicaba que debemos ser especialmente cuidadosos al derivar término a término una serie de Fourier infinita. El siguiente teorema sin embargo, nos permite integrar series de Fourier sin precauciones:

Una serie de Fourier de una función $f(x)$ suave a trozos siempre se puede integrar término a término, y el resultado es una serie infinita *convergente*, que siempre *converge* a la integral de $f(x)$ para $-L \leq x \leq L$ (incluso si la serie de Fourier original tiene discontinuidades de salto).

Conviene señalar que la nueva serie formada al integrar término a término es continua. Sin embargo, la nueva serie puede no ser una serie de Fourier.

Para corroborar esta afirmación, supongamos que $f(x)$ es suave a trozos y, por tanto, tiene una serie de Fourier en el intervalo $-L \leq x \leq L$ (no necesariamente continua):

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.5.1)$$

Probaremos más adelante nuestra afirmación de que podemos integrar este resultado término a término:

$$\int_{-L}^x f(t) dt \sim a_0(x+L) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^x \cos \frac{n\pi t}{L} dt + b_n \int_{-L}^x \sen \frac{n\pi t}{L} dt \right).$$

La integración indicada nos da

$$\int_{-L}^x f(t) dt \sim a_0(x+L) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n\pi/L} \sen \frac{n\pi x}{L} + \frac{b_n}{n\pi/L} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \right]. \quad (3.5.2)$$

En realidad probaremos que el enunciado anterior es válido con un signo =. Si la integración término a término de $-L$ a x de una serie de Fourier es válida, entonces cualquier integración definida es válida, ya que

$$\int_a^b = \int_{-L}^b - \int_{-L}^a.$$

Ejemplo. La integración término a término tiene algunas aplicaciones interesantes. Recordemos que la serie de Fourier de senos de $f(x) = 1$ está dada por

$$1 \sim \frac{4}{\pi} \left(\sen \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sen \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sen \frac{5\pi x}{L} + \dots \right), \quad (3.5.3)$$

donde usamos el signo \sim ya que (3.5.3) es una igualdad sólo para $0 < x < L$. La integración término a término de 0 a x da lugar a

$$x \sim \frac{4L}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) - \frac{4L}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{L} + \frac{\cos 3\pi x/L}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x/L}{5^2} + \dots \right), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.5.4)$$

donde, por nuestro teorema, podemos utilizar el signo =. Inmediatamente nos damos cuenta de que (3.5.4) debería ser la serie de Fourier de cosenos de la función x . Se obtuvo integrando la serie de Fourier de senos de $f(x) = 1$. Sin embargo, aparece una serie infinita de constantes en (3.5.4); se trata del término constante de la serie de Fourier de cosenos de x . Podemos evaluar esa serie infinita de esta manera,

$$\frac{4L}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) = \frac{1}{L} \int_0^L x dx = \frac{1}{2}L.$$

Por tanto, obtenemos la forma usual de la serie de Fourier de cosenos de x ,

$$x = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{L} + \frac{\cos 3\pi x/L}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x/L}{5^2} + \dots \right), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.5.5)$$

El proceso de obtener series nuevas a partir de otras anteriores se puede continuar. Integrando (3.5.5) de 0 a x obtenemos

$$\frac{x^2}{2} = \frac{L}{2}x - \frac{4L^2}{\pi^3} \left(\sen \frac{\pi x}{L} + \frac{\sen 3\pi x/L}{3^3} + \frac{\sen 5\pi x/L}{5^3} + \dots \right). \quad (3.5.6)$$

Este ejemplo ilustra que *integrando una serie de Fourier término a término no necesariamente obtenemos otra serie de Fourier*. Sin embargo, (3.5.6) se puede entender en dos sentidos:

1. como la serie de Fourier de senos de $x^2/2 - (L/2)x$,
2. o bien como la serie de Fourier de senos de $x^2/2$, donde necesitamos conocer primero la serie de Fourier de senos de x [véanse (3.3.11) y (3.3.12)].

Un procedimiento alternativo es calcular la integral indefinida. En este caso debemos incluir una constante indefinida y calcularla. Por ejemplo, reconsideremos la serie de Fourier de senos de $f(x) = 1$, (3.5.3). Haciendo una integración indefinida término a término obtenemos la serie de Fourier de cosenos de x ,

$$x = c - \frac{4L}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{L} + \frac{\cos 3\pi x/L}{3^2} + \frac{\cos 5\pi x/L}{5^2} + \dots \right).$$

La constante de integración no es arbitraria, se debe evaluar. Aquí c es de nuevo el término constante de la serie de Fourier de cosenos de x , $c = (1/L) \int_0^L x dx = L/2$.

Demostración de la integración de series de Fourier. Sea

$$F(x) = \int_{-L}^x f(t) dt. \quad (3.5.7)$$

Esta integral es una función continua de x , ya que $f(x)$ es suave a trozos. $F(x)$ tiene una serie de Fourier continua sólo si $F(L) = F(-L)$ [en otro caso, recordemos que la naturaleza periódica de las series de Fourier implica que la serie de Fourier no converge a $F(x)$ en los puntos extremos $x = \pm L$]. Sin embargo, notemos que según la definición (3.5.7),

$$F(-L) = 0 \quad \text{y} \quad F(L) = \int_{-L}^L f(t) dt = 2La_0.$$

Por tanto, en general $F(x)$ no tiene una serie de Fourier continua. En la Figura 3.5.1 se dibuja $F(x)$, mostrando que usualmente $F(-L) \neq F(L)$. Sin embargo, consideremos la línea recta que conecta el punto $F(-L)$ con $F(L)$, $y = a_0(x + L)$. Si definimos $G(x)$ como la diferencia entre $F(x)$ y la línea recta,

$$G(x) \equiv F(x) - a_0(x + L), \quad (3.5.8)$$

será cero en ambos extremos, $x = \pm L$,

$$G(-L) = G(L) = 0,$$

tal como se muestra en la Figura 3.5.1, y $G(x)$ también será continua. Por tanto, $G(x)$ cumple las propiedades que hacen que su serie de Fourier realmente sea igual a ella:

$$G(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + B_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.5.9)$$

donde hacemos hincapié en que hay un signo $=$. Estos coeficientes de Fourier se pueden calcular mediante

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L [F(x) - a_0(x+L)] \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n \neq 0).$$

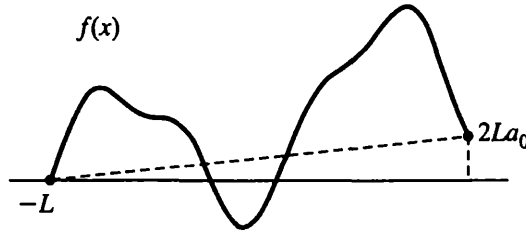


Figura 3.5.1: $F(x)$ con $F(-L) \neq F(L)$.

El término x se puede eliminar ya que es impar (es decir, $\int_{-L}^L x \cos n\pi x/L dx = 0$). La expresión resultante se puede integrar por partes como sigue:

$$\begin{aligned} u &= F(x) - a_0L, & dv &= \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \\ du &= \frac{dF}{dx} dx = f(x)dx, & v &= \frac{L}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

obteniéndose,

$$A_n = \frac{1}{L} \left[(F(x) - a_0L) \frac{\operatorname{sen} n\pi x/L}{n\pi/L} \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right] = -\frac{b_n}{n\pi/L}, \quad (3.5.10)$$

donde observamos que los b_n son el coeficiente de Fourier de senos de $f(x)$. De un modo similar (que dejamos como ejercicio) se puede demostrar también que

$$B_n = \frac{a_n}{n\pi/L}.$$

A_0 se puede calcular de forma distinta (el método anterior no funcionará). Ya que $G(L) = 0$ y la serie de Fourier de $G(x)$ es convergente puntualmente, de (3.5.9) se sigue que

$$0 = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\pi = A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n\pi/L} \cos n\pi,$$

ya que $A_n = -b_n/(n\pi/L)$. Luego hemos demostrado a partir de (3.5.9) que

$$F(x) = a_0(x+L) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n\pi/L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} + \frac{b_n}{n\pi/L} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \right], \quad (3.5.11)$$

que es exactamente el resultado de la integración simple término a término. Sin embargo, observemos que (3.5.11) no es la serie de Fourier de $F(x)$, porque aparece a_0x . No obstante, (3.5.11) es válida. Así pues, hemos justificado la integración término a término de series de Fourier.

EJERCICIOS 3.5

3.5.1. Consideremos la serie de Fourier

$$x^2 \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.5.12)$$

(a) Calcular b_n a partir de (3.3.21), (3.3.22), (3.3.23) y (3.5.6).

(b) ¿Para qué valores de x es (3.5.12) una igualdad?

**(c)* Obtener la serie de Fourier de cosenos de x^3 a partir de (3.5.12). ¿Para qué valores de x se obtendrá una igualdad?

3.5.2. (a) Usando (3.3.11) y (3.3.12), obtener la serie de Fourier de cosenos de x^2 .

(b) Calcular la serie de Fourier de senos de x^3 utilizando el apartado (a).

3.5.3. Generalizar el Ejercicio 3.5.2 para obtener la serie de Fourier de senos de x^m , con m impar.

***3.5.4.** Supongamos que $\cosh x \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x/L$.

(a) Determinar los b_n derivando correctamente esta serie dos veces.

(b) Determinar los b_n integrando esta serie dos veces.

3.5.5. Demostrar que los B_n de (3.5.9) satisfacen $B_n = a_n/(n\pi/L)$, donde los a_n están definidos por (3.5.1).

3.5.6. Calcular la suma

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots,$$

evaluando (3.5.5) en $x = 0$.

***3.5.7.** Calcular la suma

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots,$$

utilizando (3.5.6).

3.6. Forma compleja de series de Fourier

Hemos visto que la teoría de series de Fourier es bastante útil al estudiar problemas con condiciones de contorno periódicas. Recordemos que estas series se escriben en la forma

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (3.6.1)$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (3.6.2)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (3.6.3)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (3.6.4)$$

Para introducir exponenciales complejas en lugar de senos y cosenos, utilizamos las fórmulas de Euler:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Se sigue que

$$f(x) \sim a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{in\pi x/L} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-in\pi x/L}. \quad (3.6.5)$$

Para que únicamente aparezca la exponencial $e^{-in\pi x/L}$, cambiamos el índice mudo en el primer sumatorio, reemplazando n por $-n$. Entonces,

$$f(x) \sim a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} [a_{(-n)} - ib_{(-n)}] e^{-in\pi x/L} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{-in\pi x/L}.$$

Por la definición de a_n y b_n , (3.6.3) y (3.6.4), $a_{(-n)} = a_n$ y $b_{(-n)} = -b_n$. Por tanto, si definimos,

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0, \\ c_n &= \frac{a_n + ib_n}{2}, \end{aligned}$$

entonces $f(x)$ es simplemente,

$$\boxed{f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L}.} \quad (3.6.6)$$

La Ecuación (3.6.6) se conoce como **forma compleja de la serie de Fourier³ de $f(x)$** , y es equivalente a la forma usual. Es más compacta de escribir, pero se usa menos. De esta forma los coeficientes de Fourier complejos son

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n + ib_n) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad (n \neq 0).$$

³Como antes, habrá un signo igual si $f(x)$ es continua [y periódica, $f(-L) = f(L)$]. En una discontinuidad de salto de $f(x)$ en el interior, la serie converge a $[f(x+) + f(x-)]/2$.

Podemos simplificar esta expresión utilizando la fórmula de Euler, de modo que la forma compleja de los coeficientes de Fourier es

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{in\pi x/L} dx, \quad n \text{ entero.} \quad (3.6.7)$$

Observemos que la representación compleja de la serie de Fourier $f(x)$ tiene funciones $e^{-in\pi x/L}$ y que la suma se extiende a todos los enteros, lo que corresponde a sumar sobre todos los autovalores discretos. Los coeficientes de Fourier complejos, por otro lado, se calculan utilizando $e^{+in\pi x/L}$ y se integran en la región de definición de $f(x)$ (con condiciones de contorno periódicas), es decir, $-L \leq x \leq L$. Si $f(x)$ es real, se tiene que $c_{-n} = \bar{c}_n$ (véase el Ejercicio 3.6.2).

Ortogonalidad compleja. Hay una forma alternativa de obtener la fórmula de los coeficientes de Fourier complejos. Hasta ahora hemos calculado siempre los coeficientes de Fourier utilizando la ortogonalidad de las autofunciones. Utilizaremos aquí una idea similar, aunque las autofunciones $e^{-in\pi x/L}$ son ahora complejas. No obstante, el concepto de ortogonalidad para las funciones complejas debe modificarse ligeramente: una función compleja ϕ se dice que es **ortogonal** a otra función compleja ψ (en un intervalo $a \leq x \leq b$) si $\int_a^b \bar{\phi} \psi dx = 0$, donde $\bar{\phi}$ es la conjugada compleja de ϕ . Esta definición garantiza que el cuadrado de la longitud de una función compleja f , definido por $\int_a^b \bar{f} f dx$, es positivo (esto no habría sido cierto para $\int_a^b f f dx$, ya que f es compleja).

Usando esta noción de ortogonalidad, podemos verificar que las autofunciones $e^{-in\pi x/L}$, con $-\infty < n < \infty$, forman un conjunto ortogonal por simple integración,

$$\int_{-L}^L \overline{(e^{-im\pi x/L})} e^{-in\pi x/L} dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2L & n = m, \end{cases}$$

pues

$$\overline{(e^{-im\pi x/L})} = e^{im\pi x/L}.$$

Determinemos ahora los coeficiente c_n s de la forma compleja de la serie de Fourier: multiplicando (3.6.6) por $e^{in\pi x/L}$ e integrando de $-L$ a $+L$ (y suponiendo que el uso de estas operaciones término a término es válido), obtenemos

$$\int_{-L}^L f(x) e^{im\pi x/L} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-L}^L e^{im\pi x/L} e^{-in\pi x/L} dx.$$

Usando la condición de ortogonalidad, la suma se reduce a un solo término, $n = m$, con lo que

$$\int_{-L}^L f(x) e^{im\pi x/L} dx = 2L c_m,$$

lo que explica el factor $1/2L$ en (3.6.7), al igual que el cambio de signos en el exponente.

EJERCICIOS 3.6

***3.6.1.** Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1/\Delta & x_0 < x < x_0 + \Delta \\ 0 & x > x_0 + \Delta, \end{cases}$$

y supongamos que $x_0 > -L$ y $x_0 + \Delta < L$. Calcular los coeficientes c_n de la forma compleja de la serie de Fourier.

3.6.2. Si $f(x)$ es real, demostrar que se tiene $c_{-n} = \bar{c}_n$.

Capítulo 4

Membranas y cuerdas vibrantes

4.1. Introducción

Hasta el momento, en nuestro estudio de ecuaciones en derivadas parciales, el único problema físico que hemos introducido es la conducción del calor. Para ampliar nuestra discusión estudiaremos ahora las vibraciones de cuerdas y membranas perfectamente elásticas. Comenzaremos formulando las ecuaciones que rigen la vibración de una cuerda a partir de principios físicos y demostraremos que las condiciones de contorno adecuadas son similares en sentido matemático a las condiciones de contorno para la ecuación del calor. Finalmente, resolveremos algunos ejemplos por el método de separación de variables.

4.2. Deducción de la ecuación para la cuerda vibrante

Una cuerda vibrante es un sistema físico complicado, pero nos gustaría presentar una deducción sencilla del modelo. Una cuerda vibra sólo si está tensa, por lo que consideraremos una cuerda tensa horizontal en su posición de equilibrio, tal y como se muestra en la Figura 4.2.1. Imaginaremos que los extremos están sujetos de alguna forma (según describiremos en la Sección 4.3), manteniendo la tirantez de la cuerda. Como ejemplo podemos pensar en instrumentos de cuerda. Comencemos estudiando el movimiento de cada una de las partículas que constituyen la cuerda: sea α la coordenada x de una partícula cuando la cuerda está en la posición horizontal de equilibrio. La cuerda se mueve con el tiempo: como mostramos en la Figura 4.2.1, en un tiempo t estará en algún sitio distinto de la posición de equilibrio. La trayectoria de la partícula α se indica en dicha figura con sus componentes horizontal y vertical.

Supondremos que la pendiente de la cuerda es pequeña, en cuyo caso se puede demostrar que el desplazamiento horizontal v se puede despreciar. En una primera aproximación, **el movimiento es completamente vertical**, es decir, $x = \alpha$. En

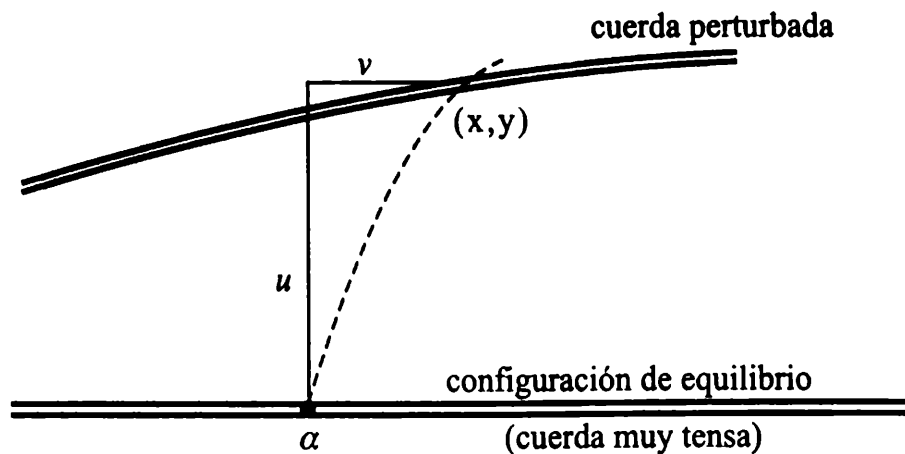


Figura 4.2.1: Desplazamientos horizontal y vertical de una partícula de una cuerda muy tensa.

esta situación¹, el desplazamiento vertical u depende de x y t :

$$y = u(x, t). \quad (4.2.1)$$

Las deducciones que incluyen el efecto de un desplazamiento horizontal son complicadas (véanse los libros de Weinberger [1965] y Antman [1980]).

Ley de Newton. Consideremos un segmento infinitesimal de la cuerda, contenido entre x y $x + \Delta x$ (como se ve en la Figura 4.2.2). En la posición horizontal sin perturbar (en la que la cuerda está ya tensa), suponemos que la **densidad de masa** $\rho_0(x)$ es conocida. La masa total del pequeño segmento considerado es aproximadamente $\rho_0(x) \Delta x$.

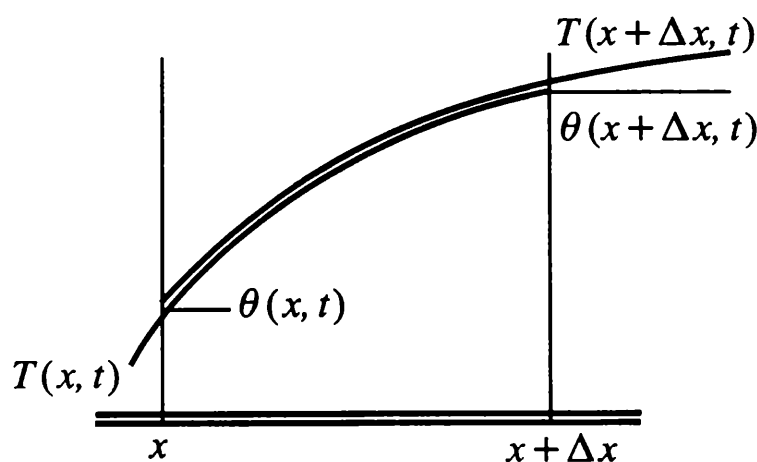


Figura 4.2.2: Estiramiento de un pequeño segmento de cuerda, mostrando las tensiones que actúan.

Nuestro objetivo es deducir una ecuación en derivadas parciales que describa cómo la posición u cambia con el tiempo. Puesto que las aceleraciones son debidas a la acción de ciertas fuerzas, debemos usar la ley de Newton. Por simplicidad, analizaremos la ley de Newton para una masa puntual:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (4.2.2)$$

¹En general ($x \neq \alpha$), es mejor tomar $y = u(\alpha, t)$.

Debemos discutir las fuerzas que actúan en este segmento de la cuerda. Supondremos que hay fuerzas que actúan solamente en la dirección vertical (por ejemplo, la fuerza de la gravedad), al igual que fuerzas que actúan sobre los extremos del segmento de cuerda. Supondremos también que la cuerda es **perfectamente flexible**, es decir, no ofrece ninguna resistencia a doblarse. Esto significa que la fuerza ejercida por el resto de la cuerda sobre los puntos extremos del segmento es de dirección tangente a la cuerda. Esta fuerza tangencial se conoce como la **tensión** de la cuerda, y denotamos su magnitud por $T(x, t)$. En la Figura 4.2.2 mostramos que la fuerza debida a la tensión (ejercida por el resto de la cuerda) tira en ambos extremos en la dirección de la tangente, tendiendo a estirar el pequeño segmento. Para obtener las componentes de las tensiones, introducimos el ángulo θ que forma la cuerda con la horizontal. El ángulo depende a la vez de la posición x y del tiempo t . Más aún, la pendiente de la cuerda se puede representar como dy/dx o como $\tan \theta$:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.2.3)$$

Por la ley de Newton, la componente horizontal prescribe el movimiento horizontal, que suponemos es pequeño y puede despreciarse. La ecuación del movimiento vertical establece que la masa, $\rho_0(x) \Delta x$, por la componente vertical de la aceleración, $\partial^2 u / \partial t^2$ (usamos la notación $\partial / \partial t$, ya que x está fijo para este movimiento), es igual a la componente vertical de las fuerzas de tensión más la componente vertical de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.

$$\begin{aligned} \rho_0(x) \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T(x + \Delta x, t) \sin \theta(x + \Delta x, t) \\ &\quad - T(x, t) \sin \theta(x, t) + \rho_0(x) \Delta x Q(x, t), \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

donde $T(x, t)$ es la tensión y $Q(x, t)$ es la componente vertical de la fuerza que actúa sobre el cuerpo por unidad de masa. Dividiendo (4.2.4) por Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ obtenemos

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \sin \theta(x, t)] + \rho_0(x) Q(x, t). \quad (4.2.5)$$

Para ángulos θ pequeños,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \approx \sin \theta,$$

y, por tanto, (4.2.5) se convierte en

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho_0(x) Q(x, t). \quad (4.2.6)$$

Cuerdas perfectamente elásticas. La tensión de una cuerda se determina por medio de experimentos. Las cuerdas reales son casi **perfectamente elásticas**.

con lo que queremos decir que la magnitud de la tensión $T(x, t)$ depende sólo del estiramiento local de la cuerda. Como suponemos que el ángulo θ es pequeño, el estiramiento de la cuerda es casi el mismo que para la cuerda horizontal bien estirada (sin perturbar), donde la tensión es constante, T_0 (para estar en equilibrio). Por tanto, **la tensión $T(x, t)$ se puede aproximar por una constante T_0** . En consecuencia, las pequeñas vibraciones verticales de una cuerda muy tensa se rigen por

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t) \rho_0(x). \quad (4.2.7)$$

Ecuación de ondas unidimensional. Si la única fuerza externa que actúa por unidad de masa es la gravedad, entonces en (4.2.7) se tiene $Q(x, t) = -g$. En muchos de estos casos, esta fuerza es pequeña comparada con la tensión ($\rho_0 g \ll |T_0 \partial^2 u / \partial x^2|$) y se puede despreciar. De forma alternativa, como la gravedad comba la cuerda, podemos calcular las vibraciones con respecto a la posición combada de equilibrio. En cualquier caso, a menudo tendremos que estudiar la Ecuación (4.2.7) con $Q(x, t) = 0$,

$$\rho_0(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.2.8)$$

es decir,

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \quad (4.2.9)$$

donde $c^2 = T_0 / \rho_0(x)$. La Ecuación (4.2.9) se conoce como **ecuación de ondas unidimensional**. Se introduce la notación c^2 porque $T_0 / \rho_0(x)$ tiene las dimensiones de velocidad al cuadrado. Veremos que el parámetro c es de gran importancia física en el modelo. Para una cuerda uniforme, c es una constante.

EJERCICIOS 4.2

- 4.2.1.** (a) Usando (4.2.7), calcular la posición de equilibrio $u_E(x)$ si $Q(x, t) = -g$. Las condiciones de contorno son $u(0) = 0$ y $u(L) = 0$.
- (b) Demostrar que $v(x, t) = u(x, t) - u_E(x)$ cumple (4.2.9).
- 4.2.2.** Demostrar que c^2 tiene dimensiones de velocidad al cuadrado.
- 4.2.3.** Consideremos una partícula cuya coordenada x (en equilibrio horizontal) se designa por α . Si sus desplazamientos vertical y horizontal son u y v , respectivamente, determinar su posición x e y . Demostrar entonces que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial u / \partial \alpha}{1 + \partial v / \partial \alpha}.$$

4.2.4. Deducir las ecuaciones para los desplazamientos horizontal y vertical, ignorando v . Supóngase que la cuerda es perfectamente flexible y que la tensión se determina por una ley experimental.

4.3. Condiciones de contorno

La ecuación en derivadas parciales para una cuerda vibrante, (4.2.7) o (4.2.8), tiene una derivada espacial de segundo orden. Aplicaremos una condición de contorno en cada extremo, tal como hicimos para la ecuación del calor unidimensional.

La condición de contorno más sencilla es la que corresponde a una cuerda fija en los extremos, usualmente en la posición cero. Por ejemplo, si la cuerda está fija (y con desplazamiento cero) en $x = L$, entonces

$$u(L, t) = 0. \quad (4.3.1)$$

De forma alternativa, podríamos mover un extremo de la cuerda de una forma prescrita:

$$u(L, t) = f(t). \quad (4.3.2)$$

Ambas condiciones, (4.3.1) y (4.3.2), son condiciones de contorno lineales; (4.3.1) es homogénea, mientras que (4.3.2) no lo es.

Tenemos una condición de contorno más interesante si un extremo de la cuerda está fijo a un sistema móvil. Supongamos que el extremo izquierdo de una cuerda, $x = 0$, está sujeto a un sistema masa resorte, como se ilustra en la Figura 4.3.1. Impondremos que el movimiento sea totalmente vertical. Para obtener esto, debemos imaginar la masa situada en un raíl vertical (posiblemente sin fricción). El raíl proporciona una fuerza horizontal a la masa cuando sea necesario compensar la gran componente horizontal de la tensión al moverse en el sistema masa-resorte. La cuerda está atada a la masa de tal forma que si la posición de la masa es $y(t)$, ésta es la posición del extremo izquierdo de la cuerda:

$$u(0, t) = y(t). \quad (4.3.3)$$

Sin embargo, $y(t)$ es desconocida; sabemos de ella que cumple una ecuación diferencial ordinaria obtenida a partir de las leyes de Newton. Supondremos que el muelle tiene longitud en reposo l y que obedece a la ley de Hooke con constante elástica k . Para hacer el problema incluso más interesante, haremos que el soporte del muelle se mueva de alguna forma prescrita, $y_s(t)$. Así, la longitud del muelle es $y(t) - y_s(t)$ y el estiramiento del muelle es $y(t) - y_s(t) - l$. De acuerdo con la ley de Newton (usando la ley de Hooke con constante elástica k),

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k(y(t) - y_s(t) - l) + \text{otras fuerzas sobre la masa.}$$

Las otras fuerzas verticales sobre la masa son una tensión ejercida por la cuerda $T(0, t) \sin \theta(0, t)$ y una fuerza $g(t)$ que representa otras fuerzas externas a la masa.

Recordemos que debemos restringirnos a ángulos pequeños, de modo que la tensión sea casi constante, T_0 . En ese caso, la componente vertical es aproximadamente $T_0 \partial u / \partial x$:

$$T(0, T) \sin \theta(0, t) \approx T(0, T) \frac{\sin \theta(0, t)}{\cos \theta(0, t)} = T(0, T) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \approx T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t),$$

ya que, para ángulos pequeños, $\cos \theta \approx 1$. De esta manera, la condición de contorno en $x = 0$ para una cuerda vibrante unida a un sistema masa-resorte [con un soporte variable $y_s(t)$ y una fuerza externa $g(t)$] es

$$m \frac{d^2}{dt^2} u(0, t) = -k(u(0, t) - y_s(t) - l) + T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + g(t). \quad (4.3.4)$$

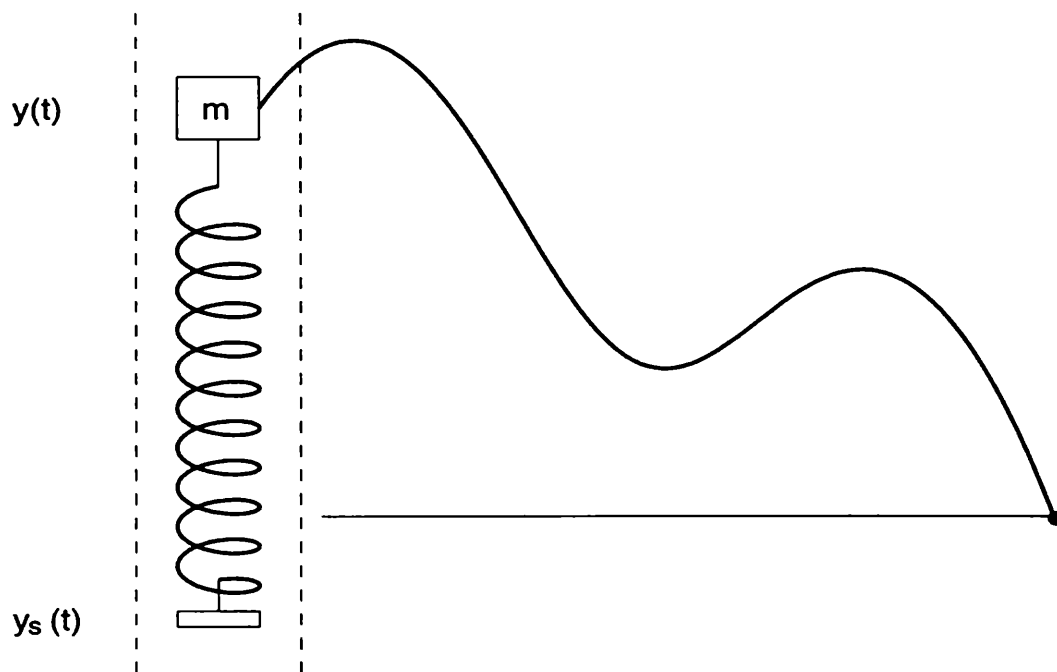


Figura 4.3.1: Sistema masa-resorte con un soporte móvil unido a una cuerda tensa.

Consideremos algunos casos especiales en los que no hay fuerzas externas actuando sobre la masa, es decir $g(t) = 0$. Si, además, la masa es suficientemente pequeña para que las fuerzas sobre la masa estén en equilibrio, entonces

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = k(u(0, t) - u_E(t)), \quad (4.3.5)$$

donde $u_E(t)$ es la posición de equilibrio de la masa, $u_E(t) = y_s(t) + l$. Esta expresión, conocida como condición de contorno **elástica** no homogénea es exactamente análoga a la ley de enfriamiento de Newton [con temperatura externa $u_E(t)$] para la ecuación del calor. Si la posición de equilibrio de la masa coincide con la posición de equilibrio de la cuerda, $u_E(t) = 0$, la versión homogénea de la condición de contorno elástica es:

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = k u(0, t), \quad (4.3.6)$$

que nos dice que $\partial u / \partial x$ es proporcional a u . Como por razones físicas $T_0 > 0$ y $k > 0$, los signos de (4.3.6) están prescritos. Ésta es la misma elección de signos que tenía lugar para la ley de enfriamiento de Newton. El diagrama de la Figura 4.3.2 muestra la elección de signos correcta y la incorrecta. Esta figura muestra que (suponiendo que $u = 0$ es una posición de equilibrio para la cuerda y la masa a la vez) si $u > 0$ en $x = 0$, entonces debe ser $\partial u / \partial x > 0$ para que haya equilibrio de fuerzas verticales en el sistema masa-resorte *sin masa*. Un argumento similar muestra que hay un importante cambio de signo si la condición de contorno elástica tiene lugar en $x = L$:

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -k(u(L, t) - u_E(t)), \quad (4.3.7)$$

el mismo cambio de signo que obtuvimos para la ley de enfriamiento de Newton.

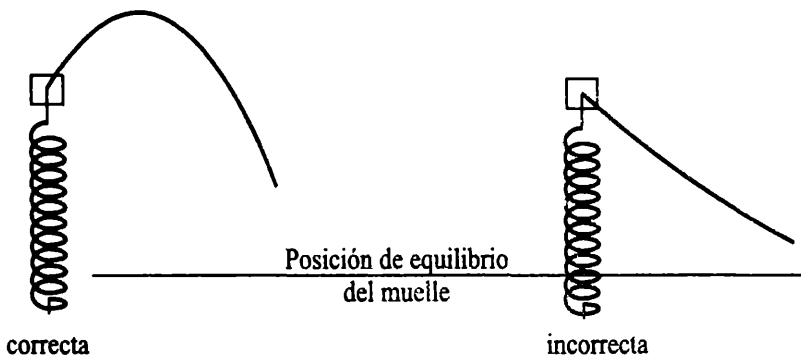


Figura 4.3.2: Condiciones de contorno para un sistema masa-resorte sin masa.

Para una cuerda vibrante, otra condición de contorno que se puede estudiar es la que se conoce como de **extremo libre**, aunque no está literalmente libre. El extremo está fijo a un raíl vertical sin fricción, como antes, y puede moverse libremente hacia arriba y hacia abajo. No hay ningún sistema masa-resorte ni fuerzas externas. Sin embargo, se puede obtener esta condición de contorno tomando el límite en (4.3.6) o en (4.3.7), cuando $k \rightarrow 0$:

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0. \quad (4.3.8)$$

Esto nos dice que la componente vertical de la tensión debe anularse en el extremo, ya que allí no hay otras fuerzas verticales. Si la componente vertical no se anulara, el extremo tendría una aceleración vertical infinita. La condición de contorno (4.3.8) es exactamente análoga a la condición de frontera aislada para la ecuación del calor unidimensional.

EJERCICIOS 4.3

4.3.1. Si $m = 0$, ¿cuál de los diagramas de la Figura 4.3.3 puede ser correcto? Explicar *brevemente*. Supóngase que la masa se puede mover sólo verticalmente.

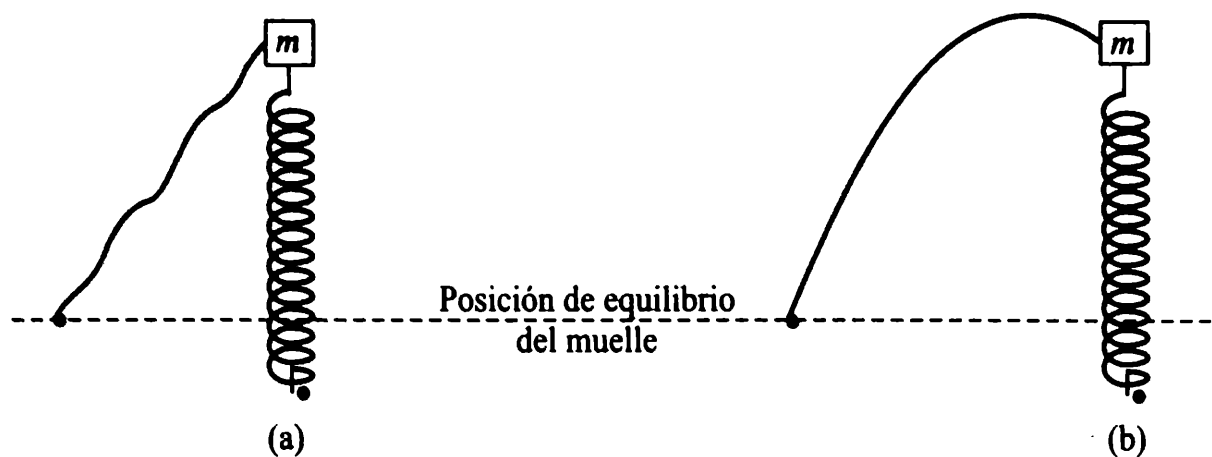


Figura 4.3.3

4.3.2. Consideremos, según se ve en la Figura 4.3.4, dos cuerdas vibrantes unidas en $x = L$ a un sistema masa-resorte en un raíl vertical sin fricción. Supongamos que el muelle está sin estirar cuando la cuerda está horizontal (el muelle tiene soporte fijo) y que hay una fuerza externa $f(t)$ actuando sobre la masa m .

- ¿Qué condiciones de “salto” hay en $x = L$ que relacionen la cuerda de la izquierda con la cuerda de la derecha?
- ¿En qué situaciones es esto matemáticamente equivalente al contacto térmico perfecto?

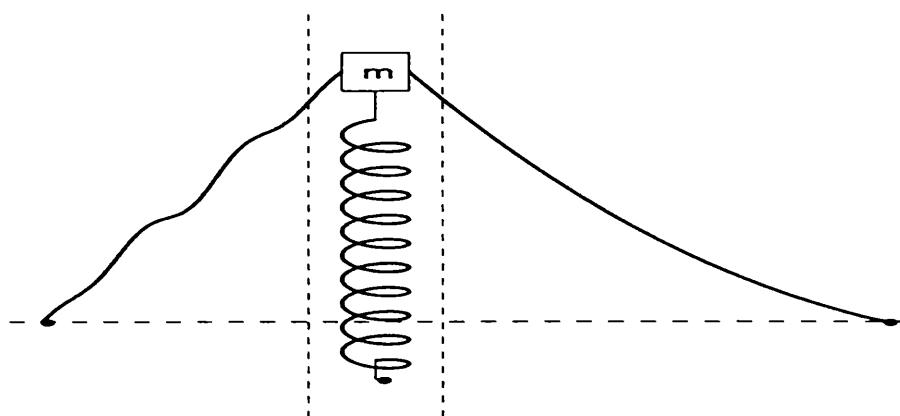


Figura 4.3.4

4.4. Cuerda vibrante con extremos fijos

En esta sección resolveremos la ecuación de ondas unidimensional, que representa a una cuerda vibrante uniforme sin fuerzas externas,

$$\text{EDP : } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.4.1)$$

donde $c^2 = T_0/\rho_0$, con las condiciones de contorno homogéneas más simples,

$$\text{CC1 : } \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = 0, \end{cases} \quad (4.4.2)$$

estando los dos extremos fijos en la posición cero. Como la ecuación en derivadas parciales (4.4.1) contiene la segunda derivada respecto al tiempo, necesitamos dos condiciones iniciales, por lo que prescribimos $u(x, 0)$ y $\partial u/\partial t(x, 0)$:

$$\text{CI : } \boxed{\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \end{aligned}} \quad (4.4.3)$$

lo que corresponde a conocer la posición y la velocidad iniciales de cada segmento de la cuerda. Estas dos condiciones iniciales no son sorprendentes, ya que la ecuación de ondas se obtuvo a partir de la ley de Newton estudiando cada segmento de cuerda como una partícula y las ecuaciones diferenciales ordinarias para partículas requieren la posición y la velocidad iniciales

Como tanto la ecuación en derivadas parciales como las condiciones de contorno son lineales y homogéneas, podemos utilizar el método de separación de variables. Al igual que con la ecuación del calor, dejamos de lado temporalmente las condiciones iniciales no homogéneas. Buscamos soluciones especiales de la forma

$$u(x, t) = \phi(x)h(t). \quad (4.4.4)$$

Al sustituir (4.4.4) en (4.4.1) obtenemos

$$\phi(x) \frac{d^2 h}{dt^2} = c^2 h(t) \frac{d^2 \phi}{dx^2}. \quad (4.4.5)$$

Dividiendo por $\phi(x)h(t)$ separamos las variables, pero es más conveniente dividir también por la constante c^2 , ya que entonces el problema de autovalores resultante no contiene el parámetro c^2 :

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\lambda. \quad (4.4.6)$$

Introducimos una constante de separación porque $(1/c^2)(1/h)(d^2 h/dt^2)$ depende sólo de t y $(1/\phi)(d^2 \phi/dx^2)$ depende sólo de x . El signo negativo se ha introducido por *pura conveniencia*. Con este signo negativo, explicaremos por qué esperamos que $\lambda > 0$. Necesitamos las dos ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtienen de (4.4.6):

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h \quad (4.4.7)$$

y

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\lambda \phi. \quad (4.4.8)$$

Las dos condiciones de contorno homogéneas (4.4.2) muestran que

$$\phi(0) = \phi(L) = 0. \quad (4.4.9)$$

Por tanto, (4.4.8) y (4.4.9) constituyen un problema de contorno. En lugar de revisar primero la solución de (4.4.8) y (4.4.9), analicemos la ecuación diferencial ordinaria dependiente del tiempo (4.4.7). Si $\lambda > 0$, la solución general de (4.4.7) es una combinación lineal de senos y cosenos,

$$h(t) = c_1 \cos c\sqrt{\lambda}t + c_2 \operatorname{sen} c\sqrt{\lambda}t. \quad (4.4.10)$$

Si $\lambda = 0$, $h(t) = c_1 + c_2t$, y si $\lambda < 0$, $h(t)$ es una combinación lineal de soluciones que crecen y decrecen exponencialmente. Como estamos estudiando una cuerda vibrante, parecería más razonable que las soluciones dependientes del tiempo oscilaran. Esto no prueba que $\lambda > 0$, pero sirve como motivación inmediata para elegir el signo negativo en (4.4.6). Analizando ahora el problema de contorno, podemos deducir que los autovalores son no negativos.

El problema de contorno es

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} &= -\lambda\phi, \\ \phi(0) &= 0, \\ \phi(L) &= 0. \end{aligned}$$

Aunque podríamos resolverlo estudiando tres casos, debemos recordar que todos los autovalores son positivos. De hecho,

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

y las correspondientes autofunciones son $\operatorname{sen} n\pi x/L$. Ya hemos obtenido antes la parte de la solución que depende del tiempo, (4.4.10). Por tanto, hay dos familias de soluciones producto: $\operatorname{sen}(n\pi x/L) \operatorname{sen}(n\pi ct/L)$, y $\operatorname{sen}(n\pi x/L) \cos(n\pi ct/L)$. El principio de superposición implica entonces que deberíamos ser capaces de resolver el problema de valores iniciales considerando una combinación lineal de todas las soluciones producto:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right). \quad (4.4.11)$$

Las condiciones iniciales (4.4.3), se cumplen si

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Las condiciones de contorno nos han llevado a dos series de senos. Ahora tenemos dos condiciones iniciales y dos familias de coeficientes por determinar. De acuerdo a nuestro trabajo previo sobre series de Fourier de senos, sabemos que las funciones $\operatorname{sen} n\pi x/L$ forman un conjunto ortogonal. Los números A_n serán los coeficientes

de la serie de Fourier de senos de $f(x)$, así como los términos $B_n n \pi c / L$ serán los coeficientes de la serie de Fourier de senos de $g(x)$:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \\ B_n \frac{n\pi c}{L} &= \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Interpretemos estos resultados en el contexto de los instrumentos de cuerda (con extremos fijos). El desplazamiento vertical está compuesto por una combinación lineal de soluciones producto simples,

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right).$$

Llamamos a estas soluciones **modos normales** de vibración. La intensidad del sonido producido depende de la amplitud², $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$. La dependencia en el tiempo es una función armónica simple con **frecuencia circular** (el número de oscilaciones en 2π unidades de tiempo) igual a $n\pi c/L$, donde $c = \sqrt{T_0/\rho_0}$. El sonido producido consiste en la superposición de este número infinito de **frecuencias naturales** ($n = 1, 2, \dots$). El modo normal de vibración $n = 1$ se llama primer armónico o modo fundamental, y en música es el sonido fundamental. En el caso de una cuerda vibrante el sonido fundamental tiene frecuencia circular $\pi c/L$ ³. A mayor frecuencia natural, mayor será la altura del sonido producido. Para producir una frecuencia fundamental concreta podemos variar tanto el valor de $c = \sqrt{T_0/\rho_0}$ como el valor de L . Normalmente la densidad de masa está fija. El instrumento se afina cambiando la tensión T_0 ; a mayor T_0 , más alta será la frecuencia fundamental. Mientras se toca un instrumento de cuerda el músico también puede variar la altura del sonido cambiando la longitud efectiva, L , presionando firmemente la cuerda con el dedo. La acción de acortar L hace que la nota sea más alta. El n -ésimo modo normal se llama n -ésimo armónico. Para las cuerdas vibrantes (con extremos fijos) las frecuencias de los armónicos más altos son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, lo que en general hace que el sonido producido sea agradable al oído. Esta propiedad no es necesariamente cierta para otros tipos de instrumentos musicales.

Intentemos ilustrar el movimiento asociado con cada modo normal. En la Figura 4.4.1 están esbozados el modo fundamental y algunos armónicos superiores. Para indicar qué apariencia tienen, los dibujamos para varios valores de t . En cada tiempo t , cada modo es una oscilación simple en la variable x . La amplitud varía periódicamente con el tiempo. Estas ondas se llaman **ondas estacionarias**. En ningún caso hay desplazamiento en los extremos a causa de las condiciones de contorno. Para el segundo armónico ($n = 2$), el desplazamiento es también cero en todo momento en el punto medio $x = L/2$. Este punto se llama un **nodo** del segundo armónico.

² $A_n \cos \omega t + B_n \operatorname{sen} \omega t = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$, donde $\theta = \tan^{-1} A_n/B_n$.

³ Las frecuencias normalmente se miden en ciclos por segundo, no en ciclos por 2π unidades de tiempo. El sonido fundamental, por tanto, tiene una frecuencia de $c/2L$ ciclos por segundo.

Similarmente, hay dos nodos para el tercer armónico. Esto se puede generalizar: el n -ésimo armónico tiene $n - 1$ nodos⁴.

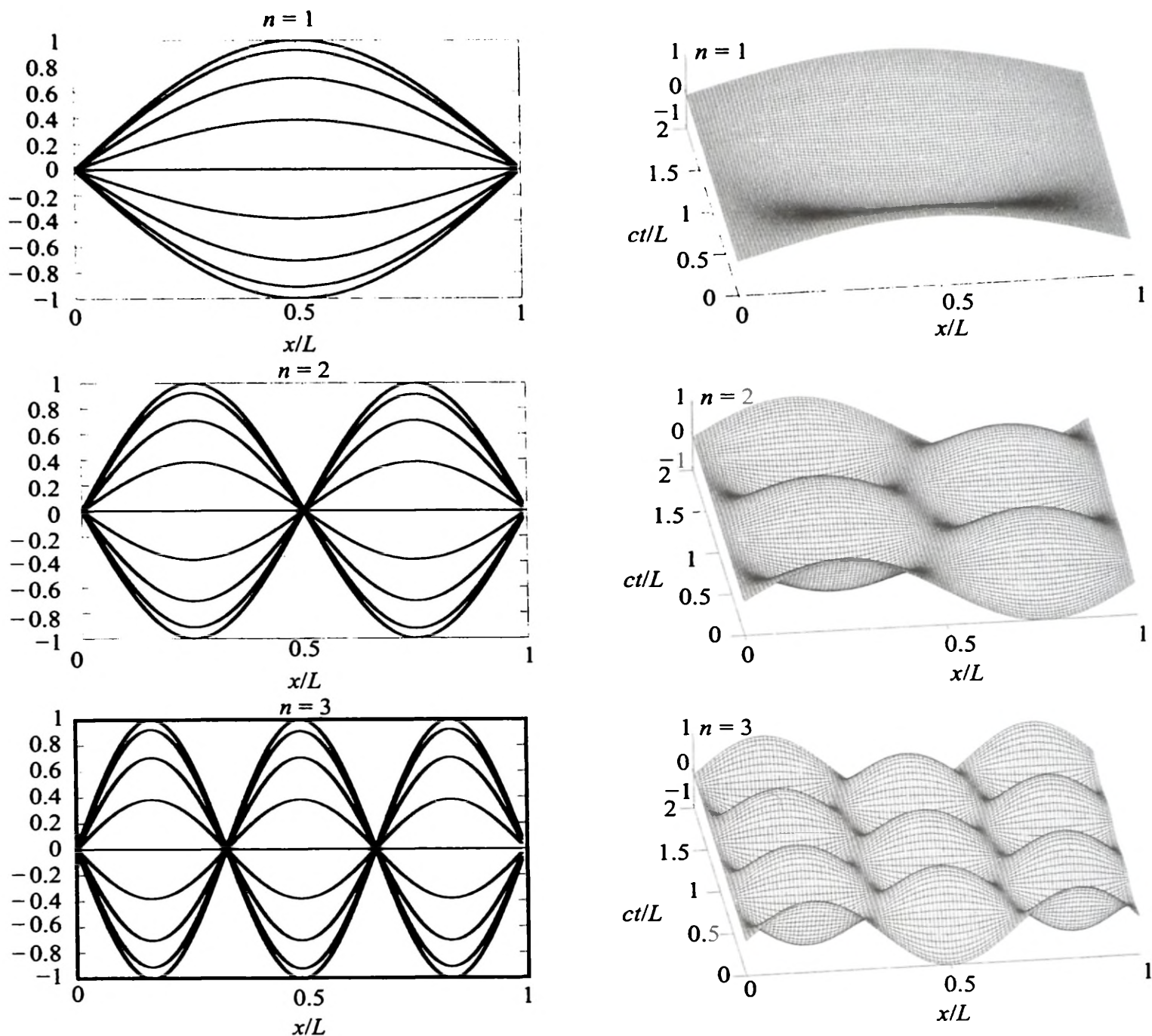


Figura 4.4.1: Modos normales de vibración de una cuerda.

Es interesante resaltar que la vibración correspondiente al segundo armónico es la correspondiente a dos cuerdas, cada una de longitud $L/2$ vibrando en su sonido fundamental, ya que $x = L/2$ es un nodo. Deberíamos obtener que las frecuencias de vibración son idénticas, esto es, la frecuencia del modo fundamental ($n = 1$) con longitud $L/2$ debería ser igual a la frecuencia del segundo armónico ($n = 2$) con longitud L . La fórmula para la frecuencia, $\omega = n\pi c/L$, verifica esta observación.

Se puede demostrar que cada onda estacionaria está compuesta por dos ondas viajeras. Por ejemplo, consideremos el término $\sin(n\pi x/L) \sin(n\pi ct/L)$. Usando

⁴Se puede visualizar experimentalmente este resultado haciendo oscilar rápidamente, a la frecuencia adecuada, un extremo de una cuerda larga que esté sujeta firmemente en el otro extremo. El resultado se puede ver fácilmente en un cordón de teléfono extensible enrollado como una hélice.

ciertas identidades trigonométricas obtenemos

$$\sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \cos \frac{n\pi}{L}(x - ct)}_{\substack{\text{onda viajando} \\ \text{hacia la derecha} \\ \text{(con velocidad } c)}} - \underbrace{\frac{1}{2} \cos \frac{n\pi}{L}(x + ct)}_{\substack{\text{onda viajando} \\ \text{hacia la izquierda} \\ \text{(con velocidad } -c)}} \quad (4.4.14)$$

De hecho, como la solución (4.4.11) de la ecuación de ondas consiste en una superposición de ondas estacionarias, se puede demostrar que esta solución es una combinación de dos ondas (cada una bastante complicada), una viajando hacia la izquierda a velocidad $-c$, con una forma fija, y otra hacia la derecha con velocidad c , con otra forma también fija. Es decir, la solución de la ecuación de ondas unidimensional se puede escribir como una suma,

$$u(x, t) = R(x - ct) + S(x + ct),$$

incluso si las condiciones de contorno no son extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$. Demostraremos y estudiaremos estos resultados más en profundidad en los ejercicios y en el Capítulo 12.

EJERCICIOS 4.4

4.4.1. Consideremos en este ejercicio cuerdas vibrantes de densidad uniforme ρ_0 y tensión T_0 .

- *(a) ¿Cuáles son las frecuencias naturales de una cuerda vibrante de longitud L con los extremos fijos?
- *(b) ¿Cuáles son las frecuencias naturales de una cuerda vibrante de longitud H que está fija en $x = 0$ y tiene libre el otro extremo [es decir, con $\partial u / \partial x(H, t) = 0$]? Dibujar unos pocos modos de vibración, como se hizo en la Figura 4.4.1.
- (c) Demostrar que los modos de vibración de los armónicos *impares* (es decir, $n = 1, 3, 5, \dots$) del apartado (a) son iguales a los modos de vibración del apartado (b) cuando $H = L/2$. Comprobar que sus frecuencias naturales son las mismas. Explicarlo brevemente usando argumentos de simetría.

4.4.2. En la Sección 4.2 se demostró que el desplazamiento u de una cuerda no uniforme cumple la ecuación

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q,$$

donde Q representa la componente vertical de la fuerza externa por unidad de longitud. Si $Q = 0$, la ecuación en derivadas parciales es homogénea. Si $Q = \alpha u$, obtenemos una ecuación homogénea ligeramente diferente.

- (a) Demostrar que si $\alpha < 0$, la fuerza externa es de recuperación (hacia la posición $u = 0$). Demostrar que si $\alpha > 0$, la fuerza externa tiende a mover la cuerda de su posición de equilibrio $u = 0$.
- (b) Separar variables en el caso en que $\rho_0 = \rho_0(x)$ y $\alpha = \alpha(x)$, pero T_0 se mantiene constante por razones físicas. Analizar la ecuación ordinaria dependiente del tiempo.
- *(c) Particularizar el apartado (b) al caso en que los coeficientes son constantes. Resolver el problema de valores iniciales en el caso $\alpha < 0$:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & u(x, 0) &= 0, \\ u(L, t) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

¿Cuáles son las frecuencias de vibración?

4.4.3. Considérese una cuerda vibrante ligeramente amortiguada que satisface la ecuación

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial t}.$$

- (a) Explicar brevemente por qué $\beta > 0$.
- *(b) Calcular (por separación de variables) la solución que cumple las condiciones de contorno

$$u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(L, t) = 0,$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x).$$

Supóngase que el coeficiente de fricción β es relativamente pequeño ($\beta^2 < 4\pi^2 \rho_0 T_0 / L^2$).

4.4.4. Rehacer el Ejercicio 4.4.3(b) por el método de desarrollo en autofunciones.

4.4.5. Rehacer el Ejercicio 4.4.3(b) si $(4\pi^2 \rho_0 T_0 / L^2) < \beta^2 < (16\pi^2 \rho_0 T_0 / L^2)$.

4.4.6. Para el problema dado por (4.4.1) - (4.4.3) demostrar, a partir de la Fórmula (4.4.11), que se cumple

$$u(x, t) = R(x - ct) + S(x + ct),$$

donde R y S son funciones de una variable.

4.4.7. Para una cuerda vibrante que cumple las Fórmulas (4.4.1) - (4.4.3) y está inicialmente en reposo, $g(x) = 0$, demostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [F(x - ct) + F(x + ct)],$$

donde $F(x)$ es la extensión periódica de $f(x)$. *Indicaciones:*

1. Para todo x , $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$.
2. $\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)]$.

Comentario: este resultado muestra que la dificultad práctica de sumar un número infinito de términos de una serie de Fourier se puede evitar en la ecuación de ondas unidimensional.

- 4.4.8.** Para una cuerda vibrante que cumple (4.4.1) - (4.4.3), está inicialmente en posición cero, $f(x) = 0$, y con velocidad inicial dada, demostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(\bar{x}) d\bar{x},$$

donde $G(x)$ es la extensión impar periódica de $g(x)$. *Indicaciones:*

1. Para todo x , $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi c}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$.
2. $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$.

Véase el comentario tras el Ejercicio 4.4.7.

- 4.4.9** Obtener la fórmula de conservación de la energía de una cuerda vibrante a partir de la Ecuación (4.4.1),

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_0^L, \quad (4.4.15)$$

donde la energía total E es la suma de la energía cinética, definida por $\int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$, y la energía potencial, definida por $\int_0^L \frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$.

- 4.4.10.** Calcular la energía total E de una cuerda vibrante con las siguientes condiciones (véase el Ejercicio 4.4.9):

- (a) $u(0, T) = 0$ y $u(L, t) = 0$.
- (b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$.
- (c) $u(0, t) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -\gamma u(L, t)$ con $\gamma > 0$.
- (d) $\gamma < 0$ en el apartado (c).

- 4.4.11.** Demostrar que la energía potencial y la energía cinética (definidas en el Ejercicio 4.4.9) son iguales en una onda viajera, $u = R(x - ct)$.

- 4.4.12.** Usando (4.4.15), probar que la solución de (4.4.1) - (4.4.3) es única.

- 4.4.13.** (a) Calcular la energía de un modo normal utilizando (4.4.15).

- (b) Demostrar que cuando $u(x, t)$ cumple (4.4.11), la energía total es la suma de la energía contenida en cada modo.

4.5. Membrana vibrante

La ecuación del calor en una dimensión espacial es $\partial u/\partial t = k\partial^2 u/\partial x^2$, mientras que en dos o tres dimensiones se puede escribir como $\partial u/\partial t = k\nabla^2 u$. De forma similar, la vibración de una cuerda (ecuación de ondas en una dimensión) se puede extender a la vibración de una membrana (ecuación de ondas en dos dimensiones).

El desplazamiento vertical de una cuerda vibrante cumple la ecuación de ondas unidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Pero hay importantes problemas físicos que se rigen por la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u, \quad (4.5.1)$$

conocida como ecuación de ondas en dos o tres dimensiones. Un ejemplo de problema físico que satisface la ecuación de ondas bidimensional es la vibración de una membrana muy tensa. Podemos pensar en ella como en una cuerda vibrante bidimensional. Presentaremos una deducción *breve* de esta ecuación, tal como lo hace Kaplan [1981], omitiendo algunos de los detalles que estudiamos para una cuerda. Introducimos de nuevo el desplazamiento $z = u(x, y, t)$, que depende de x, y y t (como se muestra en la Figura 4.5.1). Si todas las pendientes (es decir, $\partial u/\partial x$ y $\partial u/\partial y$) son pequeñas, podemos suponer, como una buena aproximación, que las vibraciones son totalmente verticales y que la tensión es aproximadamente constante. Entonces la densidad de masa (masa por unidad de superficie), $\rho_0(x, y)$, de la membrana en la posición sin desplazamiento, no cambia de manera apreciable cuando la membrana está en otra posición.

La tensión (por unidad de longitud de arco), \mathbf{F}_T , es tangente a la membrana y actúa a lo largo de toda la frontera. La dirección de la tensión (véase la Figura 4.5.1) se obtiene calculando el producto vectorial del vector unitario tangente a la frontera, $\hat{\mathbf{t}}$, por el vector unitario normal a la membrana, $\hat{\mathbf{n}}$. Como la tensión tiene magnitud constante $|\mathbf{F}_T| = T_0$, obtenemos que

$$\mathbf{F}_T = T_0 \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}.$$

La componente vertical de la tensión se obtiene calculando $\mathbf{F}_T \cdot \hat{\mathbf{k}}$.

Debemos aplicar la ley de Newton al movimiento vertical en cada sección diferencial de la membrana y luego tenemos que sumar (es decir, integrar). La suma (es decir, la integral de superficie) de la masa ($\rho_0 dA$) por la componente vertical de la aceleración ($\partial^2 u/\partial t^2$) es igual a la tensión *vertical* total (es decir, a la integral de línea) si ignoramos las fuerzas externas

$$\iint \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dA = \oint T_0 \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} ds = \oint T_0 (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\mathbf{t}} ds, \quad (4.5.2)$$

donde ds es la diferencial de longitud de arco, dA es la diferencial de superficie y hemos utilizado una propiedad del triple producto ($\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$).

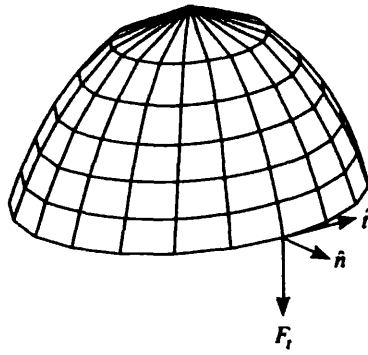


Figura 4.5.1: Membrana perturbada con tensión aproximadamente constante T_0 . El vector normal a la superficie es \hat{n} y el vector tangente a la frontera es \hat{t} .

Aplicaremos ahora (por única vez en este texto) el teorema de Stokes, que afirma que $\iint \nabla \times \mathbf{B} \cdot \hat{n} \, dA = \oint \mathbf{B} \cdot \hat{t} \, ds$, obteniendo:

$$\iint \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dA = \iint T_0 [\nabla \times (\hat{n} \times \hat{k})] \cdot \hat{n} \, dA. \quad (4.5.3)$$

Como la región de integración es arbitraria, deducimos que

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 [\nabla \times (\hat{n} \times \hat{k})] \cdot \hat{n}. \quad (4.5.4)$$

La posición de cada punto de la membrana está dada por $z = u(x, y)$ y, por tanto, el vector normal unitario exterior a la membrana vibrante (utilizando el gradiente, véase el Apéndice a la Sección 1.5) se calcula de la forma siguiente:

$$\hat{n} = \frac{-\frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1}} \approx -\frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \hat{k},$$

ya que suponemos que las derivadas parciales son pequeñas. Comencemos ahora a calcular la expresión que necesitamos en (4.5.4):

$$\hat{n} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{\partial u}{\partial y} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial x} \hat{j},$$

por lo que

$$\nabla \times (\hat{n} \times \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

y finalmente obtenemos así la ecuación en derivadas parciales para una membrana vibrante:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Si dividimos por ρ_0 llegamos a la ecuación de ondas bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (4.5.5)$$

donde, de nuevo, $c^2 = T_0/\rho_0$. Pospondremos la obtención de las soluciones de los problemas de membranas vibrantes hasta el Capítulo 7.

EJERCICIO 4.5

4.5.1. Demostrar que si una membrana satisface una condición de contorno “elástica” entonces

$$T_0 \nabla u \cdot \hat{n} = -ku, \quad (4.5.6)$$

si existe una fuerza recuperadora por unidad de longitud proporcional al desplazamiento.

4.6. Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas (luz) y acústicas (sonido)

Las perturbaciones de un medio uniforme frecuentemente cumplen la **ecuación de ondas tridimensional**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (4.6.1)$$

En un fluido, los pequeños cambios u respecto de una densidad de masa ρ y de una presión p uniformes satisfacen (4.6.1), donde el coeficiente c cumple $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$. En electrodinámica, cada componente de un sistema de campos vectoriales satisface (4.6.1), donde $c^2 = c_{\text{luz}}^2/\mu\epsilon$, siendo c_{luz}^2 la velocidad de la luz en el vacío, μ la permeabilidad y ϵ la constante dieléctrica.

Existen soluciones especiales de (4.6.1) conocidas como **ondas viajeras planas**, que son de la forma

$$u = Ae^{i(k_1x+k_2y+k_3z-\omega t)} = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (4.6.2)$$

Aquí, tanto la parte real como la imaginaria tienen significado físico. La constante A es la amplitud y el vector \mathbf{k} , llamado **vector de números de onda** apunta en la dirección de la onda (perpendicular a los **frentes de onda** $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \text{constante}$). La magnitud del vector de números de onda, $k \equiv |\mathbf{k}|$, es el **número de onda** ya que se puede demostrar (véanse los ejercicios) que es igual al número de ondas que

hay en una distancia 2π , en la dirección de la onda (en la dirección \mathbf{k}). La **longitud de onda** es igual a $\frac{2\pi}{k}$.

La frecuencia temporal ω de las soluciones en forma de ondas planas de la ecuación de ondas se determina sustituyendo (4.6.2) en (4.6.1):

$$\omega^2 = c^2 k^2, \quad (4.6.3)$$

donde $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. Es importante conocer esta relación entre ω y k . Al igual que en una dimensión, se puede demostrar que

$$\text{velocidad de la onda viajera o fase} = \frac{\omega}{k} = \pm c. \quad (4.6.4)$$

Si la ecuación de ondas está definida en una región acotada (respectivamente, una región infinita), la solución en forma de onda plana corresponde a una componente de una serie (respectivamente, de una transformada —véase el Capítulo 10) de Fourier multidimensional. Tal como demostramos en la siguiente subsección, las ondas planas se consideran a menudo como si estuvieran generadas en el infinito.

4.6.1. Ley de refracción de Snell

Supongamos que tenemos dos materiales diferentes (con distintas densidades de masa si estudiamos ondas sonoras o distintas constantes dieléctricas si estudiamos ondas electromagnéticas) que se extienden hasta el infinito con una frontera plana entre ellos. Supongamos que la velocidad de onda es c_+ para $z > 0$ y c_- para $z < 0$, tal y como se muestra en la Figura 4.6.1. Supongamos que hay una onda plana **incidente** que cumple (4.6.2) (con vector de número de onda \mathbf{k}_I y frecuencia $\omega = \omega_+(k_I) = c_+ k_I$), propagándose desde el infinito con componente $z > 0$ de amplitud $A = 1$, que normalizamos a 1, y que la onda incidente forma un ángulo θ_I con la normal.

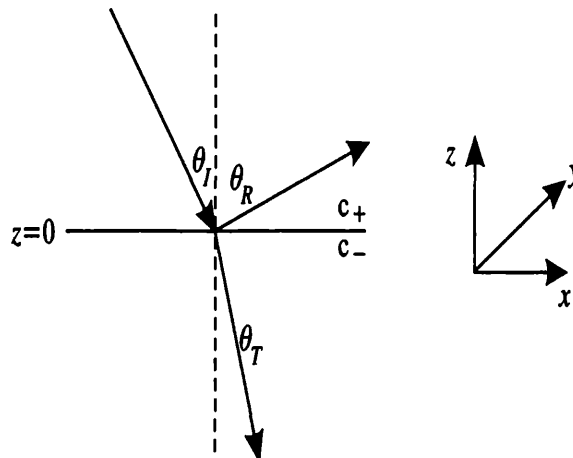


Figura 4.6.1: Ondas reflejada y transmitida (o refractada).

Supongamos que hay una onda **reflejada** en el medio superior que cumple (4.6.2) (con vector de número de onda \mathbf{k}_R y frecuencia $\omega = \omega_+(k_R) = c_+ k_R$ desconocidos), de amplitud compleja R desconocida. Como la ecuación de onda es lineal.

la solución en el medio superior es la suma de la onda incidente y la onda reflejada:

$$u = e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{x} - \omega_+(c+k_I)t)} + Re^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{x} - \omega_+(c+k_R)t)} \quad \text{para } z > 0. \quad (4.6.5)$$

Demostraremos que el vector de número de onda de la onda reflejada está determinado por la conocida ley que dice que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia.

En el medio inferior, $z < 0$, supondremos que hay una **onda refractada**, que llamaremos **onda transmitida**, e introduciremos para denotarla el subíndice T . Supongamos que la onda transmitida satisface (4.6.2) (con vector de número de onda \mathbf{k}_T y frecuencia $\omega = \omega_-(k_T) = c_-k_T$ desconocidos), y tiene amplitud compleja T desconocida:

$$u = Te^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{x} - \omega_-(c-k_T)t)} \quad \text{para } z < 0. \quad (4.6.6)$$

Demostraremos además que esta onda reflejada puede existir o no, tal como afirma la ley de refracción de Snell.

Hay dos condiciones de contorno que se deben cumplir en la interfase, $z = 0$, entre los dos materiales. Una de las condiciones es que u debe ser continua, luego en $z = 0$:

$$e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{x} - \omega_+(c+k_I)t)} + Re^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{x} - \omega_+(c+k_R)t)} = Te^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{x} - \omega_-(c-k_T)t)}. \quad (4.6.7)$$

Como esta igualdad debe cumplirse para todo tiempo, las frecuencias de las tres ondas deben ser las mismas:

$$\omega_+(k_I) = \omega_+(k_R) = \omega_-(k_T). \quad (4.6.8)$$

A partir de la ecuación de la frecuencia (4.6.3), concluimos que la onda reflejada tiene la misma longitud de onda que la onda incidente, pero la onda refractada tiene una longitud de onda distinta:

$$c_+k_I = c_+k_R = c_-k_T. \quad (4.6.9)$$

Por la Ecuación (4.6.7), k_1 y k_2 (la proyección de \mathbf{k} en las direcciones x e y) deben ser iguales para las tres ondas. Como $k_I = k_R$, la componente z de la onda reflejada debe ser igual a la componente z de la onda incidente, pero cambiada de signo. Por tanto, **el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia**,

$$\theta_R = \theta_I, \quad (4.6.10)$$

donde los ángulos se miden con respecto a la normal a la superficie. Observemos que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k|\mathbf{x}|\cos\phi$ es igual para las tres ondas, donde ϕ es el ángulo entre \mathbf{k} y \mathbf{x} en $z = 0$, y por tanto, para la onda transmitida el ángulo de transmisión (o refracción) cumple

$$k_I \sin\theta_I = k_T \sin\theta_T.$$

Utilizando (4.6.9), obtenemos la ley de Snell:

$$\boxed{\frac{\text{sen } \theta_T}{\text{sen } \theta_I} = \frac{k_I}{k_T} = \frac{c_-}{c_+}} \quad (4.6.11)$$

Muchos resultados importantes y muy conocidos de la óptica se derivan de la ley de Snell. Por ejemplo, en el caso usual en que el medio superior (con constante c_+) es aire y el medio inferior (con constante c_-) es agua, sabemos que $c_+ > c_-$. En este caso, la ley de Snell nos da que $\text{sen } \theta_T < \text{sen } \theta_I$, luego la onda transmitida se refracta hacia la normal (como se muestra en la Figura 4.6.1).

Si $c_+ < c_-$, la ley de Snell (4.6.11) predice en algunos casos que $\text{sen } \theta_T > 1$, lo cual es imposible. Esto es así porque existe un ángulo de incidencia crítico θ_I , definido por $\text{sen } \theta_I = \frac{c_+}{c_-}$, a partir del cual desaparece la refracción y todo es reflexión. Para ángulos mayores, la solución transmitida no es una onda plana sino una onda evanescente que decae exponencialmente, tal como describiremos en una subsección posterior. No existe entonces onda refractada plana.

4.6.2. Intensidad (amplitud) de las ondas reflejada y refractada

Supondremos ahora que existe una onda reflejada plana. Con lo que hemos estudiado hasta ahora sobre las ondas reflejadas y refractadas, y por la continuidad de u , deducimos que la única condición de contorno (4.6.7) se convierte simplemente en

$$1 + R = T. \quad (4.6.12)$$

No podemos calcular la amplitud de R ni la de T sin la segunda condición de contorno. Ésta puede ser ligeramente diferente en las distintas aplicaciones físicas, Por lo que los resultados de esta subsección no se aplican a todos los problemas físicos. Sin embargo, el método que utilizamos se puede aplicar en todos los casos y los resultados obtenidos son sólo ligeramente diferentes.

Supongamos que la segunda condición de contorno es $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ en $z = 0$. De (4.6.5) y (4.6.6) se sigue que

$$k_{3_I} + k_{3_R} R = k_{3_T} T. \quad (4.6.13)$$

Según vemos en la Figura 4.6.1, las componentes z de los vectores de número de onda de las tres ondas cumplen:

$$\begin{aligned} k_{3_I} &= -k_I \cos \theta_I \\ k_{3_R} &= k_R \cos \theta_R = k_I \cos \theta_I \\ k_{3_T} &= -k_T \cos \theta_T = -k_I \frac{\text{sen } \theta_I}{\text{sen } \theta_T} \cos \theta_T \end{aligned} \quad (4.6.14)$$

donde hemos recordado que la onda reflejada satisface $k_{3_R} = -k_{3_I}$ y hemos utilizado la ley de Snell (4.6.11) para simplificar la componente z del vector de números de

onda de la onda transmitida. Usando (4.6.14), la segunda condición de contorno (4.6.13) se convierte, tras dividir por $-k_I \cos \theta_I$, en

$$1 - R = \frac{\text{sen } \theta_I \cos \theta_T}{\text{sen } \theta_T \cos \theta_I} T. \quad (4.6.15)$$

Las amplitudes complejas de la reflexión y la transmisión se pueden determinar sumando las dos ecuaciones lineales (4.6.12) y (4.6.15),

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{1 + \frac{\text{sen } \theta_I \cos \theta_T}{\text{sen } \theta_T \cos \theta_I}} = \frac{2 \text{sen } \theta_T \cos \theta_I}{\text{sen}(\theta_T + \theta_I)} \\ R &= \frac{2 \text{sen } \theta_T \cos \theta_I - \text{sen}(\theta_T + \theta_I)}{\text{sen}(\theta_T + \theta_I)} = \frac{\text{sen}(\theta_T - \theta_I)}{\text{sen}(\theta_T + \theta_I)}. \end{aligned}$$

4.6.3. Reflexión interna total

Si $\text{sen } \theta_I \frac{c_-}{c_+} > 1$, entonces la ley de Snell no se puede cumplir para una onda transmitida (refractada) plana, $u = T e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{x} - \omega - (c - k_T)t)}$ en el medio inferior. Por la condición de contorno en $z = 0$, las componentes x e y del vector de números de onda de una solución deben coincidir con las de la onda incidente. Por tanto, el vector de números de onda transmitido debe cumplir $\vec{k}_T = (k_{1I}, k_{2I}, k_{3T})$. Si aplicamos la ley de Snell (4.6.11), y despejamos k_{3T} , obtenemos

$$k_{3T} = \pm \sqrt{k_I^2 \left(\frac{c_+^2}{c_-^2} - \text{sen}^2 \theta_I \right)}, \quad (4.6.16)$$

ya que $k_1^2 + k_2^2 = k^2 \text{sen}^2 \theta$. El valor de k_{3T} es imaginario, lo que sugiere que hay soluciones de la ecuación de ondas (en el medio inferior),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_-^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (4.6.17)$$

que crecen y decrecen exponencialmente en z . Estamos interesados en buscar soluciones producto de la forma

$$u(x, y, z, t) = w(z) e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}, \quad (4.6.18)$$

donde k_1 y k_2 son los números de onda asociados con la onda incidente y ω es la frecuencia de esa misma onda. Si imponemos que la función (4.6.18) cumpla la Ecuación (4.6.17) obtenemos:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \left(k_1^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{c_-^2} \right) w = k_I^2 \left(\text{sen}^2 \theta_I - \frac{c_+^2}{c_-^2} \right) w.$$

En ese caso, $w(z)$ es una combinación lineal de términos que crecen y decrecen exponencialmente en z . Como queremos que nuestra solución decaiga exponencialmente

cuando $z \rightarrow -\infty$, elegimos, como solución de la ecuación de ondas en el medio inferior la función

$$u(x, y, z, t) = T e^{k_I \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - \frac{c_+^2}{c_-^2} z} e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega)t)},$$

en lugar de la onda plana. Esta función es una onda plana bidimensional cuya amplitud decae exponencialmente en la dirección $-z$, y se conoce como onda **evanescente**.

Para que u y $\frac{\partial u}{\partial z}$ sean continuas en $z = 0$, debemos tener,

$$1 + R = T, \quad (4.6.19)$$

$$ik_{3I}(1 - R) = T k_I \sqrt{\text{sen}^2 \theta_I - \frac{c_+^2}{c_-^2}}. \quad (4.6.20)$$

Estas ecuaciones se pueden simplificar para calcular el coeficiente de reflexión T (que es la amplitud de la onda evanescente en $z = 0$). Los valores de R (y de T) son complejos de acuerdo a los desplazamientos de fase de la onda reflejada (y evanescente).

EJERCICIOS 4.6

- 4.6.1. Demostrar que para una onda plana dada por (4.6.2) el número de ondas en una distancia de 2π , en la dirección de la onda (la dirección \mathbf{k}), es $k \equiv |\mathbf{k}|$.
- 4.6.2. Demostrar que, si la velocidad es $\frac{\omega}{k}$, la fase de una onda plana se conserva al moverse en la dirección de la onda.
- 4.6.3. En óptica se define el índice de refracción como $n = \frac{c_{\text{vac}}}{c}$. Expresar la ley de Snell en términos de los índices de refracción.
- 4.6.4. Calcular R y T para la onda evanescente resolviendo las Ecuaciones (4.6.19) y (4.6.20).
- 4.6.5. Calcular R y T suponiendo que $k_{3I} = \pm i\beta$, donde β está definida por (4.6.16). ¿Qué signo se debe elegir para tener decaimiento exponencial para $z \rightarrow -\infty$?

Capítulo 5

Problemas de autovalores de Sturm-Liouville

5.1. Introducción

Hemos comprobado ya que el método de separación de variables es muy útil para resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales homogéneas con condiciones de contorno homogéneas. En todos los ejemplos que hemos estudiado *hasta ahora* el problema de contorno que determina los autovalores necesarios (que eran las constantes de separación) era la ecuación diferencial ordinaria sencilla

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0. \quad (5.1.1)$$

Las soluciones explícitas de esta ecuación determinaban los autovalores λ a partir de las condiciones de contorno homogéneas. El principio de superposición nos daba lugar a continuación a soluciones en forma de serie, que debíamos estudiar. Estudiamos tres casos distintos (dependiendo de las condiciones de contorno): series de Fourier de senos, series de Fourier de cosenos y series de Fourier generales (con senos y cosenos). Afortunadamente, comprobamos mediante la integración explícita que las autofunciones eran ortogonales, y esto nos permitía calcular los coeficientes de la serie a partir de la condición no homogénea.

En esta sección, explicaremos y profundizaremos en estos resultados. Demostraremos que la ortogonalidad de las autofunciones se puede obtener incluso si no podemos resolver la ecuación diferencial que las define en términos de funciones elementales, como ocurre por ejemplo en (5.1.1). Obtendremos que la ortogonalidad es una propiedad directa de la ecuación diferencial. Estudiaremos otros problemas de contorno que surgen al separar variables y que dan lugar a otras familias de funciones ortogonales. Estas generalizaciones de series de Fourier no siempre van a involucrar senos y cosenos, porque no siempre será la Ecuación (5.1.1) la que defina las autofunciones.

5.2. Ejemplos

5.2.1. Flujo de calor en una varilla no uniforme

En la Sección 1.2 demostrábamos que la temperatura u de una varilla no uniforme es la solución de la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q, \quad (5.2.1)$$

donde Q representa alguna posible fuente de energía calorífica. Para considerar el caso de una varilla *no uniforme*, permitiremos que los coeficientes térmicos, c , ρ y K_0 dependan de x . El método de separación de variables se puede aplicar sólo si (5.2.1) es lineal y *homogénea*. Normalmente, con objeto de que la ecuación sea homogénea, consideramos solamente problemas sin fuentes de calor, es decir, $Q = 0$. Podemos, sin embargo, considerar un caso algo más general permitiendo que exista una fuente de calor Q que sea proporcional a la temperatura u ,

$$Q = \alpha u, \quad (5.2.2)$$

con lo que la ecuación a considerar sería

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \alpha u. \quad (5.2.3)$$

También permitiremos que α dependa de x (pero no de t), como si los tipos específicos de fuentes dependieran del material. Aunque $Q \neq 0$, (5.2.3) sigue siendo una ecuación en derivadas parciales lineal y homogénea. Para entender el efecto de esta fuente Q , presentamos una situación física plausible en la que pueden surgir términos de la forma $Q = \alpha u$. Supongamos que una cierta reacción química genera calor (una reacción *exotérmica*), lo que corresponde a $Q > 0$. Puede ocurrir que esta reacción sea más intensa a temperaturas más altas. De esta manera, la energía calorífica generada puede ser proporcional a la temperatura, en cuyo caso $\alpha > 0$ (suponiendo que $u > 0$). Otros tipos de reacciones químicas (conocidas como *endotérmicas*) absorben calor de la varilla y la intensidad de la reacción podría ser proporcional también a la temperatura. Para temperaturas positivas ($u > 0$), esto corresponde a $\alpha < 0$. En nuestro problema, $\alpha = \alpha(x)$ y, por tanto, es posible que $\alpha > 0$ en algunos puntos de la varilla y $\alpha < 0$ en otros. Resumimos estos resultados diciendo que si $\alpha(x) < 0$ para todo x , entonces se está robando energía térmica de la varilla y viceversa. Más adelante, en nuestro análisis matemático, discutiremos también el caso especial $\alpha(x) < 0$.

Podemos resolver la Ecuación (5.2.3) por separación de variables si tenemos además condiciones de contorno homogéneas (aún sin especificar) en cada extremo $x = 0$ y $x = L$. Ya hemos analizado los casos en los que $\alpha = 0$ y c, ρ, K_0 son constantes. Al separar variables, sustituimos la función producto

$$u(x, t) = \phi(x)h(t), \quad (5.2.4)$$

en la Ecuación (5.2.3), lo que nos da

$$c\rho\phi(x)\frac{dh}{dt} = h(t)\frac{d}{dx}\left(K_0\frac{d\phi}{dx}\right) + \alpha\phi(x)h(t).$$

La división por $\phi(x)h(t)$ no necesariamente separa las variables, ya que $c\rho$ puede depender de x . Sin embargo, dividiendo por $c\rho\phi(x)h(t)$ siempre tenemos éxito:

$$\frac{1}{h}\frac{dh}{dt} = \frac{1}{c\rho\phi}\frac{d}{dx}\left(K_0\frac{d\phi}{dx}\right) + \frac{\alpha}{c\rho} = -\lambda. \quad (5.2.5)$$

Hemos introducido la constante de separación $-\lambda$, precedida de un signo negativo, porque de esta forma la ecuación dependiente del tiempo, que se obtiene a partir de (5.2.5),

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda h, \quad (5.2.6)$$

tendrá soluciones que decaen exponencialmente si $\lambda > 0$. Las soluciones de (5.2.6) crecen exponencialmente si $\lambda < 0$ (y son constantes si $\lambda = 0$). En los problemas físicos normalmente no encontramos soluciones que crezcan exponencialmente en el tiempo. Sin embargo, en problemas en los que $\alpha > 0$ por lo menos en una parte de la varilla, se está creando energía térmica en la varilla por alguna reacción exotérmica y por tanto es posible que allí existan algunos autovalores negativos ($\lambda < 0$).

La ecuación diferencial correspondiente a la variable espacial que se obtiene por separación de variables es

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(K_0\frac{d\phi}{dx}\right) + \alpha\phi + \lambda c\rho\phi = 0,} \quad (5.2.7)$$

que cuando se complementa con dos condiciones de contorno homogéneas constituye un problema de contorno. Esta ecuación diferencial no es $d^2\phi/dx^2 + \lambda\phi = 0$. Tampoco tiene coeficientes constantes, porque las constantes térmicas K_0, c, ρ y α no lo son. *En general, las ecuaciones diferenciales con coeficientes variables aparecen en situaciones en que las propiedades físicas no son uniformes.*

Observemos que no podemos decidir sobre el signo adecuado de la constante de separación analizando rápidamente la ecuación diferencial espacial (5.2.7) junto con sus condiciones de contorno homogéneas. Cuando los coeficientes no sean constantes, no seremos capaces de resolver (5.2.7), en la mayoría de los casos, más que por

medio de soluciones numéricas aproximadas en un ordenador. Consecuentemente, describiremos en la Sección 5.3 algunas propiedades cualitativas importantes de la solución de (5.2.7). Más adelante, una vez que hayamos entendido mejor la Ecuación (5.2.7), volveremos a investigar el flujo de calor en una varilla no uniforme. De momento describiremos otro ejemplo que da lugar a un problema de contorno con coeficientes no constantes.

5.2.2. Flujo radial de calor

También pueden aparecer ecuaciones diferenciales con coeficientes variables aun cuando los parámetros físicos sean constantes. En la Sección 1.5 demostrábamos que si la temperatura u en una cierta región bidimensional plana es radial (es decir, u sólo depende del tiempo t y de la distancia r al origen), entonces u es la solución de la ecuación en derivadas parciales homogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (5.2.8)$$

suponiendo que todas las constantes térmicas son constantes.

Aplicamos el método de separación de variables, buscando soluciones en forma de producto:

$$u(r, t) = \phi(r)h(t).$$

La Ecuación (5.2.8) implica entonces que

$$\phi(r) \frac{dh}{dt} = \frac{kh(t)}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right).$$

Si dividimos por $\phi(r)h(t)$ separamos las variables, pero también es conveniente dividir por la constante k , ya que así se elimina esta constante del problema de contorno:

$$\frac{1}{k} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{r\phi} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = -\lambda. \quad (5.2.9)$$

Las dos ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas son

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda kh, \quad (5.2.10)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) + \lambda r \phi = 0. \quad (5.2.11)$$

La constante de separación se denota por $-\lambda$, ya que esperamos que las soluciones decaigan exponencialmente en el tiempo, y esto es lo que implica (5.2.10) si

$\lambda > 0$. Los coeficientes variables de (5.2.11) son debidos a factores geométricos introducidos al utilizar coordenadas polares. Más adelante en este texto (Sección 7.7) demostraremos que la Ecuación (5.2.11) se puede resolver utilizando las funciones de Bessel. Sin embargo, el estudio general que haremos a lo largo de este capítulo será muy valioso para entender este problema.

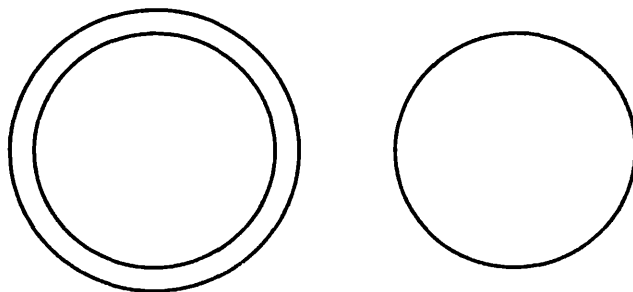


Figura 5.2.1: (a) Anillo circular; (b) círculo.

Consideremos cuáles son las condiciones de contorno adecuadas para un flujo radial en dos dominios diferentes: dentro de un anillo circular [como se muestra en la Figura 5.2.1(a)] y dentro de un círculo [como se muestra en la Figura 5.2.1(b)]. En ambos casos suponemos que todas las fronteras están a temperatura fija nula. Para el anillo, las condiciones de contorno para (5.2.11) consisten en que la temperatura debe ser nula en la frontera circular interior ($r = a$) y en la exterior ($r = b$):

$$u(a, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(b, t) = 0.$$

Estas dos condiciones de contorno son exactamente del tipo que ya hemos estudiado. Sin embargo, para el círculo, aun teniendo la misma ecuación diferencial de segundo orden (5.2.11), sólo tenemos una condición de contorno, $u(b, t) = 0$. Como la variable radial r varía desde $r = 0$ hasta $r = b$, necesitamos una condición de contorno homogénea en $r = 0$ por razones matemáticas. Recordemos que éste es el mismo problema que aparecía al estudiar la ecuación de Laplace en un cilindro; sin embargo, en esa situación teníamos una condición no homogénea en $r = b$. Por razones físicas, esperamos que la condición en $r = 0$ sea que la temperatura esté acotada allí, es decir, $|u(0, t)| < \infty$. Éste es un ejemplo de **condición de singularidad**. Esta condición es homogénea, con lo que tenemos condiciones homogéneas en ambos extremos, $r = 0$ y $r = b$, para el problema en el círculo.

5.3. Problemas de autovalores de Sturm-Liouville

5.3.1. Clasificación general

Ecuación diferencial. Un problema de contorno consiste en una ecuación diferencial y sus correspondientes condiciones. Todas las ecuaciones diferenciales asociadas a los problemas de contorno que se han formulado en este texto se pueden

escribir de la forma siguiente,

$$\frac{d}{dx} \left(p \frac{d\phi}{dx} \right) + q\phi + \lambda\sigma\phi = 0, \quad (5.3.1)$$

donde λ es el autovalor. Aquí, la variable x está definida en un intervalo de longitud finita $a < x < b$. Cuatro ejemplos de este tipo de problemas son:

1. *El caso más sencillo:* $\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0$, en el que $p = 1$, $q = 0$ y $\sigma = 1$.
2. *Flujo de calor en una varilla no uniforme:* $\frac{d}{dx} \left(K_0 \frac{d\phi}{dx} \right) + \alpha\phi + \lambda c\rho\phi = 0$, en el que $p = K_0$, $q = \alpha$ y $\sigma = c\rho$.
3. *Vibraciones de una cuerda no uniforme:* $T_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} + \alpha\phi + \lambda\rho_0\phi = 0$, en el que $p = T_0$ (constante), $q = \alpha$ y $\sigma = \rho_0$ (véase el Ejercicio 5.3.1).
4. *Flujo de calor radial:* $\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) + \lambda r\phi = 0$; aquí la variable independiente es $x = r$, y se tiene $p(x) = x$, $q(x) = 0$ y $\sigma(x) = x$.

Tabla 5.3.1: Tipos de condiciones de contorno

	Flujo de calor	Cuerda vibrante	Terminología matemática
$\phi = 0$	Temperatura fija (nula)	Desplazamiento fijo (nulo)	Condición Dirichlet o de primera clase
$\frac{d\phi}{dx} = 0$	Aislado	Libre	Condición Neumann o de segunda clase
$\frac{d\phi}{dx} = \pm h\phi$ $\left(\begin{array}{l} +\text{extremo} \\ \text{izquierdo} \\ -\text{extremo} \\ \text{derecho} \end{array} \right)$	Ley de enfriamiento de Newton con temperatura exterior de 0° , $h = H/K_0$ (físicamente, $h > 0$)	Condición de contorno elástica, $h = k/T_0$ (físicamente, $h > 0$)	Tercera clase o condición Robin
$\phi(-L) = \phi(L)$ $\frac{d\phi}{dx}(-L) = \frac{d\phi}{dx}(L)$	Contacto térmico perfecto	-	Condición de periodicidad o de tipo mixto
$ \phi(0) < \infty$	Temperatura acotada		Condición de singularidad

Se conocen muchos resultados interesantes concernientes a las ecuaciones que tienen la forma de la Ecuación (5.3.1), conocida como **ecuación diferencial de Sturm-Liouville** en honor a dos famosos matemáticos de mediados del siglo XIX que la estudiaron.

Condiciones de contorno. Las condiciones de contorno lineales homogéneas que hemos estudiado son de la forma que se resume en la Tabla 5.3.1, en la que introducimos también alguna terminología matemática.

5.3.2. Problema de autovalores de Sturm-Liouville regular

Un problema de autovalores de Sturm-Liouville regular consiste en una ecuación diferencial de Sturm-Liouville.

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\phi}{dx} \right) + q(x)\phi + \lambda\sigma(x)\phi = 0, \quad a < x < b, \quad (5.3.2)$$

con las condiciones de contorno que hemos descrito (excluyendo las condiciones de periodicidad y de singularidad). Las condiciones de contorno se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \beta_1\phi(a) + \beta_2\frac{d\phi}{dx}(a) &= 0, \\ \beta_3\phi(b) + \beta_4\frac{d\phi}{dx}(b) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

donde los coeficientes β_i son reales. Además, para que el problema sea regular, los coeficientes p, q y σ deben ser reales y continuos en todo el intervalo (incluyendo los extremos), y $p > 0$ y $\sigma > 0$ también en todo el intervalo (incluyendo los extremos). Existen muchos resultados generales de gran importancia para el problema de autovalores de Sturm-Liouville regular. En la Sección 5.5 probaremos algunos de estos resultados y en las Secciones 5.7 y 5.8 desarrollaremos algunos ejemplos interesantes que ilustran su significado.

Enunciado del teorema de Sturm-Liouville. Los resultados que enunciamos a continuación son válidos para todos los problemas de Sturm-Liouville regulares, y serán estudiados más adelante con mayor profundidad (y algunos de ellos serán probados).

1. Todos los autovalores λ son reales.
2. Existe una cantidad infinita de autovalores:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots$$

- (a) Existe un autovalor mínimo, normalmente denotado por λ_1 .
 - (b) No existe autovalor máximo, y $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$.
3. A cada autovalor λ_n le corresponde una autofunción, denotada por $\phi_n(x)$ (que es única salvo constantes multiplicativas), que tiene exactamente $n - 1$ ceros en el intervalo $a < x < b$.
 4. Las autofunciones $\phi_n(x)$ forman un conjunto “completo”, es decir, cualquier función suave a trozos $f(x)$ se puede representar en serie de Fourier generalizada de las autofunciones:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

Más aún, esta serie converge a $[f(x+) + f(x-)]/2$ en $a < x < b$ (si se eligen los coeficientes a_n adecuadamente).

5. Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales respecto a la función peso $\sigma(x)$. En otras palabras,

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) \sigma(x) dx = 0, \quad \text{si } \lambda_n \neq \lambda_m.$$

6. Cada autovalor está relacionado con su autofunción mediante el **coeficiente de Rayleigh**:

$$\lambda = \frac{-p\phi d\phi/dx|_a^b + \int_a^b [p(d\phi/dx)^2 - q\phi^2] dx}{\int_a^b \phi^2 \sigma dx},$$

expresión que se puede simplificar por las condiciones de contorno.

Es interesante mencionar que algunos de estos resultados pueden ser válidos también para problemas de autovalores de Sturm-Liouville que no son regulares. Un ejemplo se muestra en las Secciones 7.7 y 7.8.

5.3.3. Ejemplo e ilustración del teorema de Sturm-Liouville

Mostremos por separado el significado de estos resultados, antes de probar algunos de ellos en la Sección 5.5, usando el ejemplo más sencillo de problema de Sturm-Liouville regular:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi &= 0, \\ \phi(0) &= 0, \\ \phi(L) &= 0. \end{aligned}} \quad (5.3.4)$$

En este caso la ecuación diferencial con coeficientes constantes tiene condiciones de contorno nulas en ambos extremos. Como ya sabemos, los autovalores y sus correspondientes autofunciones son

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \text{con} \quad \phi_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

lo que da lugar a una serie de Fourier de senos.

1. **Autovalores reales.** Nuestro teorema afirma que todos los autovalores λ de un problema de Sturm-Liouville regular son reales. Hemos visto ya que los autovalores son $(n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \dots$. Recordemos que para llegar a este resultado (véase la Sección 2.3.4) analizamos tres casos: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda < 0$. No nos preocupamos de buscar autovalores no reales porque es una tarea relativamente difícil y no hubiéramos obtenido autovalores distintos de $(n\pi/L)^2$. El resultado de que los autovalores son reales es por tanto muy útil (véase su prueba en la Sección 5.5) y garantiza que no es necesario considerar el caso en que λ pueda ser un número complejo no real.

2. **Ordenación de los autovalores.** Existe una cantidad infinita de autovalores de (5.3.4), a saber, $\lambda = (n\pi/L)^2$, con $n = 1, 2, 3, \dots$. A veces utilizamos la notación $\lambda_n = (n\pi/L)^2$. Observemos que existe un autovalor mínimo, $\lambda_1 = (\pi/L)^2$, pero no hay autovalor máximo, ya que $\lambda_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Nuestro teorema afirma que esto mismo es válido en cualquier problema de Sturm-Liouville regular.

3. **Ceros de las autofunciones.** Para los autovalores del Problema (5.3.4), $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, sabemos que las autofunciones correspondientes son $\text{sen} n\pi x/L$. Utilizaremos la notación $\phi_n(x) = \text{sen} n\pi x/L$. Las autofunciones son únicas (salvo producto por constantes).

Una afirmación importante e interesante de este teorema es la de que, para todos los problemas de Sturm-Liouville regulares, la autofunción n -ésima tiene exactamente $(n - 1)$ ceros, sin contar los extremos. La autofunción ϕ_1 , correspondiente al autovalor mínimo (λ_1 , $n = 1$), no debe tener ceros en el interior. La autofunción ϕ_2 , que corresponde al siguiente autovalor (λ_2 , $n = 2$), debe tener exactamente un cero en el interior y así sucesivamente. Utilizaremos nuestro problema de autovalores (5.3.4) para mostrar estas propiedades. Las autofunciones $\phi_n(x) = \text{sen} n\pi x/L$

están dibujadas en la Figura 5.3.1, para $n = 1, 2$ y 3 . Notemos que se cumple el teorema (ya que sólo contamos los ceros en puntos interiores). La función $\text{sen } \pi x/L$ no tiene ceros entre $x = 0$ y $x = L$, $\text{sen } 2\pi x/L$ tiene un cero entre $x = 0$ y $x = L$, y $\text{sen } 3\pi x/L$ tiene dos ceros entre $x = 0$ y $x = L$.

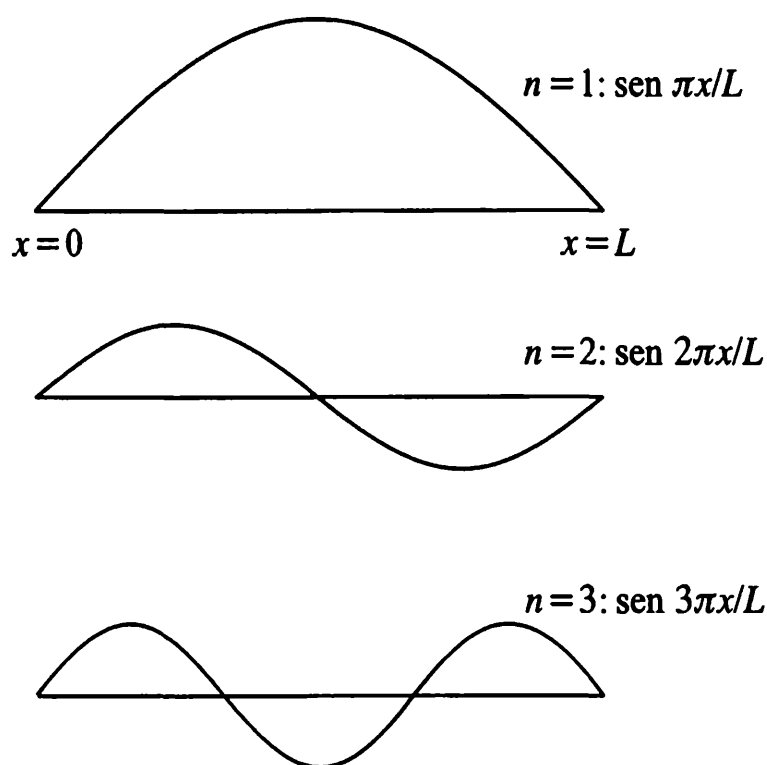


Figura 5.3.1: Ceros de las autofunciones $\text{sen } n\pi x/L$.

4. **Series de autofunciones.** De acuerdo con el teorema, las autofunciones se pueden utilizar siempre para representar cualquier función suave a trozos $f(x)$,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x). \quad (5.3.5)$$

En nuestro Ejemplo (5.3.4),

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L}.$$

Reconocemos en este desarrollo una serie de Fourier de senos. Sabemos que cualquier función suave a trozos se puede representar en serie de Fourier de senos y que la serie converge a $[f(x+) + f(x-)]/2$ para $0 < x < L$, con lo que converge a $f(x)$ para $0 < x < L$ si $f(x)$ es una función continua. El teorema afirma, por tanto, que las propiedades de convergencia de una serie de Fourier de senos son válidas para todas las series de autofunciones de cualquier problema de autovalores de Sturm-Liouville regular. Nos referimos a la Ecuación (5.3.5) como el desarrollo de $f(x)$ en términos de las autofunciones $\phi_n(x)$ o, más sencillamente, como un desarrollo en autofunciones. También se llama **serie de Fourier generalizada de $f(x)$** . Los coeficientes a_n se llaman coeficientes del desarrollo en autofunciones o **coeficientes**

de Fourier generalizados. Podremos resolver ecuaciones en derivadas parciales por el método de separación de variables gracias a que funciones bastante extrañas se pueden representar en términos de una serie de autofunciones.

5. **Ortogonalidad de las autofunciones.** La Fórmula (5.3.5) permite representar funciones en serie de autofunciones. Aquí mostraremos cómo calcular los coeficientes de Fourier generalizados a_n . De acuerdo con el importante teorema que estamos tratando, las autofunciones de cualquier problema de autovalores de Sturm-Liouville regular serán siempre ortogonales, pero debemos introducir un peso $\sigma(x)$ en la relación de ortogonalidad:

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\sigma(x) dx = 0, \quad \text{si } \lambda_n \neq \lambda_m. \quad (5.3.6)$$

En esta expresión $\sigma(x)$ es el coeficiente variable que multiplica al autovalor λ en la ecuación diferencial que define el problema de autovalores. Como para cada autovalor existe sólo una autofunción, la frase “si $\lambda_n \neq \lambda_m$ ” en (5.3.6) se puede sustituir por “si $n \neq m$ ”. En el ejemplo de la serie de Fourier de senos, al comparar la ecuación diferencial que lo define, $d^2\phi/dx^2 + \lambda\phi = 0$, con la forma de un problema general de Sturm-Liouville, observamos que $\sigma(x) = 1$, con lo que en este caso el peso es 1 y la condición de ortogonalidad, $\int_0^L \sin n\pi x/L \sin m\pi x/L dx = 0$, se sigue inmediatamente si $n \neq m$, tal como ya sabemos.

Al igual que con las series de Fourier de senos, usamos la condición de ortogonalidad para calcular los coeficientes de Fourier generalizados. Para utilizar la condición de ortogonalidad (5.3.6), tenemos que multiplicar (5.3.5) por $\phi_m(x)$ y $\sigma(x)$, obteniendo

$$f(x)\phi_m(x)\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)\phi_m(x)\sigma(x),$$

donde suponemos que todas las operaciones que necesitemos realizar con las series son válidas, por lo que utilizamos el signo igual. Integrando desde $x = a$ hasta $x = b$, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)\sigma(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\sigma(x) dx,$$

y como las autofunciones son ortogonales, con respecto al peso $\sigma(x)$, todas las integrales del miembro derecho se anulan excepto la correspondiente a n igual a m :

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)\sigma(x) dx = a_m \int_a^b \phi_m^2(x)\sigma(x) dx.$$

La integral de la derecha no es nula porque el peso debe ser positivo (por la definición de problema de Sturm-Liouville regular) y ϕ_n no puede ser idénticamente nula

por ser autofunción. Podemos, por tanto, dividir por la integral para calcular el coeficiente de Fourier generalizado a_m :

$$a_m = \frac{\int_a^b f(x)\phi_m(x)\sigma(x) dx}{\int_a^b \phi_m^2(x)\sigma(x) dx}. \quad (5.3.7)$$

En el ejemplo de una serie de Fourier de senos, se tiene $a = 0$, $b = L$, $\phi_n = \text{sen } n\pi x/L$ y $\sigma(x) = 1$. Si recordamos que $\int_0^L \text{sen}^2 n\pi x/L dx = L/2$, la Expresión (5.3.7) se reduce a la fórmula bien conocida de los coeficientes de una serie de Fourier de senos. Conviene resaltar que no siempre es posible evaluar la integral del denominador de (5.3.7) de forma sencilla.

6. **Cociente de Rayleigh.** En la Sección 5.6 probaremos que cada autovalor se relaciona con su autofunción de la siguiente manera,

$$\lambda = \frac{-p\phi \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_a^b + \int_a^b [p(d\phi/dx)^2 - q\phi^2] dx}{\int_a^b \phi^2 \sigma dx}, \quad (5.3.8)$$

fórmula que se conoce como **cociente de Rayleigh**. Observemos que la integral del denominador es no nula por los mismos motivos que antes. El numerador contiene una integral y términos que están evaluados en la frontera. Como las autofunciones no se pueden calcular sin conocer los autovalores, esta expresión nunca se usa directamente para calcular los autovalores. Sin embargo, se pueden obtener resultados significativos importantes sin resolver la integral. Consideremos el ejemplo de la serie de Fourier de senos (5.3.4) que hemos estado analizando: $a = 0$, $b = L$, $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ y $\sigma(x) = 1$. Como tenemos las condiciones de contorno $\phi(0) = 0$ y $\phi(L) = 0$, el cociente de Rayleigh implica que

$$\lambda = \frac{\int_0^L (d\phi/dx)^2 dx}{\int_0^L \phi^2 dx}. \quad (5.3.9)$$

Aunque esta fórmula no determina el valor de λ , ya que ϕ es en principio desconocida, nos da información útil: tanto el numerador como el denominador son no negativos, con lo que de (5.3.9) se sigue que $\lambda \geq 0$. Así pues, hemos concluido inmediatamente, sin resolver la ecuación diferencial, que no puede haber autovalores negativos. Cuando calculamos por primera vez los autovalores de este problema tuvimos que trabajar bastante para demostrar que no hay autovalores negativos (véase la Sección 2.3), mientras que, en este ejemplo, hemos podido aplicar simplemente el cociente de Rayleigh para eliminar la posibilidad de autovalores negativos. Como veremos más adelante, también podremos demostrar que $\lambda \geq 0$ en algunos problemas más difíciles.

Más aún, utilizando el cociente de Rayleigh se puede, algunas veces, descartar también la posibilidad de que $\lambda = 0$. Por ejemplo, en el problema (5.3.4) con condiciones de contorno nulas, veamos si puede deducirse directamente a partir de (5.3.9) que $\lambda = 0$ no es autovalor. Se tendrá $\lambda = 0$ sólo si $d\phi/dx = 0$ para todo x . Esto implicaría que ϕ debe ser constante para todo x , pero las condiciones de contorno, o bien $\phi(0) = 0$ o bien $\phi(L) = 0$, obligarían a que esa constante fuera cero. Por tanto, $\lambda = 0$ sólo si $\phi = 0$ en todo punto, pero entonces ϕ no es una autofunción. Esto significa que, *en este caso*, $\lambda = 0$ no es un autovalor. Más aún, hemos concluido que todos los autovalores deben ser positivos, $\lambda > 0$. Hemos llegado a esta conclusión *sin utilizar* las soluciones de la ecuación diferencial. Los autovalores de este ejemplo, $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \dots$, son claramente consistentes con las consecuencias obtenidas del cociente de Rayleigh. En secciones posteriores veremos otras aplicaciones del cociente de Rayleigh.

EJERCICIOS 5.3

***5.3.1.** Resolver el Ejercicio 4.4.2(b). Demostrar que la ecuación en derivadas parciales se puede escribir como una ecuación de Sturm-Liouville.

5.3.2. Consideremos la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial t}.$$

- Dar una breve interpretación física. ¿Qué signo tienen α y β según esta interpretación?
- Supongamos que ρ , α y β son funciones de x . Demostrar que se pueden separar variables sólo si $\beta = c\rho$, donde c es una constante.
- Si $\beta = c\rho$, demostrar que la ecuación espacial es una ecuación diferencial de Sturm-Liouville. Resolver la ecuación dependiente del tiempo.

***5.3.3.** Considérese la ecuación diferencial (que no es de tipo Sturm-Liouville)

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \alpha(x) \frac{d\phi}{dx} + [\lambda\beta(x) + \gamma(x)]\phi = 0.$$

Multiplicar esta ecuación por $H(x)$ y calcular $H(x)$ de tal manera que la ecuación se convierta en una ecuación de Sturm-Liouville:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\phi}{dx} \right] + [\lambda\sigma(x) + q(x)]\phi = 0.$$

Dadas $\alpha(x)$, $\beta(x)$ y $\gamma(x)$, ¿cómo son $p(x)$, $\sigma(x)$ y $q(x)$?

5.3.4. Consideremos el flujo de calor con convección (véase el Ejercicio 1.5.2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V_0 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

- (a) Demostrar que la ecuación diferencial ordinaria espacial obtenida por separación de variables no es una ecuación de Sturm-Liouville.
- * (b) Resolver el problema de valores iniciales y de contorno correspondiente a los datos

$$\begin{aligned}u(0, t) &= 0, \\u(L, t) &= 0, \\u(x, 0) &= f(x).\end{aligned}$$

- (c) Resolver el problema de valores iniciales y de contorno

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x).\end{aligned}$$

5.3.5. Para el problema de autovalores de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0, \quad \text{con} \quad \frac{d\phi}{dx}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\phi}{dx}(L) = 0,$$

comprobar las siguientes propiedades generales:

- (a) Existe una cantidad infinita de autovalores; existe un autovalor mínimo pero no uno máximo.
- (b) La autofunción n -ésima tiene $n - 1$ ceros.
- (c) Las autofunciones son ortogonales y forman un sistema completo.
- (d) ¿Qué información da el cociente de Rayleigh con relación a la existencia de autovalores negativos o cero?

5.3.6. Rehacer el Ejercicio 5.3.5 para el siguiente problema de autovalores de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0, \quad \text{con} \quad \frac{d\phi}{dx}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \phi(L) = 0.$$

5.3.7. ¿Cuáles de los apartados 1-5 del teorema de Sturm-Liouville son válidos para el siguiente problema de autovalores?

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi &= 0, \\ \phi(-L) &= \phi(L), \\ \frac{d\phi}{dx}(-L) &= \frac{d\phi}{dx}(L).\end{aligned}$$

5.3.8. Demostrar que $\lambda \geq 0$ en el problema de autovalores

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + (\lambda - x^2)\phi = 0, \quad \text{con} \quad \frac{d\phi}{dx}(0) = 0, \quad \frac{d\phi}{dx}(1) = 0.$$

¿Es $\lambda = 0$ un autovalor?

5.3.9. Consideremos el problema de autovalores

$$x^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} + x \frac{d\phi}{dx} + \lambda \phi = 0, \quad \text{con } \phi(1) = 0 \text{ y } \phi(b) = 0. \quad (5.3.10)$$

- (a) Demostrar que multiplicando por $1/x$ el problema se transforma en uno de Sturm-Liouville (este factor de multiplicación se obtiene, en el caso general, en el Ejercicio 5.3.3).
- (b) Demostrar que $\lambda \geq 0$.
- * (c) Usando el hecho de que (5.3.10) es una ecuación equidimensional, calcular todos los autovalores positivos. ¿Es $\lambda = 0$ autovalor? Demostrar que hay infinitos autovalores con un mínimo, pero que no existe autovalor máximo.
- (d) De acuerdo con el teorema de Sturm-Liouville, ¿con respecto a qué peso son ortogonales las autofunciones? Comprobar la ortogonalidad directamente mediante integración.
- (e) Demostrar que la autofunción n -ésima tiene $n - 1$ ceros.

5.3.10. Rehacer de nuevo el Ejercicio 5.3.9 con las condiciones de contorno

$$\frac{d\phi}{dx}(1) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\phi}{dx}(b) = 0.$$

5.4. Ejemplo: flujo de calor en una varilla no uniforme sin fuentes

En esta sección aplicaremos algunos apartados del teorema de Sturm-Liouville a las ecuaciones en derivadas parciales. Consideremos el flujo de calor en una varilla no uniforme (con coeficientes térmicos c , ρ y K_0 posiblemente variables) y *sin fuentes*; véanse las Secciones 1.2 y 5.2.1. En el extremo izquierdo, $x = 0$, la temperatura está prescrita a 0° y el extremo derecho está aislado. Con la distribución inicial de temperaturas dada, la formulación matemática de este problema es la siguiente:

$$\text{EDP : } \boxed{c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)}, \quad (5.4.1)$$

$$\text{CC : } \boxed{\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= 0, \end{aligned}} \quad (5.4.2)$$

$$\text{CI : } \boxed{u(x, 0) = f(x)}. \quad (5.4.3)$$

Como la ecuación en derivadas parciales y las condiciones de contorno son lineales y homogéneas, buscaremos soluciones especiales (olvidándonos de la condición inicial) en forma de producto:

$$u(x, t) = \phi(x)h(t). \quad (5.4.4)$$

Tras separar variables (véase la Sección 5.2.1 para los detalles) encontramos que la parte temporal verifica la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda h, \quad (5.4.5)$$

mientras que la parte espacial es la solución del siguiente problema de autovalores de Sturm-Liouville regular:

$$\frac{d}{dx} \left(K_0 \frac{d\phi}{dx} \right) + \lambda c \rho \phi = 0, \quad (5.4.6)$$

$$\phi(0) = 0, \quad (5.4.7)$$

$$\frac{d\phi}{dx}(L) = 0. \quad (5.4.8)$$

De acuerdo con el teorema de Sturm-Liouville, sabemos que hay una sucesión infinita de autovalores, λ_n , y otra sucesión constituida por sus correspondientes autofunciones $\phi_n(x)$. Supongamos que las autofunciones $\phi_n(x)$ son conocidas (en caso de que no se puedan obtener de forma explícita, se pueden calcular de forma aproximada usando métodos numéricos). La parte temporal de la ecuación diferencial se resuelve fácilmente,

$$h(t) = ce^{-\lambda_n t}. \quad (5.4.9)$$

De esta forma, obtenemos una sucesión infinita de soluciones producto de la ecuación en derivadas parciales

$$u(x, t) = \phi_n(x)e^{-\lambda_n t}. \quad (5.4.10)$$

Utilizando el principio de superposición, consideramos una solución que sea combinación lineal de estas soluciones producto,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) e^{-\lambda_n t}, \quad (5.4.11)$$

a la que imponemos la condición inicial. Esta serie tiene la propiedad de que resuelve la ecuación en derivadas parciales y las condiciones de contorno. Probaremos que podemos calcular los coeficientes desconocidos a_n a partir de la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x). \quad (5.4.12)$$

Nuestro teorema asegura que podemos representar cualquier función suave a trozos por medio de este tipo de series de autofunciones. Así pues, los coeficientes a_n son los coeficientes de Fourier generalizados de la condición inicial. Más aún, las autofunciones son ortogonales con respecto al peso $\sigma(x) = c(x)\rho(x)$, que está determinado por las propiedades físicas de la varilla:

$$\int_0^L \phi_n(x)\phi_m(x)c(x)\rho(x) dx = 0 \quad \text{para } n \neq m.$$

Usando estas fórmulas de ortogonalidad, los coeficientes de Fourier generalizados resultan ser

$$a_n = \frac{\int_0^L f(x)\phi_n(x)c(x)\rho(x) dx}{\int_0^L \phi_n^2(x)c(x)\rho(x) dx}. \quad (5.4.13)$$

Por tanto, la Fórmula (5.4.11) es la solución de nuestro problema si los coeficientes están dados por (5.4.13).

Con objeto de dar una interpretación de la solución nos preguntamos qué ocurre para tiempos t grandes. Como los autovalores forman una sucesión creciente, cada término de la serie (5.4.11) es, cuando t es grande, exponencialmente más pequeño que el término que le precede. Por tanto, la solución se puede aproximar con bastante precisión para tiempos grandes por

$$u(x, t) \approx a_1 \phi_1(x) e^{-\lambda_1 t}. \quad (5.4.14)$$

Si $a_1 = 0$, la aproximación (5.4.14) debería empezar por el primer término no nulo del desarrollo. Sin embargo, a menudo la temperatura inicial $f(x)$ es no negativa (y no idénticamente cero) y, en este caso, a partir de (5.4.13) obtenemos que $a_1 \neq 0$, pues

$$a_1 = \frac{\int_0^L f(x)\phi_1(x)c(x)\rho(x) dx}{\int_0^L \phi_1^2(x)c(x)\rho(x) dx}. \quad (5.4.15)$$

En consecuencia tenemos que $a_1 \neq 0$, porque $\phi_1(x)$ es la autofunción correspondiente al autovalor más pequeño y no tiene ceros, con lo que no cambia de signo. Por tanto, si $f(x) > 0$ se sigue que $a_1 \neq 0$, ya que $c(x)$ y $\rho(x)$ son funciones positivas que representan cantidades físicas. Para dibujar la solución en un tiempo fijo grande t ,

(5.4.14) nos asegura que con la primera autofunción obtenemos una aproximación razonable. Por supuesto, el cálculo numérico de la primera autofunción es más fácil que el de las cien primeras.

Para tiempos grandes, el perfil espacial de la distribución de temperaturas en el espacio es aproximadamente constante en el tiempo. Su amplitud crece o decrece en el tiempo dependiendo de si $\lambda_1 > 0$ o $\lambda_1 < 0$ (sería constante en el tiempo si $\lambda_1 = 0$). Como éste es un problema de flujo de calor sin fuentes y con temperatura cero en $x = 0$, esperamos que la temperatura decaiga exponencialmente hasta 0° (es decir, esperamos que $\lambda_1 > 0$). Aunque el extremo derecho está aislado, la energía calorífica debería fluir hacia fuera por el extremo izquierdo, porque allí $u = 0$. Probemos ahora matemáticamente que todos los autovalores son positivos. Como $p(x) = K_0(x)$, $q(x) = 0$ y $\sigma(x) = c(x)\rho(x)$, del cociente de Rayleigh se sigue que

$$\lambda = \frac{\int_0^L K_0(x)(d\phi/dx)^2 dx}{\int_0^L \phi^2 c(x)\rho(x) dx}, \quad (5.4.16)$$

donde la contribución de la frontera en (5.4.16) ha desaparecido por las condiciones de contorno homogéneas de este problema. (5.4.7) y (5.4.8). Se sigue inmediatamente de (5.4.16) que todos los autovalores verifican $\lambda \geq 0$, puesto que los coeficientes térmicos son todos positivos. Más aún, $\lambda > 0$, ya que $\phi = \text{constante}$ no es autofunción, porque las condiciones de contorno implicarían $\phi(0) = 0$. Hemos demostrado entonces que en este ejemplo se tiene $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$.

EJERCICIOS 5.4

5.4.1. Considérese la ecuación

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \alpha u,$$

donde c , ρ , K_0 y α son funciones de x , sujeta a las condiciones

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

y supóngase que conocemos las autofunciones adecuadas.

- Demostrar que los autovalores son positivos si $\alpha < 0$ (véase la Sección 5.2.1).
- Resolver el problema de valores iniciales.
- Analizar brevemente el $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

*5.4.2. Considérese el problema

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

donde c , ρ y K_0 son funciones de x , con las condiciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= f(x),\end{aligned}$$

y supóngase que las autofunciones correspondientes son conocidas. Resolver el problema de valores iniciales y analizar brevemente el $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

***5.4.3.** Resolver el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

con $u(r, 0) = f(r)$, $u(0, t)$ acotado y $u(a, t) = 0$. Se puede suponer que las correspondientes autofunciones, que denotamos por $\phi_n(r)$, son conocidas y forman un sistema completo. *Indicación:* véase la Sección 5.2.2.

5.4.4. Considérese el siguiente problema de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{con} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(L, t) = 0.$$

Resolverlo con la condición inicial $u(x, 0) = \sin \pi x/L$. *Indicación:* usar una tabla de integrales si es necesario.

5.4.5. Considérese la ecuación

$$\rho \frac{\partial u^2}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u,$$

donde $\rho(x) > 0$, $\alpha(x) < 0$ y T_0 es constante, con las condiciones

$$\begin{aligned}u(0, t) &= 0, & u(x, 0) &= f(x), \\ u(L, t) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x).\end{aligned}$$

Resolver el problema de valores iniciales suponiendo conocidas las autofunciones adecuadas.

***5.4.6.** Resolver el problema de las vibraciones de una cuerda *no uniforme* de densidad de masa $\rho_0(x)$, suponiendo que el extremo izquierdo, $x = 0$, está fijo y que el derecho, $x = L$, satisface la condición de contorno elástica: $\partial u / \partial x = -(k/T_0)u$, y que la cuerda está *inicialmente en reposo* con una posición inicial conocida $f(x)$. *Indicaciones:* supóngase que se conocen los autovalores y las autofunciones correspondientes, ¿qué ecuaciones diferenciales cumplen y con qué condiciones de contorno?, ¿respecto de qué peso son ortogonales las autofunciones?

5.5. Operadores autoadjuntos y problemas de autovalores de Sturm-Liouville

Introducción. En esta sección probaremos algunas de las propiedades de los problemas de autovalores de Sturm-Liouville regulares:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\phi}{dx} \right] + q(x)\phi + \lambda\sigma(x)\phi = 0, \quad (5.5.1)$$

$$\beta_1\phi(a) + \beta_2 \frac{d\phi}{dx}(a) = 0, \quad (5.5.2)$$

$$\beta_3\phi(b) + \beta_4 \frac{d\phi}{dx}(b) = 0, \quad (5.5.3)$$

donde las constantes β_i son reales y las funciones p , q y σ son reales y continuas en el intervalo acotado $a \leq x \leq b$, y además p y σ son positivas, $p(x) > 0$ y $\sigma(x) > 0$. En algunas ocasiones comentaremos la validez de nuestros resultados en el caso en que se elimine alguna de estas restricciones.

Las demostraciones de tres de los apartados del teorema de Sturm-Liouville son algo complicadas. No demostraremos en particular que existe una cantidad infinita de autovalores; para convencernos de ese resultado nos referimos a los ejemplos que ya se han presentado y a otros que se desarrollarán en secciones posteriores. En los problemas de autovalores de Sturm-Liouville que *no* son regulares puede que no existan autovalores. Sin embargo, en la mayoría de los casos de interés físico (en intervalos acotados) habrá también una cantidad infinita de autovalores discretos. Tampoco intentaremos demostrar que cualquier función suave a trozos se puede desarrollar en serie de las autofunciones de un problema de Sturm-Liouville regular (lo que se conoce como propiedad de completitud), ni que cada autofunción tiene un cero más que la anterior (es decir, oscila una vez más).

Operadores lineales. Las demostraciones que haremos resultan más sencillas si introducimos la *notación* de **operadores**. Llamaremos L al operador diferencial lineal $L = (d/dx)[p(x)(d/dx)] + q(x)$. Un operador actúa sobre una función y el resultado es otra función. En nuestro caso, si L actúa sobre una función $y(x)$, obtenemos

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y. \quad (5.5.4)$$

Por tanto, la notación $L(y)$ permite simplificar la escritura. Por ejemplo, si $L \equiv d^2/dx^2 + 6$, entonces $L(y) = d^2y/dx^2 + 6y$, con lo que en particular $L(e^{2x}) = 4e^{2x} + 6e^{2x} = 10e^{2x}$.

Utilizando la notación de operador, la ecuación que define los autovalores de un problema de Sturm-Liouville tiene la forma

$$L(\phi) + \lambda\sigma(x)\phi = 0, \quad (5.5.5)$$

donde λ es un autovalor y ϕ es la correspondiente autofunción. El operador L puede actuar sobre cualquier función, no solamente sobre autofunciones.

Identidad de Lagrange. En la mayoría de las demostraciones que siguen será fundamental el uso de la fórmula conocida como **identidad de Lagrange**. Calculemos la expresión $uL(v) - vL(u)$ para dos funciones u y v cualesquiera (no necesariamente autofunciones). Recordemos que

$$L(u) = \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + qu \quad \text{y} \quad L(v) = \frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) + qv,$$

y que entonces

$$uL(v) - vL(u) = u \frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) + uqv - v \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) - vqu, \quad (5.5.6)$$

donde se simplifica el término $uqv - vqu$. El miembro derecho de (5.5.6) se puede escribir como una diferencial exacta:

$$uL(v) - vL(u) = \frac{d}{dx} \left[p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \right]. \quad (5.5.7)$$

Esta expresión se conoce como **forma diferencial de la identidad de Lagrange**. Para obtener la expresión (5.5.7) utilizamos la regla de derivación de un producto, que nos da

$$u \frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[u \left(p \frac{dv}{dx} \right) \right] - \left(p \frac{dv}{dx} \right) \frac{du}{dx},$$

y similarmente

$$v \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left[v \left(p \frac{du}{dx} \right) \right] - \left(p \frac{du}{dx} \right) \frac{dv}{dx}.$$

La Ecuación (5.5.7) se obtiene restando estas dos fórmulas. Más adelante (véase (5.5.21)) utilizaremos esta forma diferencial de la identidad de Lagrange.

Fórmula de Green. La forma integral de la identidad de Lagrange también se conoce como **fórmula de Green**. Se obtiene integrando la expresión (5.5.7),

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b \quad (5.5.8)$$

para funciones cualesquiera¹, u y v . Esta fórmula es muy útil.

Ejemplo. Si $p = 1$ y $q = 0$ (en cuyo caso $L = d^2/dx^2$), la identidad (5.5.7) nos dice que

$$u \frac{d^2 v}{dx^2} - v \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right),$$

cosa que podemos comprobar directamente. Para este ejemplo, la fórmula de Green es

$$\int_a^b \left(u \frac{d^2 v}{dx^2} - v \frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx = \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b.$$

Operadores autoadjuntos. Como caso importante de la fórmula de Green, supongamos que u y v son dos funciones cualesquiera, pero con la restricción adicional de que los términos de contorno se anulan,

$$p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b = 0.$$

Entonces, (5.5.8) se convierte en $\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = 0$.

Mostremos cómo se pueden cancelar los términos de contorno. En lugar de tomar funciones arbitrarias, nos restringimos a funciones u y v tales que *ambas* cumplan las mismas *condiciones de contorno* homogéneas. Por ejemplo, tomemos dos funciones *cualquiera*, u y v , que cumplan las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \phi(a) &= 0, \\ \frac{d\phi}{dx}(b) + h\phi(b) &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que tanto u como v satisfacen estas condiciones, tenemos que

$$\begin{aligned} u(a) &= 0, & v(a) &= 0, \\ \frac{du}{dx}(b) + hu(b) &= 0, & \text{y} & \quad \frac{dv}{dx}(b) + hv(b) = 0; \end{aligned}$$

por lo demás, u y v son arbitrarias. En este caso, los términos de contorno de la fórmula de Green se anulan:

$$\begin{aligned} p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b &= p(b) \left[u(b) \frac{dv}{dx}(b) - v(b) \frac{du}{dx}(b) \right] \\ &= p(b) [-u(b)hv(b) + v(b)hu(b)] = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, para dos funciones cualesquiera u y v , que satisfacen estas condiciones de contorno homogéneas, tenemos que

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = 0.$$

¹La integración requiere que du/dx y dv/dx sean continuas.

De hecho, los términos de contorno también se anulan para cualquier par de funciones u y v que cumplan a la vez las mismas condiciones de contorno del tipo de las que aparecen en los problemas de autovalores de Sturm-Liouville regulares, (5.5.2) y (5.5.3). Por ello, para cualquier problema de autovalores de Sturm-Liouville regular tenemos el siguiente resultado:

Si u y v son dos funciones cualesquiera que verifican el mismo conjunto de condiciones de contorno homogéneas (de tipo regular de Sturm-Liouville), entonces $\int_a^b [uL(v) - vL(u)]dx = 0$. (5.5.9)

Cuando se cumple (5.5.9), decimos que el operador L (con sus correspondientes condiciones de contorno) es **autoadjunto**².

Los términos de contorno también se anulan en otras circunstancias diferentes de las condiciones de contorno de problemas regulares de Sturm-Liouville. Discutiremos brevemente dos ejemplos con mayor profundidad. Las **condiciones de contorno periódicas** se pueden generalizar (para operadores con coeficientes variables) a

$$\phi(a) = \phi(b) \quad \text{y} \quad p(a) \frac{d\phi}{dx}(a) = p(b) \frac{d\phi}{dx}(b).$$

Con estas condiciones también se cumple (5.5.9) (véase el Ejercicio 5.5.1). Otro ejemplo en el que se anulan los términos de contorno en la fórmula de Green es el caso “singular”, en el que el coeficiente de la segunda derivada del operador diferencial es cero en un extremo; por ejemplo, si $p(0) = 0$ en $x = 0$. En un punto singular imponemos una condición de singularidad, que usualmente es que ϕ esté acotada en $x = 0$. También se puede demostrar que (5.5.9) es válido si u y v cumplen esta condición de singularidad en $x = 0$ y cualquier tipo de condición de contorno de un problema de Sturm-Liouville regular en $x = b$ (véase el Ejercicio 5.5.1).

Autofunciones ortogonales. Demostraremos ahora la utilidad de la fórmula de Green. Comenzaremos probando la importante relación de ortogonalidad de los problemas de autovalores de Sturm-Liouville. Para muchos tipos de condiciones de contorno, las **autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales respecto al peso $\sigma(x)$** . Para probar esta afirmación, sean λ_n y λ_m los autovalores correspondientes a las autofunciones $\phi_n(x)$ y $\phi_m(x)$. Usando la notación de operadores, las ecuaciones diferenciales que cumplen estas autofunciones son

$$L(\phi_n) + \lambda_n \sigma(x) \phi_n = 0, \tag{5.5.10}$$

$$L(\phi_m) + \lambda_m \sigma(x) \phi_m = 0. \tag{5.5.11}$$

Además, tanto ϕ_n como ϕ_m cumplen las mismas condiciones de contorno homogéneas.

²En este texto hemos evitado en general definir qué es un operador **adjunto**. En el ejemplo que estamos tratando aquí el operador L es igual a su adjunto y por eso se le llama **autoadjunto**.

Podemos tomar $u = \phi_m$ y $v = \phi_n$ en la fórmula de Green, obteniendo:

$$\int_a^b [\phi_m L(\phi_n) - \phi_n L(\phi_m)] dx = p(x) \left(\phi_m \frac{d\phi_n}{dx} - \phi_n \frac{d\phi_m}{dx} \right) \Big|_a^b.$$

Utilizando (5.5.10) y (5.5.11) podemos eliminar $L(\phi_n)$ y $L(\phi_m)$, y tenemos

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \phi_n \phi_m \sigma dx = p(x) \left(\phi_m \frac{d\phi_n}{dx} - \phi_n \frac{d\phi_m}{dx} \right) \Big|_a^b, \quad (5.5.12)$$

fórmula que podíamos haber obtenido multiplicando (5.5.10) por ϕ_m , y (5.5.11) por ϕ_n , calculando su diferencia y después integrando. Hemos evitado estos pasos (especialmente la integración) mediante la aplicación de la fórmula de Green. Para muchos tipos diferentes de condiciones de contorno (por ejemplo, condiciones regulares de Sturm-Liouville, condiciones periódicas y condiciones de singularidad) los términos de contorno se anulan si u y v cumplen ambas las mismas condiciones de contorno homogéneas. Como u y v son autofunciones, están en esta situación y, por tanto, (5.5.12) implica que

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \phi_n \phi_m \sigma dx = 0. \quad (5.5.13)$$

Si $\lambda_m \neq \lambda_n$, entonces se sigue inmediatamente que

$$\int_a^b \phi_n \phi_m \sigma dx = 0. \quad (5.5.14)$$

En otras palabras, las autofunciones (ϕ_n y ϕ_m) que corresponden a autovalores diferentes ($\lambda_n \neq \lambda_m$) son ortogonales con peso $\sigma(x)$.

Autovalores reales. Podemos usar la ortogonalidad de las autofunciones para probar que los autovalores son reales. Supongamos que λ es un autovalor complejo y $\phi(x)$ la correspondiente autofunción (que también puede ser compleja, ya que la ecuación diferencial que define la autofunción sería compleja en ese caso). Tenemos pues:

$$L(\phi) + \lambda \sigma \phi = 0. \quad (5.5.15)$$

Introduzcamos la notación \bar{z} para denotar el complejo conjugado de z , es decir, si $z = x + iy$, entonces $\bar{z} = x - iy$. Entonces, tomando el conjugado en los dos miembros de la Ecuación (5.5.15) obtenemos

$$\overline{L(\phi)} + \bar{\lambda} \sigma \bar{\phi} = 0, \quad (5.5.16)$$

donde suponemos que el coeficiente σ es real y, por tanto, $\bar{\sigma} = \sigma$. El conjugado de $L(\phi)$ es exactamente L actuando sobre el conjugado de ϕ , es decir, $\overline{L(\phi)} = L(\bar{\phi})$,

porque los coeficientes del operador diferencial lineal son también reales (véase el Ejercicio 5.5.7). Por tanto,

$$L(\bar{\phi}) + \bar{\lambda}\sigma\bar{\phi} = 0. \quad (5.5.17)$$

Por otro lado, si ϕ cumple unas ciertas condiciones de contorno con coeficientes reales, entonces $\bar{\phi}$ cumple las mismas condiciones de contorno. Por ejemplo, si $d\phi/dx + h\phi = 0$ en $x = a$, tomando conjugados obtenemos $d\bar{\phi}/dx + h\bar{\phi} = 0$ en $x = a$. La Ecuación (5.5.17) y las condiciones de contorno muestran que $\bar{\phi}$ verifica el problema de autovalores de Sturm-Liouville con autovalor $\bar{\lambda}$. Hemos probado el siguiente resultado³: **si λ es un autovalor complejo y su autofunción correspondiente es ϕ , entonces $\bar{\lambda}$ es también un autovalor y su autofunción correspondiente es $\bar{\phi}$.**

Demostremos ahora que los autovalores de un problema de Sturm-Liouville regular son reales. Tal como hemos probado, si λ es un autovalor, entonces también lo es $\bar{\lambda}$ y de acuerdo con la propiedad fundamental de ortogonalidad, las correspondientes autofunciones (ϕ y $\bar{\phi}$) deben ser ortogonales (con peso σ). Entonces, por (5.5.13),

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b \phi\bar{\phi}\sigma \, dx = 0. \quad (5.5.18)$$

Pero como $\phi\bar{\phi} = |\phi|^2 \geq 0$ (y $\sigma > 0$), la integral de (5.5.18) es ≥ 0 . De hecho, la integral sólo puede ser cero si $\phi \equiv 0$, lo cual está prohibido porque ϕ es una autofunción. Por tanto, (5.5.18) implica que $\lambda = \bar{\lambda}$, de donde se obtiene que λ es real; esto significa que **todos los autovalores son reales**. Conviene resaltar que siempre podemos elegir las autofunciones de manera que sean reales.

Unicidad de las autofunciones (casos regular y singular). Probemos a continuación que a cada autovalor le corresponde una única autofunción (excepto en el caso de condiciones de contorno periódicas). Supongamos que hubiera dos autofunciones distintas, ϕ_1 y ϕ_2 , asociadas al mismo autovalor λ . Diremos entonces que λ es un autovalor "múltiple" con multiplicidad dos. En este caso se verificarán a la vez las dos identidades

$$\begin{aligned} L(\phi_1) + \lambda\sigma\phi_1 &= 0, \\ L(\phi_2) + \lambda\sigma\phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.5.19)$$

Como λ es el mismo en ambas expresiones, tenemos

$$\phi_2 L(\phi_1) - \phi_1 L(\phi_2) = 0. \quad (5.5.20)$$

Podemos integrar esta expresión de manera sencilla, pero evitaremos algunos cálculos si utilizamos la forma diferencial de la identidad de Lagrange:

$$\phi_2 L(\phi_1) - \phi_1 L(\phi_2) = \frac{d}{dx} \left[p \left(\phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} - \phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} \right) \right]. \quad (5.5.21)$$

³Un resultado del mismo tipo es cierto para las ecuaciones cuadráticas: en una ecuación cuadrática con coeficientes reales, si λ es una raíz compleja, entonces $\bar{\lambda}$ es también una raíz. Esto también se cumple en cualquier ecuación algebraica con coeficientes reales.

De la expresión (5.5.20) se sigue

$$p \left(\phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \right) = \text{constante.} \quad (5.5.22)$$

A menudo podemos calcular la constante a partir de las condiciones de contorno. Por ejemplo, si $d\phi/dx + h\phi = 0$ en $x = a$, un breve cálculo muestra que la constante es cero. De hecho, mostraremos (en el Ejercicio 5.5.10) que la constante también es nula si *al menos una de las condiciones de contorno es de tipo Sturm-Liouville regular (o de tipo singular)*. Para cualesquiera de estas condiciones de contorno se sigue que

$$\phi_1 \frac{d\phi_2}{dx} - \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} = 0. \quad (5.5.23)$$

Esto es equivalente a $(d/dx)(\phi_2/\phi_1) = 0$, y de aquí deducimos que *para estas condiciones de contorno*

$$\phi_2 = c\phi_1. \quad (5.5.24)$$

Esto demuestra que *con las condiciones de contorno anteriores*, dos autofunciones cualesquiera, ϕ_1 y ϕ_2 , correspondientes al mismo autovalor, deben ser una un múltiplo de la otra. Las dos autofunciones son linealmente dependientes; es decir, sólo hay una autofunción linealmente independiente, o lo que es lo mismo, la autofunción es única.

No unicidad de autofunciones (caso periódico). Cuando las condiciones de contorno son periódicas, *no* obtenemos que la constante de (5.5.22) sea necesariamente cero. Por tanto, es posible que $\phi_2 \neq c\phi_1$ y que *pueda haber* dos autofunciones diferentes correspondientes al mismo autovalor.

Por ejemplo, consideremos el problema de autovalores con condiciones de contorno periódicas,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi &= 0, \\ \phi(-L) &= \phi(L), \\ \frac{d\phi}{dx}(-L) &= \frac{d\phi}{dx}(L). \end{aligned} \quad (5.5.25)$$

Sabemos que el autovalor $\lambda = 0$ tiene por autofunción cualquier constante, es decir, la única autofunción, salvo multiplicación por constantes, es la función $\phi = 1$. Los otros autovalores, $(n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, \dots$, tienen asociadas, cada uno, dos autofunciones linealmente independientes, $\sin(n\pi x/L)$ y $\cos(n\pi x/L)$, lo que, según hemos visto, da lugar a una serie de Fourier. Sin embargo, (5.5.25) no es un problema de autovalores de Sturm-Liouville regular, ya que las condiciones de contorno no son de la forma prescrita, el resultado sobre unicidad de autofunciones no se aplica en este caso. Por eso *puede haber dos*⁴ autofunciones correspondientes al mismo

⁴No puede haber más de dos autofunciones independientes ya que la ecuación diferencial es de segundo orden.

autovalor. Observemos que aún es *posible* tener una única autofunción, como ocurre para $\lambda = 0$.

No unicidad de autofunciones (método de ortogonalización de Gram-Schmidt). Podemos calcular los coeficientes de Fourier generalizados (y con ellos resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales) por medio de la ortogonalidad de las autofunciones. Sin embargo, el teorema establece que las autofunciones *correspondientes a autovalores diferentes* son automáticamente ortogonales con peso $\sigma(x)$. Para las condiciones de contorno periódicas (o las de tipo mixto) es posible que haya más de una autofunción independiente correspondiente al mismo autovalor. Para estos autovalores múltiples, las autofunciones no son automáticamente ortogonales. En el apéndice de la Sección 7.5 demostraremos que siempre podemos construir autofunciones que sean ortogonales utilizando lo que se conoce como proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

EJERCICIOS 5.5

5.5.1. Decimos que un problema de autovalores de Sturm-Liouville es autoadjunto si

$$p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b = 0,$$

ya que entonces $\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = 0$ para cualquier par de funciones u y v que cumplan las condiciones de contorno. Demostrar que las siguientes condiciones dan lugar a problemas de Sturm-Liouville autoadjuntos.

- (a) $\phi(0) = 0$ y $\phi(L) = 0$
- (b) $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ y $\phi(L) = 0$
- (c) $\frac{d\phi}{dx}(0) - h\phi(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(L) = 0$
- (d) $\phi(a) = \phi(b)$ y $p(a)\frac{d\phi}{dx}(a) = p(b)\frac{d\phi}{dx}(b)$
- (e) $\phi(a) = \phi(b)$ y $\frac{d\phi}{dx}(a) = \frac{d\phi}{dx}(b)$ [autoadjunto sólo si $p(a) = p(b)$]
- (f) $\phi(L) = 0$ [y en el caso en que $p(0) = 0$, $\phi(0)$ acotado y $\lim_{x \rightarrow 0} p(x)\frac{d\phi}{dx} = 0$]

***(g)** ¿En qué casos es autoadjunto un problema de Sturm-Liouville (con p constante) con las condiciones de contorno siguientes?

$$\phi(L) + \alpha\phi(0) + \beta\frac{d\phi}{dx}(0) = 0,$$

$$\frac{d\phi}{dx}(L) + \gamma\phi(0) + \delta\frac{d\phi}{dx}(0) = 0.$$

5.5.2. Probar que las autofunciones del siguiente problema de autovalores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales:

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\phi}{dx} \right] + q(x)\phi + \lambda\sigma(x)\phi = 0,$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}\phi(1) &= 0, \\ \phi(2) - 2\frac{d\phi}{dx}(2) &= 0.\end{aligned}$$

¿Cuál es la función peso?

5.5.3. Consideremos el problema de autovalores $L(\phi) = -\lambda\sigma(x)\phi$, con unas condiciones de contorno homogéneas dadas. Supongamos que

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = 0,$$

para todas las funciones u y v que cumplan esas mismas condiciones de contorno. Probar que las autofunciones correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales; ¿con qué peso?

5.5.4. Dar un ejemplo de un problema de autovalores en que a un mismo autovalor corresponda más de una autofunción.

5.5.5. Considérese el operador

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + 6\frac{d}{dx} + 9.$$

(a) Demostrar que $L(e^{rx}) = (r + 3)^2 e^{rx}$.

(b) Utilizar el apartado (a) para obtener soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes $L(y) = 0$.

(c) Si z depende de x y de un parámetro r , demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial r} L(z) = L\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right).$$

(d) Utilizando el apartado (c), evaluar $L(\partial z/\partial r)$ si $z = e^{rx}$.

(e) Obtener una segunda solución de $L(y) = 0$, usando el apartado (d).

5.5.6. Probar que si x es una raíz de un polinomio de sexto grado con coeficientes reales, entonces \bar{x} también es una raíz.

5.5.7. Demostrar detalladamente que para el operador

$$L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q,$$

con p y q reales, se tiene

$$\overline{L(\phi)} = L(\bar{\phi}).$$

5.5.8. Consideremos el operador diferencial de orden cuatro, $L = \frac{d^4}{dx^4}$.

- (a) Demostrar que $uL(v) - vL(u)$ es una diferencial exacta.
- (b) Expresar $\int_0^1 [uL(v) - vL(u)] dx$ en términos de los datos de contorno, para funciones u y v cualesquiera.
- (c) Demostrar que $\int_0^1 [uL(v) - vL(u)] dx = 0$, si u y v son funciones cualesquiera que cumplan las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 0, & \phi(1) &= 0, \\ \frac{d\phi}{dx}(0) &= 0, & \frac{d^2\phi}{dx^2}(1) &= 0.\end{aligned}$$

- (d) Dar otro ejemplo de condiciones de contorno para las que se tenga

$$\int_0^1 [uL(v) - vL(u)] dx = 0.$$

- (e) Para el siguiente problema de autovalores

$$\frac{d^4\phi}{dx^4} + \lambda e^x \phi = 0,$$

demostrar, usando las condiciones de contorno del apartado (c), que las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales. ¿Cuál es la función peso?

***5.5.9.** Dado el problema de autovalores

$$\frac{d^4\phi}{dx^4} + \lambda e^x \phi = 0,$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}\phi(0) &= 0, & \phi(1) &= 0, \\ \frac{d\phi}{dx}(0) &= 0, & \frac{d^2\phi}{dx^2}(1) &= 0,\end{aligned}$$

demostrar que los autovalores son menores o iguales que cero ($\lambda \leq 0$). Esto no es sorprendente, ya que en el contexto físico es exactamente lo que se espera. ¿Es $\lambda = 0$ un autovalor?

5.5.10. (a) Demostrar que (5.5.22) implica (5.5.23), si al menos una de las condiciones de contorno es de tipo Sturm-Liouville regular.

(b) Rehacer el apartado (a) si una condición de contorno es de tipo singular.

5.5.11. *(a) Consideremos el operador

$$L = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + r(x) \frac{d}{dx} + q(x).$$

Integrando por partes varias veces la expresión $\int_a^b vL(u) dx$, determinar el operador adjunto, L^* , tal que

$$\int_a^b [uL^*(v) - vL(u)] dx = H(x) \Big|_a^b.$$

Determinar $H(x)$ y estudiar bajo qué condiciones se tiene $L = L^*$, que es el caso **autoadjunto**. *Indicación:* demostrar que

$$L^* = p \frac{d^2}{dx^2} + \left(2 \frac{dp}{dx} - r \right) \frac{d}{dx} + \left(\frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{dr}{dx} + q \right).$$

(b) Dadas las condiciones de contorno,

$$u(a) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}(b) + u(b) = 0,$$

determinar las condiciones que debe verificar $v(x)$ para tener $H(x) \Big|_a^b = 0$, llamadas condiciones de contorno adjuntas.

5.5.12. Usando el Ejercicio 5.5.11, demostrar que las autofunciones del problema para $L(\phi) + \lambda\sigma\phi = 0$ son ortogonales a las autofunciones de $L^*(\psi) + \lambda\sigma\psi = 0$, siempre que ψ satisfaga condiciones de contorno adjuntas.

5.5.13. Usando el Ejercicio 5.5.11, demostrar la siguiente versión de la **alternativa de Fredholm** para operadores no necesariamente autoadjuntos: existe solución de la ecuación $L(u) = f(x)$, con condiciones de contorno homogéneas, si y sólo si $f(x)$ es ortogonal a todas las soluciones del problema homogéneo adjunto.

5.5.14. Dado el operador

$$L = p(x) \frac{d}{dx},$$

determinar el operador adjunto, L^* , tal que

$$\int_a^b [uL^*(v) - vL(u)] dx = B(x) \Big|_a^b.$$

Determinar $B(x)$. *Indicación:* integrar por partes la expresión $\int_a^b vL(u) dx$.

Apéndice de la Sección 5.5: problema matricial de autovalores y ortogonalidad de autofunciones

El problema de autovalores matricial,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \tag{5.5.26}$$

donde A es una matriz real $n \times n$ (con coeficientes a_{ij}) y \mathbf{x} es un vector columna de dimensión n (con componentes x_i), tiene muchas propiedades similares a las de los problemas de autovalores de Sturm-Liouville.

Autovalores y autofunciones. Para todos los valores de λ , $\mathbf{x} = 0$ es una solución “trivial” del sistema lineal homogéneo (5.5.26). Nos preguntamos ahora

‘para qué valores de λ hay soluciones no triviales. En general, (5.5.26) se puede reescribir como

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad (5.5.27)$$

donde I es la matriz identidad. De acuerdo con la teoría de ecuaciones lineales (del álgebra lineal elemental), existe solución no trivial sólo si

$$\det[A - \lambda I] = 0. \quad (5.5.28)$$

Los valores de λ para los que ocurre esto se llaman **autovalores** y los correspondientes vectores no nulos x se llaman **autovectores**.

En general, (5.5.28) nos da una ecuación en la que un polinomio de grado n (conocido como **polinomio característico**) está igualado a cero; esta ecuación determina los autovalores. Hay, por tanto, n autovalores, pero puede que no todos sean distintos. Correspondiendo a cada autovalor distinto habrá un autovector.

Ejemplo. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, entonces los autovalores cumplen

$$0 = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 6 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1),$$

donde tenemos el polinomio característico igualado a cero. Los autovalores son $\lambda = 4$ y $\lambda = -1$. Para $\lambda = 4$, (5.5.26) se convierte en

$$2x_1 + x_2 = 4x_1 \quad \text{y} \quad 6x_1 + x_2 = 4x_2,$$

o, equivalentemente, $x_2 = 2x_1$. El autovector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un múltiplo arbitrario de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, para $\lambda = 4$. Para $\lambda = -1$,

$$2x_1 + x_2 = -x_1 \quad \text{y} \quad 6x_1 + x_2 = -x_2,$$

y por tanto el autovector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ es un múltiplo arbitrario de $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Fórmula de Green. La matriz A se puede interpretar como un operador lineal, de la misma forma que,

$$L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q,$$

es un operador diferencial lineal. La matriz A actúa sobre vectores de dimensión n y el resultado es un vector de dimensión n , mientras que L actúa sobre funciones y el resultado es una función. Al analizar el problema de autovalores de Sturm-Liouville, la fórmula de Green era importante:

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b,$$

donde u y v son funciones arbitrarias. A menudo, los términos de contorno se anulaban. Para los vectores, la herramienta análoga a la integración es el producto escalar, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i$, donde a_i y b_i son, respectivamente, las componentes i -ésimas de \mathbf{a} y \mathbf{b} (véase el Apéndice de la Sección 2.3). Por analogía directa con la fórmula de Green podríamos estudiar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u}$, donde \mathbf{u} y \mathbf{v} son vectores arbitrarios. Analicemos en su lugar los productos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}$, donde \mathbf{B} es cualquier matriz $n \times n$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} &= \sum_i (u_i \sum_j a_{ij} v_j) = \sum_i \sum_j a_{ij} u_i v_j, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u} &= \sum_i (v_i \sum_j b_{ij} u_j) = \sum_i \sum_j b_{ij} u_j v_i = \sum_i \sum_j b_{ji} u_i v_j.\end{aligned}$$

Hemos obtenido así una expresión alternativa de $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u}$ intercambiando los papeles de los índices i y j . Con ello,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u} = \sum_i \sum_j (a_{ij} - b_{ji}) u_i v_j.$$

Si hacemos que \mathbf{B} sea la traspuesta de \mathbf{A} (es decir, $b_{ji} = a_{ij}$) y usamos la notación $\mathbf{B} = \mathbf{A}^t$, tenemos el siguiente resultado,

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^t \mathbf{u} = 0,} \quad (5.5.29)$$

bastante parecido, por otra parte, a la fórmula de Green.

Matrices autoadjuntas. La diferencia entre \mathbf{A} y su traspuesta, \mathbf{A}^t , en (5.5.29) es fuente de dificultades insuperables para nosotros. Restringiremos, por ello, nuestra atención a matrices **simétricas**, en cuyo caso $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$. Para *matrices simétricas* se tiene

$$\boxed{\mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} = 0,} \quad (5.5.30)$$

y podremos utilizar este resultado para probar las mismas propiedades sobre autovalores y autovectores para matrices que las que hemos probado para los problemas de autovalores de Sturm-Liouville.

En el caso de matrices simétricas, los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales. Para probar esto, supongamos que \mathbf{u} y \mathbf{v} son autovectores correspondientes a λ_1 y λ_2 , respectivamente:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{u} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_2 \mathbf{v}.$$

Si aplicamos directamente (5.5.30), entonces

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Por tanto, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (es decir, son autovalores distintos), los correspondientes autovectores son ortogonales en el sentido de que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (5.5.31)$$

Dejamos como ejercicio la prueba de que los autovalores de una matriz real simétrica son reales.

Ejemplo. Los autovalores de la matriz real simétrica $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ se determinan por medio de $(6 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 7)(\lambda - 2) = 0$. Para $\lambda = 2$, el autovector cumple

$$6x_1 + 2x_2 = 2x_1 \quad \text{y} \quad 2x_1 + 3x_2 = 2x_2,$$

y por tanto, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para $\lambda = 7$, se tiene

$$6x_1 + 2x_2 = 7x_1 \quad \text{y} \quad 2x_1 + 3x_2 = 7x_2,$$

y el autovector es $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Así pues, tal como pedimos probar en un ejercicio para cualquier matriz real simétrica, los autovectores son ortogonales,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Desarrollo en autovectores. En el caso de matrices reales simétricas se puede demostrar que si un autovalor tiene multiplicidad R , habrá R autovectores linealmente independientes correspondientes a ese autovalor. Estos autovectores son automáticamente ortogonales a cualquier autovector correspondiente a un autovalor distinto. Se puede aplicar el proceso de Gram Schmidt (véase el Apéndice de la Sección 7.5) para construir los R autovectores correspondientes al mismo autovalor, de tal forma que sean mutuamente ortogonales. De este modo, siempre podemos obtener n autovectores ortogonales en el caso de matrices $n \times n$ reales y simétricas. Como estos vectores son ortogonales, sus combinaciones lineales generan todo el espacio vectorial de dimensión n y se pueden elegir como base: cualquier vector \mathbf{v} se puede representar como combinación lineal de los autovectores,

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i, \quad (5.5.32)$$

donde ϕ_i es el i -ésimo autovector. En los problemas de autovalores de Sturm-Liouville regulares, las autofunciones forman también un conjunto completo, lo que significa que cualquier función (suave a trozos) se puede representar en términos de un desarrollo en autofunciones

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x). \quad (5.5.33)$$

Esto es análogo a (5.5.32). En (5.5.33), los coeficientes de Fourier c_i se determinan mediante la ortogonalidad de las autofunciones, y de forma similar, las coordenadas c_i de (5.5.32) se determinan por medio de la ortogonalidad de los autovectores. Si multiplicamos escalarmente los dos miembros de la Ecuación (5.5.32) por ϕ_m obtenemos

$$\mathbf{v} \cdot \phi_m = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \cdot \phi_m = c_m \phi_m \cdot \phi_m,$$

ya que $\phi_i \cdot \phi_m = 0$ si $i \neq m$, lo que determina c_m .

Sistemas lineales. Los problemas de autovalores de Sturm-Liouville surgen al separar variables en ecuaciones en derivadas parciales. Un contexto en el que aparecen problemas matriciales de autovalores es el de “separar” un sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes. De forma breve, un sistema lineal homogéneo de primer orden de ecuaciones diferenciales se puede representar por medio de la expresión

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v},} \quad (5.5.34)$$

donde \mathbf{A} es una matriz $n \times n$ y \mathbf{v} es el vector solución de dimensión n . El vector \mathbf{v} normalmente cumple condiciones iniciales dadas, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Para resolver el sistema buscamos soluciones de forma exponencial,

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = e^{\lambda t} \phi,} \quad (5.5.35)$$

donde ϕ es un vector constante, de manera análoga a cómo buscábamos soluciones producto por el método de separación de variables. Como $d\mathbf{v}/dt = \lambda e^{\lambda t} \phi$, se tiene que

$$\mathbf{A}\phi = \lambda\phi. \quad (5.5.36)$$

Por tanto, existen soluciones de (5.5.34) de la forma (5.5.35), si λ es un autovalor de \mathbf{A} y ϕ es el correspondiente autovector. Fijemos ahora nuestra atención en las **matrices reales simétricas**. En ese caso, siempre habrá n autovectores ϕ_i mutuamente ortogonales. Obtenemos así n soluciones producto del sistema lineal homogéneo (5.5.34). Como en esta situación existe también un *principio de superposición*, cualquier combinación lineal de estas soluciones verificará (5.5.34),

$$\boxed{\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \phi_i.} \quad (5.5.37)$$

Intentemos calcular ahora los coeficientes c_i para que (5.5.37) cumpla las condiciones iniciales, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$:

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i.$$

Aquí la ortogonalidad de los autovectores es útil y, como antes,

$$c_i = \frac{\mathbf{v}_0 \cdot \phi_i}{\phi_i \cdot \phi_i}.$$

EJERCICIOS 5.5 - APÉNDICE

5.5A.1. Probar que los autovalores de las matrices reales simétricas son reales.

5.5A.2. (a) Demostrar que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene sólo un autovector linealmente independiente.

(b) Demostrar que la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene dos autovectores linealmente independientes.

5.5A.3. Consideremos los autovectores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Demostrar que los autovectores no son ortogonales.

(b) Si el producto escalar de dos vectores se define mediante

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{4} a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

demostrar que los autovectores son ortogonales con respecto a este producto.

5.5A.4. Resolver el sistema $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{A}\mathbf{v}$ utilizando métodos matriciales si

$$*(a) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

5.5A.5. Demostrar para las siguientes matrices que sus autovalores son reales y que sus correspondientes autovectores son ortogonales:

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$*(b) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix} \text{ (véase el Ejercicio 5.5A.6).}$$

5.5A.6. Si la matriz \mathbf{A} tiene coeficientes complejos, la compleja conjugada de su traspuesta se denota por \mathbf{A}^H . En el caso de matrices en las que $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$ (llamadas **hermíticas**), probar lo siguiente:

(a) Los autovalores son reales.

(b) Los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales, en el sentido de que $\phi_i \cdot \bar{\phi}_m = 0$, donde \bar{z} denota el complejo conjugado de z .

5.6. Cociente de Rayleigh

El cociente de Rayleigh se puede obtener a partir de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville,

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\phi}{dx} \right] + q(x)\phi + \lambda\sigma(x)\phi = 0. \quad (5.6.1)$$

Multiplicando esta igualdad por ϕ e integrando, se tiene

$$\int_a^b \left[\phi \frac{d}{dx} \left(p \frac{d\phi}{dx} \right) + q\phi^2 \right] dx + \lambda \int_a^b \phi^2 \sigma dx = 0,$$

y como $\int_a^b \phi^2 \sigma dx > 0$, podemos despejar λ :

$$\lambda = \frac{- \int_a^b \left[\phi \frac{d}{dx} \left(p \frac{d\phi}{dx} \right) + q\phi^2 \right] dx}{\int_a^b \phi^2 \sigma dx}. \quad (5.6.2)$$

Integrando por partes [$\int u dv = uv - \int v du$, donde $u = \phi$, $dv = (d/dx)(p d\phi/dx) dx$ y, por tanto, $du = (d\phi/dx) dx$, $v = p d\phi/dx$] se obtiene una expresión en la que la función ϕ está evaluada en la frontera,

$$\lambda = \frac{-p\phi \frac{d\phi}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b \left[p \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - q\phi^2 \right] dx}{\int_a^b \phi^2 \sigma dx}, \quad (5.6.3)$$

y que conocemos como **cociente de Rayleigh**. En las Secciones 5.3 y 5.4 hemos indicado algunas aplicaciones de este resultado. En la Sección 5.7 estudiaremos este cociente con mayor profundidad.

Autovalores no negativos. A menudo, en los problemas físicos el signo de λ es bastante importante. Por ejemplo, como se muestra en la Sección 5.2.1, en ciertos problemas de flujo de calor, la parte temporal de la solución separada verifica la ecuación $dh/dt + \lambda h = 0$. Así, λ positivo corresponde a un decaimiento exponencial en el tiempo, mientras que λ negativo corresponde a un crecimiento exponencial. Por otro lado, en ciertos problemas de vibración (véase la Sección 5.7), la parte temporal verifica la ecuación $d^2h/dt^2 = -\lambda h$. En ese caso, sólo los valores positivos de λ corresponden a las oscilaciones que “usualmente” esperamos. Por tanto, en los dos tipos de problemas es normal esperar que $\lambda \geq 0$. Ahora bien,

el cociente de Rayleigh prueba directamente que $\lambda \geq 0$ si :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & -p\phi \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_a^b \geq 0 \text{ y,} \\ \text{(b)} \quad & q \leq 0. \end{aligned} \tag{5.6.4}$$

Las condiciones (a) y (b) son razonables físicamente en el caso de autovalores λ no negativos. Consideremos la restricción sobre la frontera, $-p\phi \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_a^b \geq 0$. Los tipos más simples de condiciones de contorno homogéneas, $\phi = 0$ y $d\phi/dx = 0$, no contribuyen a este término de frontera, luego cumplen (a). La condición $d\phi/dx = h\phi$, que aparece por ejemplo en los casos físicos de la ley de enfriamiento de Newton o de condición de contorno elástica, contiene una constante $h > 0$ en el extremo izquierdo $x = a$, y por tanto proporcionará una contribución positiva en ese punto. El cambio de signo en el extremo derecho, que tiene lugar para este tipo de condición de contorno, causará también una contribución positiva. Las condiciones de contorno periódicas [por ejemplo, $\phi(a) = \phi(b)$ y $p(a) (d\phi/dx)(a) = p(b) (d\phi/dx)(b)$] al igual que la condición de singularidad [$\phi(a)$ acotado, si $p(a) = 0$] tampoco contribuyen al término de frontera. Por tanto, en todos estos casos el término $-p\phi \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_a^b \geq 0$.

La restricción de la fuente, $q \leq 0$, también tiene un significado en problemas físicos. Por ejemplo, en los problemas de flujo de calor, se tiene $q = \alpha$, puesto que $Q = \alpha u$, y la condición $q \leq 0$ corresponde al caso de una reacción que absorbe energía (endotérmica), mientras que para problemas de vibración, esta misma condición corresponde a una fuerza de recuperación.

Principio de minimización. El cociente de Rayleigh no se puede utilizar para calcular explícitamente el autovalor (porque ϕ es desconocida). No obstante, puede ser bastante útil para estimar los autovalores, ya que tenemos el siguiente teorema: **el valor mínimo del cociente de Rayleigh evaluado sobre todas las funciones continuas que cumplen las condiciones de contorno (pero no**

necesariamente la ecuación diferencial) es el autovalor mínimo λ_1 , esto es:

$$\lambda_1 = \min \frac{-pu \, du/dx|_a^b + \int_a^b [p (du/dx)^2 - qu^2] \, dx}{\int_a^b u^2 \sigma \, dx}. \quad (5.6.5)$$

El mínimo se calcula sobre todas las funciones continuas que cumplen las condiciones de contorno y se alcanza solamente para $u = \phi_1(x)$, la autofunción correspondiente al autovalor mínimo. En problemas como el del calor, el autovalor mínimo es de gran importancia (véase la Sección 5.4).

Funciones test. Antes de probar (5.6.5), indicaremos cómo se puede aplicar para obtener cotas del autovalor mínimo. La Ecuación (5.6.5) es difícil de aplicar directamente, ya que no sabemos cómo minimizar sobre todas las funciones admisibles. Sin embargo, podemos tomar *alguna* función u_T que cumpla las condiciones de contorno; llamamos a u_T **función test**. Calculemos el cociente de Rayleigh asociado a esta función test, $RQ[u_T]$. Usando el teorema mencionado antes, tenemos

$$\lambda_1 \leq RQ[u_T] = \frac{-pu_T \, du_T/dx|_a^b + \int_a^b [p (du_T/dx)^2 - qu_T^2] \, dx}{\int_a^b u_T^2 \sigma \, dx}, \quad (5.6.6)$$

ya que λ_1 es el mínimo de los valores que toma este cociente. La Ecuación (5.6.6) nos proporciona una **cota superior** del autovalor mínimo.

Ejemplo. Consideremos el siguiente problema de autovalores que ya conocemos bien

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi &= 0, \\ \phi(0) &= 0, \\ \phi(1) &= 0. \end{aligned}$$

Sabemos que $\lambda = n^2 \pi^2$ (pues $L = 1$), y que por tanto el autovalor mínimo es $\lambda_1 = \pi^2$. En este problema, el cociente de Rayleigh se simplifica y (5.6.6) se reduce a

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 (du_T/dx)^2 \, dx}{\int_0^1 u_T^2 \, dx}. \quad (5.6.7)$$

Las funciones test deben ser continuas y cumplir las condiciones de contorno homogéneas, en este caso, $u_T(0) = 0$ y $u_T(1) = 0$. Además, es razonable pensar que cuanto más cercana de la autofunción esté la función test, más precisa será la acotación del autovalor mínimo. Por ello, elegimos funciones test que no tengan ceros en el interior del intervalo, puesto que ya sabemos que la autofunción correspondiente

al autovalor mínimo no tiene ceros. Calculemos el cociente de Rayleigh para las tres funciones test representadas en la Figura 5.6.1. Para

$$u_T = \begin{cases} x, & x < \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

la Ecuación (5.6.7) nos da

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_0^{1/2} dx + \int_{1/2}^1 dx}{\int_0^{1/2} x^2 dx + \int_{1/2}^1 (1-x)^2 dx} = \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{24}} = 12,$$

que es una buena cota superior del valor exacto, π^2 (porque $\pi^2 \approx 9,8696\dots$). Para $u_T = x - x^2$, (5.6.7) se convierte en

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 (1-2x)^2 dx}{\int_0^1 (x-x^2)^2 dx} = \frac{\int_0^1 (1-4x+4x^2) dx}{\int_0^1 (x^2-2x^3+x^4) dx} = \frac{1-2+\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} = 10,$$

que es una cota más precisa. Como $u_T = \text{sen } \pi x$ es la autofunción del autovalor mínimo, el cociente de Rayleigh para esta función test será exactamente igual al autovalor mínimo. En secciones posteriores mostraremos otras aplicaciones del cociente de Rayleigh.

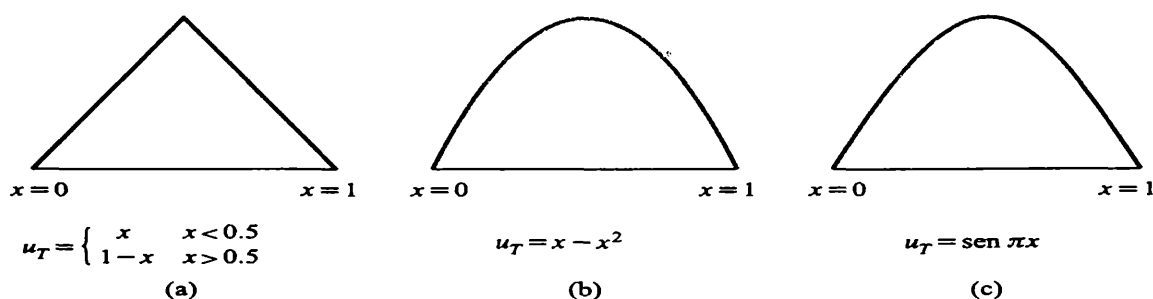


Figura 5.6.1: Ejemplos de funciones test según se ha elegido en los cálculos: son continuas, cumplen las condiciones de contorno y no cambian de signo.

Demostración del principio de minimización. Es usual probar el principio de minimización del cociente de Rayleigh usando una rama más avanzada de la matemática aplicada, conocida como cálculo de variaciones, que se escapa de los objetivos de este texto. En su lugar, daremos una demostración basada en el desarrollo en autofunciones. Calculemos de nuevo el cociente de Rayleigh (5.6.3) para una función cualquiera u , que sea *continua y cumpla las condiciones de contorno homogéneas*. En esta deducción es más útil utilizar la forma equivalente del cociente de Rayleigh (5.6.2):

$$RQ[u] = \frac{-\int_a^b uL(u) dx}{\int_a^b u^2 \sigma dx}, \quad (5.6.8)$$

donde la notación de operadores nos permitirá hacer más manejable el cálculo. Desarrollemos la función u en términos de las autofunciones $\phi_n(x)$, usualmente desconocidas:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x). \quad (5.6.9)$$

Puesto que L un operador lineal, esperamos que

$$L(u) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n L(\phi_n(x)), \quad (5.6.10)$$

ya que esta propiedad es válida para sumas finitas. En el Capítulo 7 veremos que la identidad (5.6.10) es válida *si u es continua y cumple las mismas condiciones de contorno homogéneas que las autofunciones $\phi_n(x)$* . En esta fórmula, al ser ϕ_n autofunciones, tenemos $L(\phi_n) = -\lambda_n \sigma \phi_n$, por lo que (5.6.10) se convierte en

$$L(u) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \sigma \phi_n, \quad (5.6.11)$$

fórmula que podemos pensar como el desarrollo en autofunciones de $L(u)$. Si sustituimos (5.6.11) y (5.6.9) en la expresión (5.6.8) y utilizamos índices mudos diferentes para el producto de las dos series, obtenemos

$$RQ[u] = \frac{\int_a^b (\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \lambda_n \phi_n \phi_m \sigma) dx}{\int_a^b (\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \phi_n \phi_m \sigma) dx}. \quad (5.6.12)$$

Cambiamos ahora el orden entre la integración y la suma y recordemos que las autofunciones son ortogonales ($\int_a^b \phi_n \phi_m \sigma dx = 0$ si $n \neq m$), lo que implica que (5.6.12) se convierte en

$$RQ[u] = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \lambda_n \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx}. \quad (5.6.13)$$

Ésta es una expresión exacta del cociente de Rayleigh en términos de los coeficientes de Fourier generalizados a_n de u . Si denotamos por λ_1 el autovalor mínimo, entonces $\lambda_1 < \lambda_n$, para $n > 1$, y tenemos que

$$RQ[u] \geq \frac{\lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx} = \lambda_1. \quad (5.6.14)$$

Más aún, se tiene la igualdad en (5.6.14) sólo si $a_n = 0$ para $n > 1$ (es decir, sólo si $u = a_1 \phi_1$). Hemos demostrado, por tanto, que el valor mínimo del cociente de Rayleigh es el autovalor mínimo, λ_1 . Es más, el cociente de Rayleigh alcanza el mínimo sólo cuando $u = a_1 \phi_1$ (es decir, cuando u es una autofunción correspondiente al autovalor mínimo).

Hemos obtenido un principio de minimización para el autovalor más pequeño, λ_1 . Podemos preguntarnos si existen los correspondientes resultados para los demás autovalores. A partir de la Fórmula (5.6.13), se deducen interesantes generalizaciones; por ejemplo, si imponemos que $a_1 = 0$, entonces se tiene

$$RQ[u] = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \lambda_n \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx}{\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx}. \quad (5.6.15)$$

Esto significa que estamos restringiendo además nuestra función u al caso de que sea ortogonal a ϕ_1 , puesto que $a_1 = \int_a^b u \phi_1 \sigma dx / (\int_a^b \phi_1^2 \sigma dx)$. Procedamos ahora de forma similar a lo hecho anteriormente. Como $\lambda_2 < \lambda_n$, para $n > 2$, obtenemos que

$$RQ[u] \geq \lambda_2,$$

y aún más, la igualdad es cierta solamente si $a_n = 0$, para $n > 2$ [es decir, para $u = a_2 \phi_2(x)$], porque ya teníamos que $a_1 = 0$. Acabamos de probar el siguiente resultado: el valor mínimo del cociente de Rayleigh sobre todas las funciones continuas $u(x)$ que son ortogonales a la autofunción del autovalor mínimo y cumplen las condiciones de contorno, es el segundo autovalor (el siguiente al mínimo en orden creciente). Se puede obtener también otras generalizaciones directamente a partir de (5.6.13).

EJERCICIOS 5.6

5.6.1. Usar el cociente de Rayleigh para obtener una cota superior (razonablemente precisa) del autovalor mínimo de los siguientes problemas:

(a) $\frac{d^2 \phi}{dx^2} + (\lambda - x^2) \phi = 0$, con $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ y $\phi(1) = 0$.

(b) $\frac{d^2 \phi}{dx^2} + (\lambda - x) \phi = 0$, con $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(1) + 2\phi(1) = 0$.

* (c) $\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi = 0$, con $\phi(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(1) + \phi(1) = 0$ (véase el Ejercicio 5.8.10).

5.6.2. Considérese el problema de autovalores

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + (\lambda - x^2) \phi = 0,$$

con las condiciones $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(1) = 0$. Demostrar que $\lambda > 0$, asegurándose de demostrar que $\lambda \neq 0$.

5.6.3. Probar de la forma siguiente que la Fórmula (5.6.10) es válida: supóngase que $L(u)/\sigma$ es suave a trozos, y por ello

$$\frac{L(u)}{\sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x);$$

calcúlense los coeficiente b_n . *Indicación:* demostrar, utilizando la fórmula de Green (5.5.5), que $b_n = -a_n \lambda_n$, si u y du/dx son continuas y u cumple las mismas condiciones de contorno que las autofunciones $\phi_n(x)$.

5.7. Ejemplo: vibraciones de una cuerda no uniforme

Algunas de las aplicaciones del cociente de Rayleigh se pueden ilustrar mejor por medio de un problema físico. Consideremos las vibraciones de una cuerda no uniforme, con tensión constante T_0 pero densidad de masa variable $\rho(x)$ y sin fuerzas externas, $Q = 0$ (véase la Sección 4.2). Supongamos que los extremos de la cuerda están fijos con desplazamiento nulo. Las ecuaciones matemáticas para el problema de valores iniciales son

$$\text{EDP: } \boxed{\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \quad (5.7.1)$$

$$\text{CC: } \boxed{\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0. \end{aligned}} \quad (5.7.2)$$

$$\text{CI: } \boxed{\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x). \end{aligned}} \quad (5.7.3)$$

Como la ecuación en derivadas parciales y las condiciones de contorno son lineales y homogéneas, podemos aplicar de nuevo el método de separación de variables. Busquemos soluciones producto en la forma

$$u(x, t) = \phi(x)h(t), \quad (5.7.4)$$

ignorando por el momento las condiciones iniciales no nulas. Se puede demostrar que $h(t)$ cumple

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda h, \quad (5.7.5)$$

mientras que la parte dependiente del espacio resuelve el siguiente problema de autovalores de Sturm-Liouville regular:

$$\begin{aligned} T_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \rho(x) \phi &= 0, \\ \phi(0) &= 0, \\ \phi(L) &= 0. \end{aligned} \quad (5.7.6)$$

Aunque usualmente se conoce tanto la sucesión infinita de los autovalores, λ_n , como la de las correspondientes autofunciones $\phi_n(x)$, en nuestra situación no es así. Sin embargo, para analizar (5.7.5) es necesario saber algo sobre λ . Usando razonamientos físicos, debería ser $\lambda > 0$, porque esperamos que haya oscilaciones. El cociente

de Rayleigh nos garantiza fácilmente este hecho: en el caso del problema (5.7.6), el cociente (5.6.3) es

$$\lambda = \frac{T_0 \int_0^L (d\phi/dx)^2 dx}{\int_0^L \phi^2 \rho(x) dx}, \quad (5.7.7)$$

por lo que claramente $\lambda \geq 0$ y, como antes, es imposible tener $\lambda = 0$. Por tanto, se sigue que $\lambda > 0$.

Así pues, nos hemos asegurado de que la solución de (5.7.5) es una combinación lineal de $\sin \sqrt{\lambda}t$ y $\cos \sqrt{\lambda}t$. Existen dos familias de soluciones producto de la ecuación en derivadas parciales: $\sin \sqrt{\lambda_n}t \phi_n(x)$ y $\cos \sqrt{\lambda_n}t \phi_n(x)$ y de acuerdo con el principio de superposición,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \sqrt{\lambda_n}t \phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \sqrt{\lambda_n}t \phi_n(x), \quad (5.7.8)$$

es una solución. Sólo necesitamos demostrar que las dos familias de coeficientes se pueden obtener a partir de las condiciones iniciales, que desarrolladas en términos de las autofunciones son:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x) \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\lambda_n} \phi_n(x). \quad (5.7.9)$$

Por tanto, los números b_n son los coeficientes de Fourier generalizados de la posición inicial $f(x)$, mientras que los valores $a_n \sqrt{\lambda_n}$ son los coeficientes de Fourier generalizados de la velocidad inicial $g(x)$. Podemos determinar fácilmente los coeficientes a_n y b_n por medio de la ortogonalidad de las autofunciones [con peso $\rho(x)$]:

$$b_n = \frac{\int_0^L f(x) \phi_n(x) \rho(x) dx}{\int_0^L \phi_n^2 \rho dx}, \quad (5.7.10)$$

$$a_n \sqrt{\lambda_n} = \frac{\int_0^L g(x) \phi_n(x) \rho(x) dx}{\int_0^L \phi_n^2 \rho dx}. \quad (5.7.11)$$

Se puede utilizar el cociente de Rayleigh para obtener información adicional sobre el autovalor mínimo λ_1 (notemos que la frecuencia mínima de vibración es $\sqrt{\lambda_1}$). Sabemos que

$$\lambda_1 = \text{mín} \frac{T_0 \int_0^L (du/dx)^2 dx}{\int_0^L u^2 \rho(x) dx}, \quad (5.7.12)$$

y ya hemos mostrado (véase la Sección 5.6) cómo utilizar funciones test para obtener una cota superior del autovalor mínimo. Este procedimiento no siempre es conveniente, porque el denominador de (5.7.12) depende de la densidad de masa $\rho(x)$, por lo que vamos a desarrollar otro método para obtener una cota superior, que tiene la ventaja adicional de que también obtendremos una cota inferior.

Supongamos, como es habitual, que la densidad de masa variable tiene una cota superior y una cota inferior,

$$0 < \rho_{\text{mín}} \leq \rho(x) \leq \rho_{\text{máx}}.$$

Para cualquier $u(x)$ se sigue que

$$\rho_{\text{mín}} \int_0^L u^2 dx \leq \int_0^L u^2 \rho(x) dx \leq \rho_{\text{máx}} \int_0^L u^2 dx.$$

En consecuencia, a partir de (5.7.12) obtenemos

$$\frac{T_0}{\rho_{\text{máx}}} \text{mín} \frac{\int_0^L (du/dx)^2 dx}{\int_0^L u^2 dx} \leq \lambda_1 \leq \frac{T_0}{\rho_{\text{mín}}} \text{mín} \frac{\int_0^L (du/dx)^2 dx}{\int_0^L u^2 dx}. \quad (5.7.13)$$

Podemos evaluar las expresiones de la Fórmula (5.7.13), ya que reconocemos el mínimo de $\int_0^L (du/dx)^2 dx / (\int_0^L u^2 dx)$, con las condiciones $u(0) = 0$ y $u(L) = 0$, como el autovalor mínimo de un problema diferente, uno con coeficientes constantes,

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \bar{\lambda} \phi = 0,$$

$$\phi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \phi(L) = 0.$$

Ya sabemos que $\bar{\lambda} = (n\pi/L)^2$, y por tanto que el autovalor de este problema es $\bar{\lambda}_1 = (\pi/L)^2$. El principio de minimización del cociente de Rayleigh implica que

$$\bar{\lambda}_1 = \text{mín} \frac{\int_0^L (du/dx)^2 dx}{\int_0^L u^2 dx}.$$

Así pues, hemos probado finalmente que el autovalor mínimo de nuestro problema con coeficientes variables cumple la siguiente desigualdad:

$$\frac{T_0}{\rho_{\text{máx}}} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \leq \lambda_1 \leq \frac{T_0}{\rho_{\text{mín}}} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2,$$

con lo que hemos obtenido una cota superior y una cota inferior del autovalor más pequeño. Tomando raíces cuadradas,

$$\frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_{\text{máx}}}} \leq \sqrt{\lambda_1} \leq \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_{\text{mín}}}}.$$

El significado físico de estas estimaciones es claro: la frecuencia mínima de oscilación de una cuerda con densidad variable se encuentra entre las frecuencias mínimas de vibración de dos cuerdas de densidad constante, una con densidad igual a la mínima de la cuerda variable y la otra con densidad igual a la máxima. Se puede obtener también resultados análogos relativos a las frecuencias de vibración más altas, pero son más difíciles de probar (*véanse* los libros de Weinberger [1965], Courant y Hilbert [1953] o Birkhoff y Rota [1978]).

EJERCICIOS 5.7

- *5.7.1.** Obtener una cota superior y una inferior (no nula), para la frecuencia mínima de vibración de una cuerda no uniforme, fija en $x = 0$ y $x = 1$, tal que $c^2 = 1 + 4\alpha^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.
- 5.7.2.** Considérese el flujo de calor en una varilla unidimensional sin fuentes y con coeficientes térmicos constantes. Supóngase que la temperatura es nula en $x = 0$ y en $x = L$, y que $\rho_{\text{mín}} \leq \rho \leq \rho_{\text{máx}}$ y $K_{\text{mín}} \leq K_0(x) \leq K_{\text{máx}}$. Obtener una cota superior y una inferior (no nula) de la mínima tasa de decaimiento exponencial de la solución producto.

5.8. Condiciones de contorno de tercera clase

Introducción. Hasta ahora hemos analizado dos tipos generales de problemas de contorno: unos muy específicos y fáciles de resolver (como los que dan lugar a series de Fourier de senos, de cosenos o generales), y otros algo más abstractos, los problemas de autovalores de Sturm-Liouville. En todos estos problemas nuestros resultados han garantizado muchas de las propiedades necesarias en su estudio. En el primer caso, la ecuación diferencial tenía coeficientes constantes (con condiciones de contorno sencillas), y en el segundo hemos estudiado ecuaciones diferenciales con coeficientes variables.

En esta sección analizaremos problemas con condiciones de contorno de tercera clase, que también se resolverán de manera sencilla porque la ecuación diferencial todavía tendrá coeficientes constantes, pero que, sin embargo, debido a sus condiciones de contorno, nos mostrarán de forma más convincente las ideas generales involucradas en nuestro estudio de los problemas de autovalores de Sturm-Liouville.

Ejemplos físicos. Consideremos algunos problemas sencillos con parámetros físicos constantes. El flujo de calor en una varilla uniforme satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5.8.1)$$

mientras que una cuerda vibrante uniforme se rige por la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.8.2)$$

En ambos casos supondremos que el extremo izquierdo está fijo, pero que el derecho cumple una condición de contorno homogénea de tercera clase:

$$u(0, t) = 0, \quad (5.8.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -hu(L, t). \quad (5.8.4)$$

Recordemos que si $h > 0$, para la conducción del calor, (5.8.4) corresponde a la ley de enfriamiento de Newton, mientras que para el problema de la cuerda vibrante, (5.8.4) corresponde a una fuerza de recuperación, llamada condición de contorno elástica. Observemos que, normalmente, en los problemas físicos se tiene $h \geq 0$, sin embargo, por razones matemáticas estudiaremos los casos $h < 0$ y $h \geq 0$. Si $h < 0$, la cuerda vibrante tiene una fuerza desestabilizadora en el extremo derecho, mientras que para el problema del flujo de calor, estamos introduciendo energía de forma constante en la varilla a través del extremo derecho.

Problema de autovalores de Sturm-Liouville. Tras separar variables en cada uno de los dos problemas anteriores, escribiendo la solución como

$$u(x, t) = G(t)\phi(x), \quad (5.8.5)$$

las partes dependientes del tiempo cumplen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\text{flujo de calor : } \frac{dG}{dt} = -\lambda kG, \quad (5.8.6)$$

$$\text{cuerda vibrante : } \frac{d^2 G}{dt^2} = -\lambda c^2 G. \quad (5.8.7)$$

Queremos concentrarnos en el efecto de la condición de contorno de tercer tipo, (5.8.4). En ambos problemas físicos, la parte espacial $\phi(x)$ satisface el siguiente problema de autovalores de Sturm-Liouville regular:

$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi = 0,$	(5.8.8)
$\phi(0) = 0,$	(5.8.9)
$\frac{d\phi}{dx}(L) + h\phi(L) = 0,$	(5.8.10)

donde h es una constante fija dada. Si $h \geq 0$, estaremos en lo que llamamos caso "físico", mientras que si $h < 0$ estaremos en lo que llamamos caso "no físico". Aunque la ecuación diferencial (5.8.8) tiene coeficientes constantes, las condiciones de contorno darán lugar a algunas ideas nuevas. Por el momento, ignoraremos algunos aspectos de nuestra teoría sobre problemas de autovalores de Sturm-Liouville, excepto el hecho de que los autovalores son reales. Al resolver (5.8.8) debemos considerar tres casos distintos: $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda = 0$. Esto será especialmente importante cuando analicemos el caso no físico $h < 0$.

Autovalores positivos. Si $\lambda > 0$, la solución de la ecuación diferencial es una combinación lineal de senos y cosenos:

$$\phi(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x. \quad (5.8.11)$$

La condición de contorno $\phi(0) = 0$ se reduce a $0 = c_1$, y de ahí que

$$\phi(x) = c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x. \quad (5.8.12)$$

Claramente necesitamos las funciones seno para que se cumpla la condición de contorno nula en $x = 0$. Como

$$\frac{d\phi}{dx} = c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}x,$$

la condición de contorno de tercera clase (5.8.10) implica que

$$c_2(\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}L + h \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}L) = 0. \quad (5.8.13)$$

Si $c_2 = 0$, a partir de (5.8.12) tenemos $\phi \equiv 0$, que no puede ser una autofunción. Por tanto, son autovalores todos los números λ que cumplen

$$\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}L + h \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}L = 0. \quad (5.8.14)$$

Analizaremos más tarde el caso elemental $h = 0$. La Ecuación (5.8.14) es una ecuación trascendente que cumplen los autovalores positivos (si $h \neq 0$). Para resolverla, conviene dividir por $\cos \sqrt{\lambda}L$ y obtener así una expresión para $\tan \sqrt{\lambda}L$:

$$\tan \sqrt{\lambda}L = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}. \quad (5.8.15)$$

Observemos que podemos dividir por $\cos \sqrt{\lambda}L$ porque éste no es nulo [pues si tuviéramos $\cos \sqrt{\lambda}L = 0$, entonces $\operatorname{sen} \sqrt{\lambda}L \neq 0$ y no se cumpliría (5.8.14)], y que podríamos haber obtenido una expresión para la cotangente, en lugar de para la

tangente, dividiendo (5.8.14) por $\sin \sqrt{\lambda}L$, pero imaginamos que el lector se sentiría más cómodo trabajando con la función tangente.

Técnica gráfica ($\lambda > 0$). La Ecuación (5.8.15) es trascendente y no podemos resolverla de forma exacta. Sin embargo, podemos describir una *técnica gráfica* para obtener información sobre los autovalores. Para dibujar la solución de una ecuación trascendente, introducimos una coordenada auxiliar z ,

$$z = \tan \sqrt{\lambda}L, \quad (5.8.16)$$

con lo que

$$z = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}. \quad (5.8.17)$$

Las parejas (z, λ) que resuelven a la vez (5.8.16) y (5.8.17) (es decir, sus puntos de intersección) corresponden a soluciones de (5.8.15). La Ecuación (5.8.16) es una función tangente pura de $\sqrt{\lambda}L$, donde $\sqrt{\lambda}L > 0$ ya que $\lambda > 0$. En la Figura 5.8.1 se representa (5.8.16). Notemos que la función tangente es periódica, con periodo π ; es cero en $\sqrt{\lambda}L = 0, \pi, 2\pi, \text{etc.}$ y tiende a $\pm\infty$ cuando $\sqrt{\lambda}L$ tiende a $\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \text{etc.}$ (es decir, tiene asíntotas verticales en esos puntos). Necesitamos calcular la intersección de la función tangente con la función (5.8.17). Como estamos representando nuestras curvas como funciones de $\sqrt{\lambda}L$, expresaremos (5.8.17) como función de $\sqrt{\lambda}L$. Esto se hace fácilmente multiplicando el numerador y el denominador de (5.8.17) por L :

$$z = -\frac{\sqrt{\lambda}L}{hL}. \quad (5.8.18)$$

Como función de $\sqrt{\lambda}L$, (5.8.18) es una recta con pendiente $-1/hL$. Sin embargo, esta línea es muy diferente según sea $h > 0$ (el caso físico) o $h < 0$ (el caso no físico).

Autovalores positivos (caso físico, $h > 0$). La intersección de las dos curvas está representada en la Figura 5.8.1 para el caso físico ($h > 0$). Hay una cantidad infinita de intersecciones; cada una corresponde a un autovalor positivo (excluimos $\sqrt{\lambda}L = 0$ porque hemos supuesto que $\lambda > 0$). Las autofunciones son $\phi = \sin \sqrt{\lambda}x$, donde los autovalores permitidos están determinados gráficamente.

No podemos determinar estos autovalores de forma exacta. Sin embargo, por la Figura 5.8.1 sabemos que

$$\frac{\pi}{2} < \sqrt{\lambda_1}L < \pi, \quad (5.8.19)$$

$$\frac{3\pi}{2} < \sqrt{\lambda_2}L < 2\pi, \quad (5.8.20)$$

y así sucesivamente. Es interesante notar que cuando n crece, los puntos de intersección se acercan más a las asíntotas de la tangente. Tenemos entonces la siguiente fórmula asintótica para los autovalores

$$\sqrt{\lambda_n}L \sim \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (5.8.21)$$

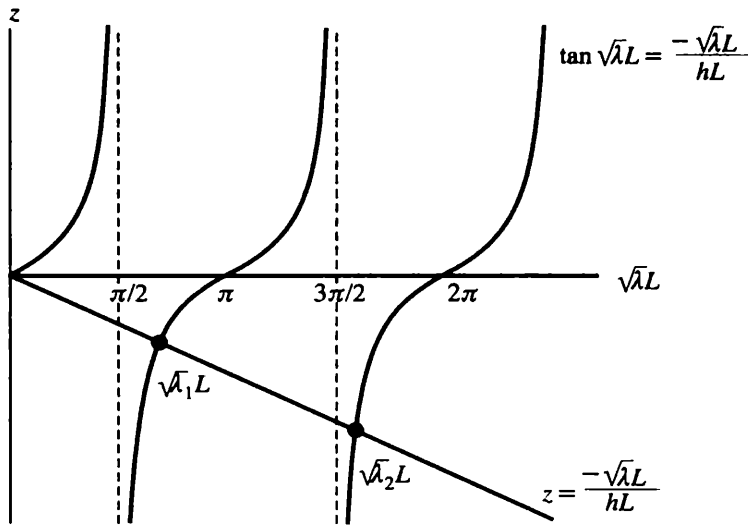


Figura 5.8.1: Determinación gráfica de los autovalores positivos ($h > 0$).

cuando $n \rightarrow \infty$. Esta expresión es más precisa cuanto mayor es n . Existe una fórmula asintótica para los autovalores grandes similar a (5.8.21), incluso en los casos en que la ecuación diferencial no se puede resolver explícitamente. Estudiaremos este hecho en la Sección 5.9.

Para obtener valores más precisos, podemos usar un método numérico como el método de Newton (que se describe a menudo en los textos elementales de cálculo numérico). Un esquema práctico consiste en utilizar el método numérico de Newton para las primeras raíces (unas pocas), hasta llegar a una raíz cuya solución esté razonablemente próxima a la fórmula asintótica (5.8.21). Para las raíces más grandes, la fórmula asintótica (5.8.21) será suficientemente precisa.

Autovalores positivos (caso no físico, $h < 0$). El caso $h < 0$ también dará una buena ilustración de varias ideas generales sobre los problemas de autovalores de Sturm-Liouville. Si $h < 0$, los autovalores positivos están determinados de nuevo dibujando (5.8.15), $\tan \sqrt{\lambda}L = -\sqrt{\lambda}/h$. De nuevo la línea recta (aquí con pendiente positiva) debe cortar a la función tangente. Sólo en caso de que la pendiente de la recta sea mayor que 1 (véase la Figura 5.8.2a), la recta cortará a la función tangente en su "primera rama". Estamos utilizando aquí la propiedad de que la pendiente de la tangente en $x = 0$ es 1 y crece a lo largo de la primera rama. Entonces, si $h < 0$ hay dos subcasos principales, $-1/hL > 1$ y $0 < -1/hL < 1$ y un subcaso menor, $-1/hL = 1$. En la Figura 5.8.2 se representan estos tres casos. En cada una de las tres gráficas hay una cantidad infinita de intersecciones, correspondientes a un número infinito de autovalores positivos. Las autofunciones son, de nuevo, $\sin \sqrt{\lambda}x$.

En estos casos, las soluciones gráficas también muestran que los autovalores grandes están aproximadamente situados en las singularidades de la función tangente. La Ecuación (5.8.21) es válida de nuevo en sentido asintótico; cuanto mayor es n , es más precisa.

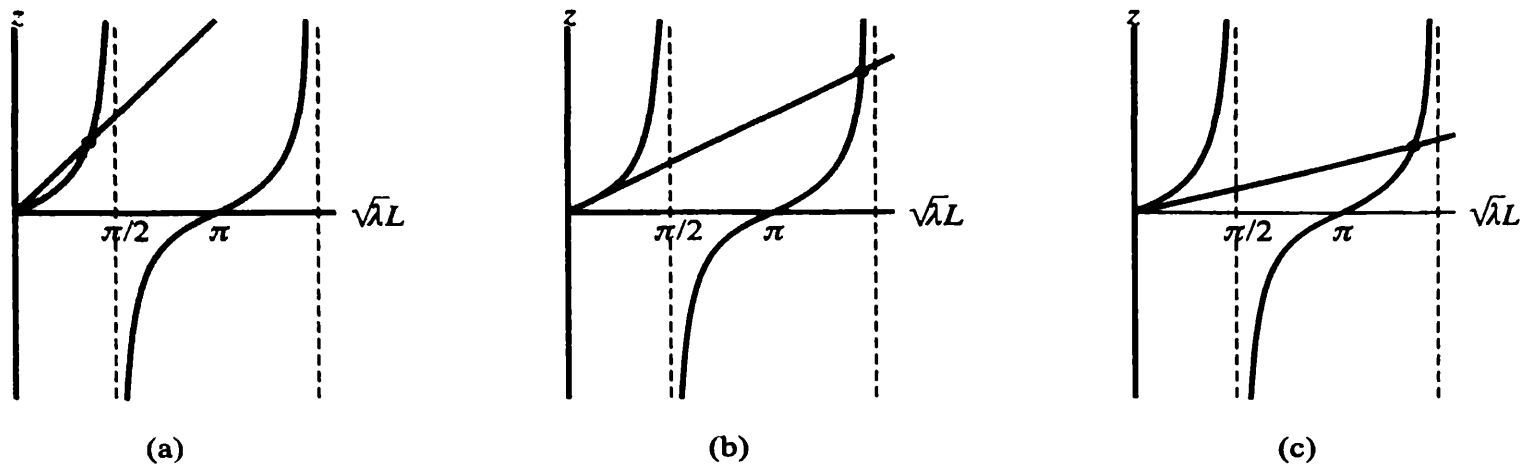


Figura 5.8.2: Determinación gráfica de los autovalores positivos: (a) $0 > hL > -1$; (b) $hL = -1$; (c) $hL < -1$.

Autovalor cero. ¿Es $\lambda = 0$ un autovalor de (5.8.8) - (5.8.10)? La Ecuación (5.8.11) no es la solución general de (5.8.8), si $\lambda = 0$. En ese caso, la solución es

$$\phi = c_1 + c_2 x; \quad (5.8.22)$$

es decir, la autofunción debe ser una línea recta. La condición de contorno $\phi(0) = 0$ hace que $c_1 = 0$, lo que impone que la línea recta pase por el origen,

$$\phi = c_2 x. \quad (5.8.23)$$

Finalmente, $d\phi/dx(L) + h\phi(L) = 0$ implica que

$$c_2(1 + hL) = 0. \quad (5.8.24)$$

Si $hL \neq -1$ (lo que incluye todos los casos físicos, $h > 0$), se sigue que $c_2 = 0$, por lo que $\phi = 0$, y por tanto $\lambda = 0$ no es un autovalor. Sin embargo, si $hL = -1$, entonces de (5.8.24) obtenemos que c_2 es arbitrario y $\lambda = 0$ es un autovalor con autofunción x .

Autovalores negativos. No esperamos que haya autovalores negativos en las situaciones físicas [véanse (5.8.6) y (5.8.7)]. Si $\lambda < 0$ introducimos la notación $s = -\lambda$, de forma que $s > 0$. Entonces (5.8.8) se transforma en

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = s\phi. \quad (5.8.25)$$

La condición de contorno nula en $x = 0$ sugiere que conviene expresar la solución general de (5.8.25) en términos de las funciones hiperbólicas:

$$\phi = c_1 \cosh \sqrt{s}x + c_2 \sinh \sqrt{s}x. \quad (5.8.26)$$

Sólo necesitamos los senos hiperbólicos, porque $\phi(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$ y entonces

$$\begin{aligned} \phi &= c_2 \sinh \sqrt{s}x, \\ \frac{d\phi}{dx} &= c_2 \sqrt{s} \cosh \sqrt{s}x. \end{aligned} \quad (5.8.27)$$

La condición de contorno de tercera clase, $d\phi/dx(L) + h\phi(L) = 0$, implica que

$$c_2(\sqrt{s} \cosh \sqrt{s}L + h \sinh \sqrt{s}L) = 0. \quad (5.8.28)$$

Llegados a este punto resulta obvio que el análisis correspondiente a $\lambda < 0$ es paralelo al que hicimos para $\lambda > 0$ (con funciones hiperbólicas en lugar de trigonométricas). Por tanto, como $c_2 \neq 0$, tendremos

$$\boxed{\tanh \sqrt{s}L = -\frac{\sqrt{s}}{h} = -\frac{\sqrt{s}L}{hL}.} \quad (5.8.29)$$

Solución gráfica para autovalores negativos. Los autovalores negativos se determinan por la solución gráfica de la ecuación trascendente (5.8.29). Aquí serán muy importantes las propiedades de la función tangente hiperbólica. En la Figura 5.8.3 se representa la tangente hiperbólica como función de $\sqrt{s}L$. Recordemos algunas propiedades de esta función, que se siguen de su definición.

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Cuando $\sqrt{s}L \rightarrow \infty$, $\tanh \sqrt{s}L$ se aproxima a 1. También necesitaremos observar que la pendiente⁵ de la función tangente hiperbólica es igual a 1 cuando $\sqrt{s}L = 0$ y decrece hacia cero cuando $\sqrt{s}L \rightarrow \infty$. Tenemos que intersecar esta función con la línea recta del miembro derecho de (5.8.29). Aparecen los mismos cuatro casos que antes, tal como se representan en la Figura 5.8.3. En los casos físicos ($h > 0$), no hay intersecciones con $\sqrt{s}L > 0$, por lo que no hay autovalores negativos en las situaciones físicas. Sin embargo, si $hL < -1$ (y sólo en estas situaciones), existe exactamente una intersección, es decir, hay un autovalor negativo en este caso. Si denotamos la intersección por $s = s_1$, el autovalor negativo es $\lambda = -s_1$, y la correspondiente autofunción es $\phi = \sinh \sqrt{s_1}x$. Así pues, en las situaciones no físicas existe una cantidad finita de autovalores negativos (uno, si $hL < -1$, y ninguno en otro caso).

Caso especial $h = 0$. Aunque en el caso $h = 0$ las condiciones de contorno no son de tercera clase, los autovalores y autofunciones siguen siendo de interés. Si $h = 0$, entonces todos los autovalores son positivos [véanse (5.8.24) y (5.8.28)] y están determinados fácilmente de forma explícita a partir de (5.8.14):

$$\lambda = \left[\frac{(n - 1/2)\pi}{L} \right]^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Las autofunciones son $\sin \sqrt{\lambda}x$.

Resumen. Hemos demostrado que hay cinco casos diferentes dependiendo del parámetro h de la condición de contorno. En la Tabla 5.8.1 resumimos los autovalores y autofunciones para estos casos.

⁵ $(d/dx) \tanh x = \operatorname{sech}^2 x = 1/\cosh^2 x$.

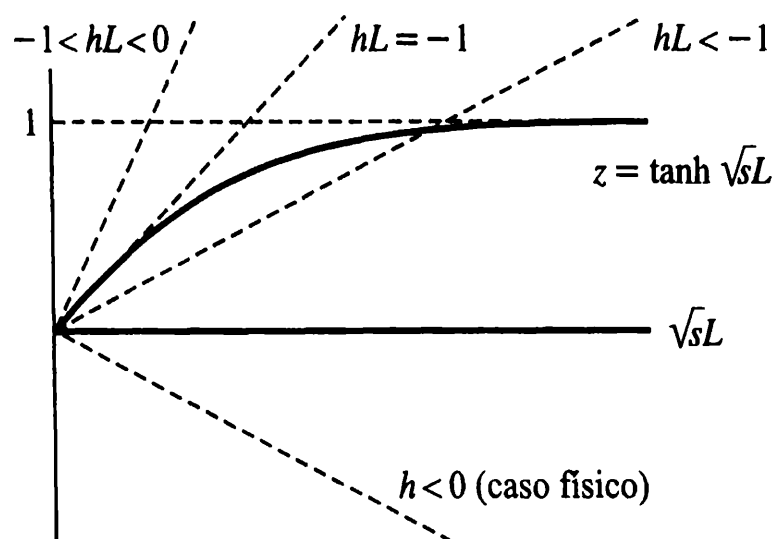


Figura 5.8.3: Determinación gráfica de los autovalores negativos.

Tabla 5.8.1: Autofunciones para (5.8.8) - (5.8.10)

		$\lambda > 0$	$\lambda = 0$	$\lambda < 0$
Físicos	$h > 0$	$\text{sen } \sqrt{\lambda} x$		
	$h = 0$	$\text{sen } \sqrt{\lambda} x$		
No físicos	$-1 < hL < 0$	$\text{sen } \sqrt{\lambda} x$		
	$hL = -1$	$\text{sen } \sqrt{\lambda} x$	x	
	$hL < -1$	$\text{sen } \sqrt{\lambda} x$		$\text{senh } \sqrt{s_1} x$

En cierto sentido hay solamente tres casos: si $-1 < hL$, todos los autovalores son positivos; si $hL = -1$, no hay autovalores negativos, pero el cero es un autovalor; y si $hL < -1$, todavía tenemos una cantidad infinita de autovalores positivos, pero hay también uno negativo.

Cociente de Rayleigh. Hemos demostrado, resolviendo explícitamente el problema de autovalores,

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi = 0, \quad (5.8.30)$$

$$\phi(0) = 0, \quad (5.8.31)$$

$$\frac{d\phi}{dx}(L) + h\phi(L) = 0, \quad (5.8.32)$$

que en los problemas físicos ($h \geq 0$) todos los autovalores son positivos, mientras que en problemas sin significado físico ($h < 0$) puede que haya o no autovalores

negativos. Mostremos que el cociente de Rayleigh es consistente con este resultado:

$$\lambda = \frac{-p\phi \frac{d\phi}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b \left[p \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - q\phi^2 \right] dx}{\int_a^b \phi^2 \sigma dx} = \frac{h\phi^2(L) + \int_0^L \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^L \phi^2 dx}, \quad (5.8.33)$$

pues por (5.8.30) tenemos $p(x) = 1$, $\sigma(x) = 1$, $q(x) = 0$ y en este caso $a = 0$, $b = L$, y hemos utilizado las condiciones de contorno (5.8.31) y (5.8.32) para simplificar los términos de frontera del cociente de Rayleigh. Si $h \geq 0$ (los casos físicos) se sigue directamente de (5.8.33) que los autovalores deben ser positivos, exactamente lo que probamos haciendo los cálculos explícitos. Sin embargo, si $h < 0$ (el caso sin significado físico), el numerador del cociente de Rayleigh contiene un término negativo, $h\phi^2(L)$, y un término positivo, $\int_0^L (d\phi/dx)^2 dx$. En estas condiciones es imposible extraer conclusiones sobre el signo de λ . Por tanto, es posible que haya autovalores negativos si $h < 0$, cosa que ocurre sólo cuando $|h\phi^2(L)| > \int_0^L (d\phi/dx)^2 dx$, pero no podemos concluir que existan o no utilizando solamente el cociente de Rayleigh. De hecho, hemos podido probar que hay un autovalor negativo sólo en el caso de que $hL < -1$, pero únicamente usando cálculos explícitos.

Ceros de las autofunciones. El problema de autovalores de Sturm-Liouville que hemos estado estudiando en esta sección,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi &= 0, \\ \phi(0) &= 0, \\ \frac{d\phi}{dx}(L) + h\phi(L) &= 0, \end{aligned} \quad (5.8.34)$$

constituye un buen ejemplo para ilustrar el resultado general sobre los ceros de las autofunciones. Este resultado establece que la autofunción correspondiente al autovalor más pequeño no tiene ceros en el interior del intervalo y, más generalmente, que la n -ésima autofunción tiene $n - 1$ ceros.

Hay cinco casos del problema (5.8.34) que merece la pena estudiar: $h > 0$, $h = 0$, $-1 < hL < 0$, $hL = -1$ y $hL < -1$. Sin embargo, la línea de razonamiento utilizada para estudiar los ceros de las autofunciones es bastante similar en todos ellos. Por esa razón analizaremos sólo un caso, $hL < -1$, y dejaremos los otros como ejercicios. En este caso, $hL < -1$, hay un autovalor negativo (con autofunción correspondiente $\sinh \sqrt{s_1}x$) y una cantidad infinita de autovalores positivos (con autofunciones correspondientes $\sin \sqrt{\lambda}x$). Necesitaremos analizar cuidadosamente los autovalores positivos y por eso reproducimos la Figura 5.8.2(c) (como Figura 5.8.4), que ya usamos para la determinación gráfica de los autovalores en el caso $hL < -1$. Denotamos las intersecciones comenzando con λ_2 , ya que el autovalor más pequeño es negativo, $\lambda_1 = -s_1$. Podemos obtener gráficamente algunas acotaciones para estos autovalores:

$$\pi < \sqrt{\lambda_2}L < \frac{3\pi}{2}, \quad (5.8.35)$$

$$2\pi < \sqrt{\lambda_3}L < \frac{5\pi}{2}, \quad (5.8.36)$$

que podemos generalizar a

$$(n-1)\pi < \sqrt{\lambda_n}L < (n-1/2)\pi, \quad n \geq 2. \quad (5.8.37)$$

Estudiemos los ceros de las autofunciones. La autofunción correspondiente al autovalor mínimo es $\sinh \sqrt{s_1}x$. Como la función seno hiperbólico nunca se anula (excepto en el extremo $x=0$), hemos comprobado ya una parte del resultado mencionado: la autofunción correspondiente al autovalor mínimo no tiene ceros en el interior del intervalo. Las otras autofunciones son $\sin \sqrt{\lambda_n}x$ y están dibujadas en la Figura 5.8.5. En esta figura está marcado claramente el extremo $x=0$, pero el extremo $x=L$ depende de λ . Por ejemplo, para λ_3 , el extremo $x=L$ corresponde a $\sqrt{\lambda_3}L$, tal como se muestra en la Figura 5.8.5, donde se ilustra también la acotación (5.8.36). Como x varía desde 0 hasta L , la autofunción consiste en la curva dibujada en la Figura 5.8.5 hasta la línea de puntos. Esta autofunción tiene dos ceros ($\sqrt{\lambda_3}x = \pi$ y 2π). Este razonamiento se puede usar para cualquiera de las autofunciones. Por tanto, el número de ceros de la n -ésima autofunción, correspondiente a λ_n , es $n-1$, exactamente como especifica el resultado general. Conviene resaltar que este resultado *no establece* que la autofunción correspondiente al mínimo autovalor *positivo* no tenga ceros, sino que es **la autofunción correspondiente al autovalor mínimo** la que **no tiene ceros**. En este ejemplo, el autovalor mínimo es negativo y *su* autofunción correspondiente no tiene ceros.

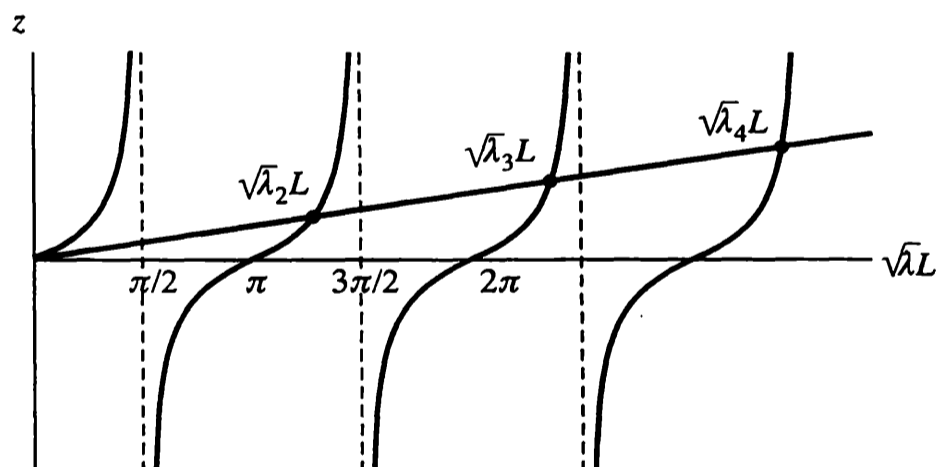


Figura 5.8.4: Autovalores positivos ($hL < -1$).

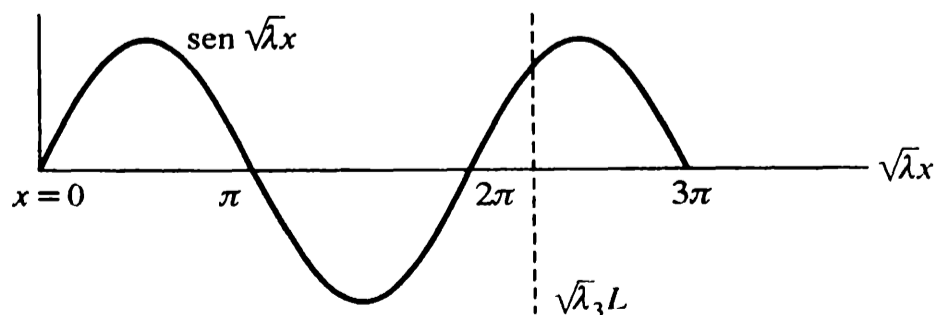


Figura 5.8.5: Ceros de las autofunciones $\sin \sqrt{\lambda}x$.

Flujo de calor con condición de contorno no física. Para entender mejor la condición de contorno de tercera clase, completemos el estudio de un ejemplo.

Consideremos el flujo de calor en una varilla uniforme:

EDP :	$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	(5.8.38)
CC1 :	$u(0, t) = 0$	
CC2 :	$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -hu(L, t)$	
CI :	$u(x, 0) = f(x)$	

Esto es, suponemos que la temperatura es cero en $x = 0$ y que estamos considerando el caso “no físico” ($h < 0$) de la condición de contorno de tercera clase en $x = L$. La energía térmica fluye hacia dentro de la varilla en $x = L$ [si $u(L, t) > 0$].

Si separamos variables,

$$u(x, t) = \phi(x)G(t), \quad (5.8.39)$$

obtenemos

$$\frac{dG}{dt} = -\lambda k G \quad (5.8.40)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi = 0 \quad (5.8.41)$$

$$\phi(0) = 0 \quad (5.8.42)$$

$$\frac{d\phi}{dx}(L) + h\phi(L) = 0 \quad (5.8.43)$$

La parte dependiente del tiempo es una exponencial, $G = ce^{-\lambda kt}$. Sólo consideraremos aquí el caso en que

$$hL < -1.$$

Como sabemos, existe un autovalor negativo $\lambda_1 = -s_1$, cuya autofunción correspondiente es $\sinh \sqrt{s_1} x$, donde s_1 es la única solución de la ecuación $\tanh \sqrt{s} L =$

$-\sqrt{s}/h$. La correspondiente parte temporal crece exponencialmente. Todos los otros autovalores λ_n son positivos. Para ellos las autofunciones son $\sin \sqrt{\lambda}x$ (donde recordemos que $\tan \sqrt{\lambda}x = -\sqrt{\lambda}/h$ tiene una cantidad infinita de soluciones), mientras que la correspondiente parte dependiente del tiempo decrece exponencialmente, siendo proporcional a $e^{-\lambda kt}$. Las soluciones producto son de la forma $\sin \sqrt{\lambda}x e^{-\lambda kt}$ y $\sinh \sqrt{s_1}x e^{s_1 kt}$. Conviene utilizar la siguiente notación algo "abstracta": las soluciones producto son $\phi_n(x)e^{-\lambda_n kt}$, donde las autofunciones son

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sinh \sqrt{s_1}x & n = 1, \\ \sin \sqrt{\lambda_n}x & n > 1. \end{cases}$$

Utilizando el principio de superposición, consideramos una combinación lineal de *todas* las posibles soluciones producto:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) e^{-\lambda_n kt}.$$

La condición inicial, $u(x, 0) = f(x)$, implica que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

Como tenemos $\sigma(x) = 1$ en (5.8.41), las autofunciones $\phi_n(x)$ son ortogonales con peso 1. Por tanto, sabemos que los coeficientes de Fourier generalizados de la condición inicial son:

$$a_n = \frac{\int_0^L f(x) \phi_n(x) dx}{\int_0^L \phi_n^2 dx} = \begin{cases} \left(\int_0^L f(x) \sinh \sqrt{s_1}x dx \right) \left(\int_0^L \sinh^2 \sqrt{s_1}x dx \right)^{-1}, & n = 1, \\ \left(\int_0^L f(x) \sin \sqrt{\lambda_n}x dx \right) \left(\int_0^L \sin^2 \sqrt{\lambda_n}x dx \right)^{-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

En particular, podríamos demostrar que $\int_0^L \sin^2 \sqrt{\lambda_n}x dx \neq L/2$. Quizá debiéramos enfatizar un hecho adicional. Hemos usado el resultado que establece que las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales y en nuestro caso está garantizado que

$$\int_0^L \sin \sqrt{\lambda_n}x \sin \sqrt{\lambda_m}x dx = 0, \quad \text{si } n \neq m, \quad n, m \geq 2,$$

y que

$$\int_0^L \sin \sqrt{\lambda_n}x \sinh \sqrt{s_1}x dx = 0, \quad \text{si } n \geq 2.$$

No necesitamos comprobarlo mediante integración (aunque se puede hacer).

En los ejercicios aparecen otros problemas con condiciones de contorno de tercera clase.

EJERCICIOS 5.8

5.8.1. Considérese la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con las condiciones $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -hu(L, t)$ y $u(x, 0) = f(x)$.

(a) Resolverla si $hL > -1$.

(b) Resolverla si $hL = -1$.

5.8.2. Considérese el problema de autovalores (5.8.8) - (5.8.10). Demostrar que la n -ésima autofunción tiene $n - 1$ ceros en el interior del intervalo en los casos siguientes:

(a) $h > 0$,

(b) $h = 0$,

* (c) $-1 < hL < 0$,

(d) $hL = -1$.

5.8.3. Considérese el problema de autovalores

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi = 0,$$

sujeto a $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(L) + h\phi(L) = 0$, con $h > 0$.

(a) Probar que $\lambda > 0$ (sin resolver la ecuación diferencial).

* (b) Obtener gráficamente todos los autovalores. Obtener cotas superiores e inferiores de los mismos. Dar una estimación para los autovalores grandes.

(c) Demostrar que la n -ésima autofunción tiene $n - 1$ ceros en el interior del intervalo.

5.8.4. Rehacer los apartados (b) y (c) del Ejercicio 5.8.3, para el caso $h < 0$.

5.8.5. Considérese la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -hu(L, t)$ y $u(x, 0) = f(x)$.

(a) Resolverla si $h > 0$.

(b) Resolverla si $h < 0$.

5.8.6. Considérese el problema (con $h > 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x).$$

- (a) Demostrar que hay una cantidad infinita de frecuencias de oscilación distintas.
- (b) Estimar las frecuencias de oscilación grandes.
- (c) Resolver el problema de valores iniciales.

***5.8.7.** Considérese el problema de autovalores:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0, \quad \text{con } \phi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \phi(\pi) - 2\frac{d\phi}{dx}(0) = 0.$$

- (a) Demostrar que en general

$$\int_0^\pi \left(u \frac{d^2v}{dx^2} - v \frac{d^2u}{dx^2} \right) dx \neq 0,$$

para dos funciones cualesquiera u y v que cumplan estas condiciones de contorno homogéneas.

- (b) Obtener todos los autovalores positivos.
- (c) Obtener todos los autovalores negativos.
- (d) ¿Es $\lambda = 0$ un autovalor?
- (e) ¿Es posible que haya más autovalores que los encontrados en los apartados (b) a (d)? Explicarlo *brevemente*.

5.8.8. Considérese el problema de contorno

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0, \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \phi(0) - \frac{d\phi}{dx}(0) &= 0, \\ \phi(1) + \frac{d\phi}{dx}(1) &= 0. \end{aligned}$$

- (a) Demostrar, utilizando el cociente de Rayleigh, que $\lambda \geq 0$. ¿Por qué es $\lambda > 0$?
- (b) Probar que las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.
- ***(c) Demostrar que

$$\tan \sqrt{\lambda} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}.$$

Determinar los autovalores gráficamente y estimar los autovalores grandes.

- (d) Resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

con las condiciones

$$\begin{aligned}u(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \\u(1, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) &= 0, \\u(x, 0) &= f(x).\end{aligned}$$

Supóngase que las autofunciones $\phi_n(x)$ son conocidas.

5.8.9. Considérese el problema de autovalores

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0, \quad \text{con } \phi(0) = \frac{d\phi}{dx}(0) \text{ y } \phi(1) = \beta \frac{d\phi}{dx}(1).$$

¿Para qué valores de β (si es que hay alguno) es $\lambda = 0$ un autovalor?

5.8.10. Considérese el caso especial del problema de autovalores de la Sección 5.8:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0, \quad \text{con } \phi(0) = 0 \text{ y } \frac{d\phi}{dx}(1) + \phi(1) = 0.$$

- *(a) Determinar el autovalor mínimo con al menos dos o tres cifras significativas usando las tablas o una calculadora.
- *(b) Determinar el autovalor mínimo usando un algoritmo para calcular raíces (por ejemplo, el método de Newton) en un ordenador.
- (c) Comparar los resultados obtenidos en los apartados (a) y (b) con la cota que resulta de utilizar el cociente de Rayleigh [véase el Ejercicio 5.6.1(c)].

5.8.11. Determinar todos los autovalores negativos del problema:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + 5\phi = -\lambda\phi, \quad \text{con } \phi(0) = 0 \text{ y } \phi(\pi) = 0.$$

5.8.12. Considérese la ecuación $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \partial^2 u / \partial x^2$ con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}u &= 0, & \text{en } x &= 0, \\m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -T_0 \frac{\partial u}{\partial x} - ku, & \text{en } x &= L.\end{aligned}$$

- (a) Dar una breve interpretación física de las condiciones de contorno.
- (b) Mostrar cómo calcular las frecuencias de oscilación. Estimar las frecuencias de oscilación grandes.
- (c) Sin utilizar el cociente de Rayleigh, calcular explícitamente si existe alguna solución separada que no oscile en el tiempo. *Indicación:* no hay ninguna.

- (d) Demostrar que la condición de contorno *no* es autoadjunta, es decir, demostrar que

$$\int_0^L \left(u_n \frac{d^2 u_m}{dx^2} - u_m \frac{d^2 u_n}{dx^2} \right) dx \neq 0,$$

incluso cuando u_n y u_m son autofunciones correspondientes a autovalores distintos.

***5.8.13.** Simplificar $\int_0^L \sin^2 \sqrt{\lambda} x \, dx$ cuando λ está dado por (5.8.15).

5.9. Autovalores grandes (comportamiento asintótico)

En el caso de coeficientes variables, los autovalores de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville,

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\phi}{dx} \right] + [\lambda\sigma(x) + q(x)]\phi = 0, \quad (5.9.1)$$

deben ser calculados usualmente de forma numérica. Sabemos que habrá una cantidad infinita de ellos y que no existe autovalor máximo, por lo que existe una cantidad infinita de autovalores grandes. En esta sección enunciaremos y explicaremos cómo obtener aproximaciones razonablemente buenas de estos autovalores y de sus correspondientes autofunciones. Por tanto, las soluciones numéricas serán necesarias solamente para los primeros pocos autovalores y autofunciones.

Sería demasiado largo hacer una deducción cuidadosa con explicaciones detalladas del método asintótico. No obstante, presentaremos alguna motivación del resultado que obtendremos. Comencemos intentando aproximar las soluciones de la ecuación diferencial (5.9.1) si el autovalor desconocido λ es grande ($\lambda \gg 1$). Es útil interpretar (5.9.1) como un sistema masa-resorte (x el tiempo y ϕ la posición) con parámetros que varían con el tiempo. La Ecuación (5.9.1) contiene una fuerza de recuperación grande $[-\lambda\sigma(x)\phi]$, de modo que esperamos que la solución tenga una rápida oscilación en la variable x . De forma alternativa, sabemos que las autofunciones correspondientes a autovalores grandes tienen muchos ceros. Como la solución oscila rápidamente, en unos cuantos periodos (cada uno de ellos pequeño) los coeficientes son aproximadamente constantes, y cerca de cualquier punto x_0 la ecuación diferencial se puede aproximar de forma burda por otra con coeficientes constantes,

$$p(x_0) \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda\sigma(x_0)\phi \approx 0, \quad (5.9.2)$$

ya que, además, $\lambda\sigma(x) \gg q(x)$. De acuerdo con (5.9.2), esperamos que la solución oscile “localmente” con frecuencia espacial

$$\text{frecuencia} = \sqrt{\frac{\lambda\sigma(x_0)}{p(x_0)}}. \quad (5.9.3)$$

Esta frecuencia es grande, $\lambda \gg 1$ y, por tanto, como suponíamos, el periodo es pequeño. La frecuencia (y por tanto el periodo) depende de x , pero varía lentamente, es decir, en unos cuantos periodos (lo que supone una distancia pequeña) el periodo apenas cambia. Sólo tras muchos periodos la frecuencia puede cambiar de forma apreciable. En la Figura 5.9.1 se esboza la lenta variación del periodo.

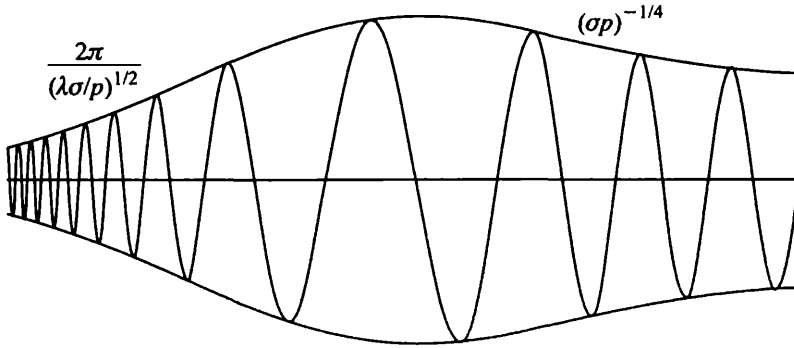


Figura 5.9.1: Solución asintótica de Liouville-Green de una ecuación diferencial mostrando oscilaciones rápidas (o, equivalentemente, amplitud que varía de forma relativamente lenta).

Por la Ecuación (5.9.2) podríamos pensar que la amplitud de oscilación fuera constante. Sin embargo, (5.9.2) es sólo una aproximación, pero aún así deberíamos esperar que la amplitud fuera aproximadamente constante en cada periodo. Por ello, tanto la amplitud como la frecuencia varían lentamente en la expresión

$$\phi(x) = A(x) \cos \psi(x), \tag{5.9.4}$$

donde podemos utilizar también las funciones seno. La fórmula asintótica apropiada para la fase $\psi(x)$ se puede obtener usando las ideas que hemos mencionado. Como el periodo es pequeño, sólo son necesarios los valores de x cercanos a un cierto x_0 para entender la oscilación que implica (5.9.4). Usando la serie de Taylor de $\psi(x)$, obtenemos

$$\phi(x) = A(x) \cos[\psi(x_0) + (x - x_0)\psi'(x_0) + \dots]. \tag{5.9.5}$$

Esta oscilación tiene frecuencia local $\psi'(x_0)$, de donde se deduce que **la derivada de la fase es la frecuencia local**. Como la aproximación (5.9.2) implica que la frecuencia local debería ser $[\lambda\sigma(x_0)/p(x_0)]^{1/2}$, esperamos que se verifique

$$\psi'(x_0) = \lambda^{1/2} \left[\frac{\sigma(x_0)}{p(x_0)} \right]^{1/2}. \tag{5.9.6}$$

Este razonamiento nos lleva a determinar la fase de manera exacta:

$$\psi(x) = \lambda^{1/2} \int^x \left[\frac{\sigma(x_0)}{p(x_0)} \right]^{1/2} dx_0. \tag{5.9.7}$$

Observemos que la fase no es igual a la frecuencia multiplicada por x (a menos que la frecuencia sea constante).

Existen técnicas asintóticas precisas⁶ más allá de las incluidas en este texto que determinan la amplitud de variación lenta. Es sabido que se pueden aproximar con gran exactitud dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial (si λ es grande) mediante la expresión

$$\phi(x) \approx (\sigma p)^{-1/4} \exp \left[\pm i \lambda^{1/2} \int^x \left(\frac{\sigma}{p} \right)^{1/2} dx_0 \right], \quad (5.9.8)$$

donde se pueden utilizar, en lugar de la exponencial, funciones seno y coseno. En la Figura 5.9.1 se representan de forma aproximada estas soluciones (usando senos y cosenos). La solución oscila rápidamente y la **envolvente** de la onda es la función de variación lenta $(\sigma p)^{-1/4}$, lo que indica la variación relativamente lenta de la amplitud. La frecuencia local es $(\lambda \sigma / p)^{1/2}$, que corresponde al periodo $2\pi / (\lambda \sigma / p)^{1/2}$.

Para determinar los autovalores grandes, debemos aplicar las condiciones de contorno a la solución general (5.9.8). Por ejemplo, si $\phi(0) = 0$, entonces:

$$\phi(x) = (\sigma p)^{-1/4} \operatorname{sen} \left(\lambda^{1/2} \int_0^x \left(\frac{\sigma}{p} \right)^{1/2} dx_0 \right) + \dots \quad (5.9.9)$$

La segunda condición de contorno, por ejemplo $\phi(L) = 0$, determina los autovalores:

$$0 = \operatorname{sen} \left(\lambda^{1/2} \int_0^L \left(\frac{\sigma}{p} \right)^{1/2} dx_0 \right) + \dots$$

De esta manera, obtenemos la fórmula asintótica para los autovalores grandes,

$$\lambda^{1/2} \int_0^L (\sigma/p)^{1/2} dx_0 \approx n\pi,$$

o de forma equivalente,

$$\lambda \sim \frac{(n\pi)^2}{\left(\int_0^L (\sigma/p)^{1/2} dx_0 \right)^2}, \quad (5.9.10)$$

válida para n grande. A menudo esta fórmula es razonablemente precisa incluso cuando n no es muy grande. Las autofunciones están dadas de forma aproximada por las Fórmulas (5.9.9) y (5.9.10). Notemos que en estas fórmulas asintóticas no aparece el término $q(x)$, y por tanto $q(x)$ no afecta al autovalor de forma *significativa*. Sin embargo, existen fórmulas más precisas que sí tienen en cuenta la influencia de $q(x)$.

⁶Estos resultados se pueden obtener de varias formas, como el método W.K.B.(J.) (que debería llamarse método de Liouville-Green) o el método de escalas múltiples. Las referencias para estas técnicas incluyen los libros de Bender y Orszag [1978], Kevorkian y Cole [1996], Nayfeh [1973] y Olver [1974].

Ejemplo. Consideremos el problema de autovalores

$$\begin{aligned}\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda(1+x)\phi &= 0, \\ \phi(0) &= 0, \\ \phi(1) &= 0,\end{aligned}$$

en el que $p(x) = 1$, $\sigma(x) = 1 + x$, $q(x) = 0$ y $L = 1$. Nuestra fórmula asintótica (5.9.10) para los autovalores es entonces,

$$\lambda \sim \frac{(n\pi)^2}{\left(\int_0^L (1+x_0)^{1/2} dx_0\right)^2} = \frac{n^2\pi^2}{\left[\frac{2}{3}(1+x_0)^{3/2}\Big|_0^1\right]^2} = \frac{9n^2\pi^2}{4(2^{3/2}-1)^2}. \quad (5.9.11)$$

En la Tabla 5.9.1 se comparan los resultados numéricos (obtenidos con un ordenador mediante un esquema numérico bastante aproximado) con la fórmula asintótica. La Ecuación (5.9.11) es incluso una aproximación razonable si $n = 1$. El porcentaje de error o error relativo de la fórmula asintótica, mejora cuando n crece. Sin embargo, el error absoluto se mantiene aproximadamente constante (aunque es pequeño), lo que se puede explicar utilizando ciertas mejoras de la Fórmula (5.9.10).

Tabla 5.9.1: Autovalores λ_n

n	Resultado numérico* (tomado como exacto)	Fórmula asintótica (5.9.11)	Error
1	6.548395	6.642429	0.094034
2	26.464937	26.569718	0.104781
3	59.674174	59.781865	0.107691
4	106.170023	106.278872	0.108849
5	165.951321	166.060737	0.109416
6	239.0177275	239.1274615	0.109734
7	325.369115	325.479045	0.109930

*Cortesía de E. C. Gartland, Jr.

EJERCICIOS 5.9

5.9.1. Estimar los autovalores grandes y sus correspondientes autofunciones para

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\phi}{dx} \right) + [\lambda\sigma(x) + q(x)]\phi = 0,$$

si las condiciones de contorno son:

(a) $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(L) = 0$.

$$*(b) \quad \phi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\phi}{dx}(L) = 0.$$

$$(c) \quad \phi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\phi}{dx}(L) + h\phi(L) = 0.$$

5.9.2. Considérese la ecuación

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda(1+x)\phi = 0,$$

con las condiciones $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 0$. Dibujar aproximadamente las autofunciones para λ grande, teniendo en cuenta las variaciones de la amplitud y del periodo.

5.9.3. Considérese, para $\lambda \gg 1$, la ecuación

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + [\lambda\sigma(x) + q(x)]\phi = 0.$$

*(a) Sustituir la autofunción

$$\phi = A(x) \exp \left[i\lambda^{1/2} \int_0^x \sigma^{1/2}(x_0) dx_0 \right],$$

y obtener una ecuación diferencial para $A(x)$.

(b) Definiendo $A(x) = A_0(x) + \lambda^{-1/2}A_1(x) + \dots$, calcular $A_0(x)$ y $A_1(x)$. Comprobar la validez de la Fórmula (5.9.8).

(c) Supóngase que $\phi(0) = 0$. Utilizar $A_1(x)$ para mejorar la expresión (5.9.9).

(d) Utilizar el apartado (c) para mejorar (5.9.10), si $\phi(L) = 0$.

*(e) Obtener una fórmula de recurrencia para $A_n(x)$.

5.10. Propiedades de aproximación

En muchos problemas prácticos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales por separación de variables, es realmente imposible trabajar con una cantidad infinita de términos de una serie. Es más usual utilizar una cantidad finita de términos⁷. En esta sección discutiremos brevemente cuándo es razonable tener en cuenta sólo una cantidad finita de términos de una serie de Fourier generalizada.

Sabemos que cualquier función $f(x)$ suave a trozos se puede representar por medio de una serie de Fourier generalizada de las autofunciones,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x). \quad (5.10.1)$$

⁷A menudo, para obtener resultados numéricos en problemas en derivadas parciales se utilizan métodos numéricos directos.

Gracias a la ortogonalidad de las autofunciones [con peso $\sigma(x)$], los coeficientes de Fourier generalizados se pueden calcular fácilmente:

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\sigma(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2\sigma dx}. \quad (5.10.2)$$

Supongamos, sin embargo, que sólo podemos usar las primeras M autofunciones para aproximar una función $f(x)$,

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^M \alpha_n \phi_n(x). \quad (5.10.3)$$

¿Cómo deberían ser los coeficientes α_n ? Si utilizamos una cantidad finita de términos, quizá exista una forma de aproximar $f(x)$ que mejore el resultado de utilizar los coeficientes de Fourier generalizados (5.10.2). Elegiremos estos nuevos coeficientes α_n , de tal forma que $\sum_{n=1}^M \alpha_n \phi_n(x)$ sea la “mejor” aproximación de $f(x)$. Hay muchas maneras de definir esta mejor aproximación, pero demostraremos que una de ellas es particularmente útil. En general, los coeficientes α_n dependerán de M . Por ejemplo, supongamos que elegimos $M = 10$ y calculamos $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ para que (5.10.3) sea la mejor aproximación en algún sentido. Tras este cálculo podemos decidir que la aproximación dada por (5.10.3) no es lo suficientemente buena y, por ello, querer incluir más términos, por ejemplo tomando $M = 11$. Tendríamos entonces que calcular de nuevo todos los once coeficientes que hicieran de (5.10.3) la mejor aproximación con $M = 11$. Demostraremos que existe una manera de definir la mejor aproximación, de tal forma que los coeficientes α_n *no dependan* de M ; esto es, tal que al cambiar de $M = 10$ a $M = 11$ sólo necesitemos calcular un coeficiente más, α_{11} .

Desviación cuadrática media. Definiremos la mejor aproximación como la que tiene el menor error. Sin embargo, el error se puede definir de muchas formas distintas. Como la diferencia entre $f(x)$ y su aproximación $\sum_{n=1}^M \alpha_n \phi_n(x)$ depende de x , puede ocurrir que $f(x) - \sum_{n=1}^M \alpha_n \phi_n(x)$ sea positiva en algunas regiones y negativa en otras. Una posible medida del error es el máximo de la diferencia sobre todo el intervalo: $\max |f(x) - \sum_{n=1}^M \alpha_n \phi_n(x)|$. Ésta es una definición razonable del error, pero se usa pocas veces, porque es muy difícil elegir los coeficiente α_n que minimicen esta desviación máxima. En su lugar, definimos habitualmente el **error** como la **desviación cuadrática media**,

$$E \equiv \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=1}^M \alpha_n \phi_n(x) \right]^2 \sigma(x) dx. \quad (5.10.4)$$

En esta definición del error se penalizan mucho las desviaciones grandes, aunque sean en un intervalo pequeño. Hemos introducido un peso en nuestra definición

del error porque demostraremos que es fácil minimizar este error eligiéndolo de manera adecuada. De hecho, el peso introducido es la función $\sigma(x)$ que aparece en la ecuación diferencial que define las autofunciones $\phi_n(x)$, y que por tanto coincide con el peso necesario para la ortogonalidad de las autofunciones.

El error definido por (5.10.4) es una función de los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$. Para minimizar esta función de M variables imponemos la condición de que se anule su gradiente y, por tanto, tenemos,

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Calculemos cada derivada parcial e igualémosla a cero,

$$0 = \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = -2 \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=1}^M \alpha_n \phi_n(x) \right] \phi_i(x) \sigma(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (5.10.5)$$

utilizando la expresión $(\partial/\partial \alpha_i)(\sum_{n=1}^M \alpha_n \phi_n(x)) = \phi_i(x)$. Éste es un sistema de M ecuaciones con M incógnitas, que sería bastante difícil de resolver si no fuera por el hecho de que las autofunciones son ortogonales con respecto al mismo peso $\sigma(x)$ que aparece en (5.10.5). Tenemos, por tanto, que el sistema se reduce a

$$\int_a^b f(x) \phi_i(x) \sigma(x) dx = \alpha_i \int_a^b \phi_i^2(x) \sigma(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

de donde es inmediato despejar α_i . De hecho se tiene $\alpha_i = a_i$ [véase (5.10.2)]. Así pues, todas las primeras derivadas parciales son cero si los coeficientes son los coeficientes de Fourier generalizados. Todavía tenemos que probar que esta solución realmente minimiza el error (es decir, que no es simplemente un punto crítico local donde todas las primeras derivadas parciales se anulan). Demostraremos, de hecho, que **la mejor aproximación (en el sentido de la media cuadrática utilizando las primeras M autofunciones) es aquella en la que los coeficientes elegidos son los coeficientes de Fourier generalizados**. De esta forma obtenemos dos propiedades interesantes: los coeficientes son fáciles de calcular y son independientes de M .

Demostración. Para probar que el error E alcanza realmente un mínimo, no usaremos derivadas parciales, sino que nuestra deducción se basará en el desarrollo de la desviación cuadrática (5.10.4):

$$E = \int_a^b \left(f^2 - 2 \sum_{n=1}^M \alpha_n f \phi_n + \sum_{n=1}^M \sum_{l=1}^M \alpha_n \alpha_l \phi_n \phi_l \right) \sigma dx. \quad (5.10.6)$$

Utilizando de nuevo la ortogonalidad de las autofunciones, tenemos:

$$E = \int_a^b \left(f^2 - 2 \sum_{n=1}^M \alpha_n f \phi_n + \sum_{n=1}^M \alpha_n^2 \phi_n^2 \right) \sigma dx. \quad (5.10.7)$$

Esta última expresión se puede escribir como

$$E = \sum_{n=1}^M \left[\alpha_n^2 \int_a^b \phi_n^2 \sigma \, dx - 2\alpha_n \int_a^b f \phi_n \sigma \, dx \right] + \int_a^b f^2 \sigma \, dx, \tag{5.10.8}$$

donde, como los coeficientes α_n aparecen elevados al cuadrado, procedemos completando cuadrados,

$$E = \sum_{n=1}^M \left[\left(\alpha_n - \frac{\int_a^b f \phi_n \sigma \, dx}{\int_a^b \phi_n^2 \sigma \, dx} \right)^2 \int_a^b \phi_n^2 \sigma \, dx - \frac{\left(\int_a^b f \phi_n \sigma \, dx \right)^2}{\int_a^b \phi_n^2 \sigma \, dx} \right] + \int_a^b f^2 \sigma \, dx. \tag{5.10.9}$$

Es fácil ver que el mínimo se alcanzará sólo si el primer término de cada sumando se anula, lo que determina los mejores coeficientes,

$$\alpha_n = \frac{\int_a^b f \phi_n \sigma \, dx}{\int_a^b \phi_n^2 \sigma \, dx}. \tag{5.10.10}$$

Este resultado es el mismo que el obtenido utilizando el argumento más sencillo de las derivadas.

Error. De esta forma, (5.10.9) junto con (5.10.10) demuestran que el error mínimo es

$$E = \int_a^b f^2 \sigma \, dx - \sum_{n=1}^M \alpha_n^2 \int_a^b \phi_n^2 \sigma \, dx. \tag{5.10.11}$$

Esta ecuación muestra que cuando M crece, el error decrece. Por tanto, podemos pensar en la serie de Fourier generalizada como una forma de aproximación. **Cuanto más términos haya en la serie truncada, mejor será la aproximación.**

Ejemplo. Para una serie de Fourier de senos, donde $\sigma(x) = 1$, $\phi_n(x) = \text{sen } n\pi x/L$ y $\int_0^L \text{sen}^2 n\pi x/L \, dx = L/2$, el error es

$$E = \int_0^L f^2 \, dx - \frac{L}{2} \sum_{n=1}^M \alpha_n^2. \tag{5.10.12}$$

Desigualdad de Bessel e identidad de Parseval. Como $E \geq 0$ [véase (5.10.4)], de (5.10.11) se obtiene que

$$\int_a^b f^2 \sigma \, dx \geq \sum_{n=1}^M \alpha_n^2 \int_a^b \phi_n^2 \sigma \, dx, \tag{5.10.13}$$

fórmula conocida como **desigualdad de Bessel**. Más importante aún, para cualquier problema de autovalores de Sturm-Liouville, el desarrollo en autofunciones de una función $f(x)$ converge en media a $f(x)$, lo que quiere decir [véase (5.10.4)],

$$\lim_{M \rightarrow \infty} E = 0;$$

es decir, la desviación cuadrática media tiende a cero cuando $M \rightarrow \infty$, lo que demuestra la **identidad de Parseval**:

$$\int_a^b f^2 \sigma \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \int_a^b \phi_n^2 \sigma \, dx, \quad (5.10.14)$$

que es una generalización del teorema de Pitágoras. Recordemos que este teorema afirma que para un triángulo *rectángulo*, se verifica la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$, donde c es la longitud de la hipotenusa, y a y b las de los catetos. En forma vectorial, si $\mathbf{v} = a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}}$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 = a^2 + b^2$. Aquí a y b son las componentes de \mathbf{v} en una base *ortogonal* de vectores *unitarios*. En nuestro contexto, representamos la función $f(x)$ en términos de nuestras autofunciones ortogonales,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

Si utilizamos autofunciones de longitud *uno*, entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n l \phi_n(x)}{l},$$

donde l es la longitud de $\phi_n(x)$, es decir:

$$l^2 = \int_a^b \phi_n^2 \sigma \, dx.$$

La identidad de Parseval establece que la longitud de f al cuadrado, $\int_a^b f^2 \sigma \, dx$, es igual a la suma de los cuadrados de las componentes de f (utilizando una base ortogonal de funciones de longitud uno), $(a_n l)^2 = a_n^2 \int_a^b \phi_n^2 \sigma \, dx$.

EJERCICIOS 5.10

- 5.10.1.** Considérese la serie de Fourier de senos de $f(x) = 1$ en el intervalo $0 \leq x \leq L$. ¿Cuántos términos de la serie se deben tomar para que el error cuadrático medio sea el 1% de $\int_0^L f^2 \sigma \, dx$?
- 5.10.2.** Aplicar la identidad de Parseval, en el intervalo $0 \leq x \leq L$, para los siguientes casos y obtener así la suma de ciertas series:

(a) La serie de Fourier de senos de $f(x) = 1$.

* (b) La serie de Fourier de cosenos de $f(x) = x$.

(c) La serie de Fourier de senos de $f(x) = x$.

5.10.3. Considérese una función cualquiera $f(x)$, definida para $a \leq x \leq b$. Aproximar esta función por una constante. Demostrar que la mejor constante (en el sentido de que minimiza la desviación cuadrática media) es la media de $f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$.

5.10.4. (a) Utilizando la identidad de Parseval, expresar el error en términos de la cola de una serie.

(b) Rehacer el apartado (a) para una serie de Fourier de senos en el intervalo $0 \leq x \leq L$.

(c) Si $f(x)$ es suave a trozos, estimar la cola de la serie del apartado (b).

Indicación: utilizar la integración por partes.

5.10.5. Demostrar que si

$$L(f) = \frac{d}{dx} \left(p \frac{df}{dx} \right) + qf,$$

entonces,

$$-\int_a^b f L(f) dx = -pf \frac{df}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b \left[p \left(\frac{df}{dx} \right)^2 - qf^2 \right] dx,$$

si f y df/dx son continuas.

5.10.6. Suponiendo que se pueden intercambiar las operaciones de suma e integración, demostrar que si

$$f = \sum \alpha_n \phi_n \quad \text{y} \quad g = \sum \beta_n \phi_n,$$

entonces, si las autofunciones están normalizadas, se tiene,

$$\int_a^b fg dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n,$$

lo que constituye una generalización de la identidad de Parseval.

5.10.7. Utilizando los Ejercicios 5.10.5 y 5.10.6, probar la fórmula siguiente:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n^2 = -pf \frac{df}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b \left[p \left(\frac{df}{dx} \right)^2 - qf^2 \right] dx. \quad (5.10.15)$$

Indicación: definir $g = L(f)$, suponiendo que está justificada la diferenciación término a término.

5.10.8. De acuerdo con la desigualdad de Schwarz (probada en el Ejercicio 2.3.10), el valor absoluto del *error puntual* cumple:

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^M \alpha_n \phi_n \right| = \left| \sum_{n=M+1}^{\infty} \alpha_n \phi_n \right| \leq \left\{ \sum_{n=M+1}^{\infty} |\lambda_n| \alpha_n^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{\phi_n^2}{|\lambda_n|} \right\}^{1/2}. \quad (5.10.16)$$

Más aún, en el Capítulo 8 se introduce una función de Green $G(x, x_0)$, que se demuestra que cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2}{\lambda_n} = -G(x, x). \quad (5.10.17)$$

Utilizando (5.10.15), (5.10.16) y (5.10.17), obtener una cota superior para el error puntual en los casos en que la serie de Fourier generalizada converge puntualmente. Se pueden encontrar más ejemplos y una discusión más detallada de estas propiedades en el libro de Weinberger [1965].

Capítulo 6

Discusión elemental de los métodos numéricos de diferencias finitas

6.1. Introducción

Las ecuaciones en derivadas parciales se suelen clasificar en grupos que engloban ecuaciones con propiedades matemáticas y físicas cualitativamente similares. Hasta ahora hemos estudiado los prototipos más sencillos de ecuaciones. La ecuación del calor ($\partial u/\partial t = k\partial^2 u/\partial x^2$) es un ejemplo de una ecuación en derivadas parciales **parabólica**; sus soluciones usualmente decaen exponencialmente con el tiempo y se aproximan a una solución de equilibrio, y la información y discontinuidades se propagan a velocidad infinita. La ecuación de ondas ($\partial^2 u/\partial t^2 = c^2\partial^2 u/\partial x^2$) tipifica las ecuaciones en derivadas parciales **hiperbólicas**; en ellas, existen modos de vibración y la información se propaga a velocidad finita, con lo que las discontinuidades se mantienen. La ecuación de Laplace ($\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$) es un ejemplo de ecuación en derivadas parciales **elíptica**; en ese tipo de ecuaciones las soluciones suelen cumplir ciertos principios del máximo. La terminología *parabólica*, *hiperbólica* y *elíptica* proviene de las propiedades de transformación de las secciones cónicas (véase, por ejemplo, Weinberger [1965]).

En los capítulos previos hemos estudiado varios métodos para obtener soluciones explícitas de algunas ecuaciones en derivadas parciales de interés físico. Excepto para la ecuación de ondas unidimensional, las soluciones tenían expresiones bastante complicadas, involucrando series o alguna representación integral. En muchas situaciones comunes, se necesitan detallados cálculos numéricos de las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales. Nuestros análisis previos sugieren métodos computacionales (por ejemplo, los cien primeros términos de una serie de Fourier). Sin embargo, usualmente hay métodos más eficientes para obtener resultados numéricos, especialmente si se va a utilizar un ordenador. En este capítulo desarrollaremos métodos de diferencias finitas para aproximar numéricamente soluciones de distin-

tos tipos de ecuaciones en derivadas parciales (parabólicas, hiperbólicas y elípticas). Describiremos solamente casos sencillos, las ecuaciones del calor, de ondas y la de Laplace, pero los algoritmos para resolver problemas más complicados (incluyendo problemas no lineales) quedarán claros.

6.2. Diferencias finitas y series de Fourier truncadas

Aproximaciones polinómicas. La técnica fundamental para los cálculos numéricos en diferencias finitas se basa en las aproximaciones polinómicas a $f(x)$ cerca de $x = x_0$. Sea $x = x_0 + \Delta x$, es decir, $\Delta x = x - x_0$. Si aproximáramos $f(x)$ por una constante cerca de $x = x_0$, elegiríamos $f(x_0)$ como tal constante. Una aproximación mejor a $f(x)$ se obtiene mediante su recta tangente en $x = x_0$ (véase la Figura 6.2.1):

$$f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} \frac{df}{dx}(x_0), \quad (6.2.1)$$

una aproximación lineal (un polinomio de primer grado). Podemos también considerar una aproximación cuadrática a $f(x)$, $f(x) \approx f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0)/2!$, de manera que el valor de la función, y de su primera y segunda derivadas en $x = x_0$, coincidan con los de $f(x)$. Cada una de estas aproximaciones polinómicas a $f(x)$ es más precisa a medida que aumentamos el grado, si x está suficientemente cerca de x_0 (es decir, si Δx es pequeño).

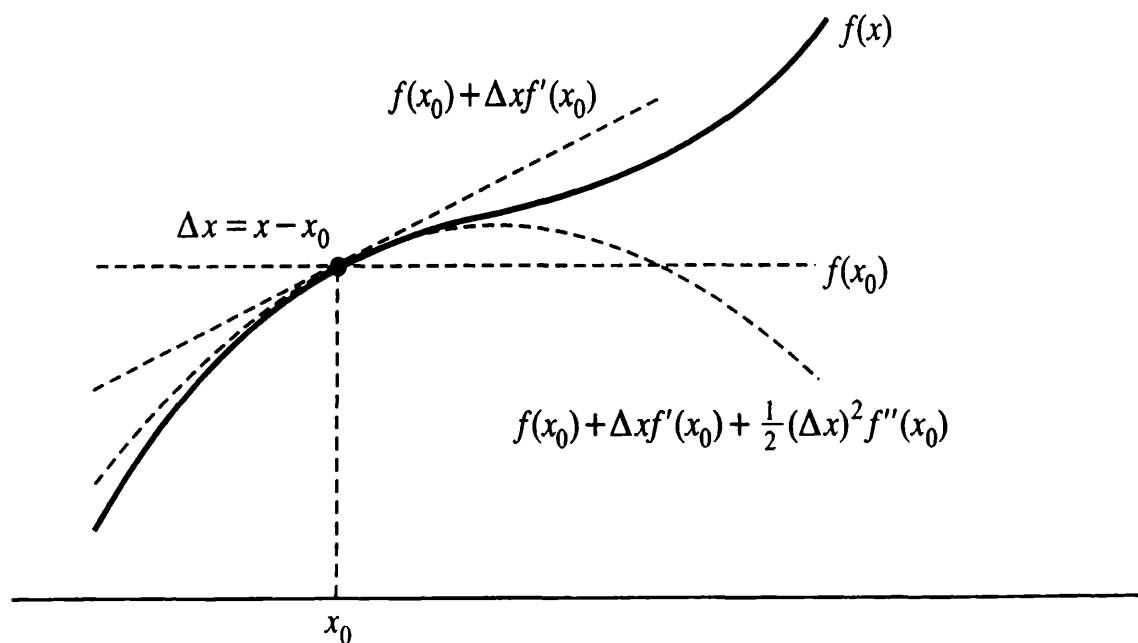


Figura 6.2.1: Polinomios de Taylor.

Error de truncamiento. En estas aproximaciones polinómicas se obtiene directamente una fórmula del error a partir de la expresión

$$f(x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \cdots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n, \quad (6.2.2)$$

conocida como **serie de Taylor con resto**. El resto R_n , también llamado **error de**

luado en un punto intermedio, usualmente desconocido:

$$R_n = \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{n+1}), \quad \text{donde } x_0 < \xi_{n+1} < x = x_0 + \Delta x. \quad (6.2.3)$$

Para que este resultado sea válido, $f(x)$ debe tener $n + 1$ derivadas continuas.

Ejemplo. El error en la aproximación por la tangente está dado por (6.2.3) con $n = 1$:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x \frac{df}{dx}(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi_2), \quad (6.2.4)$$

fórmula que conocemos como **teorema del valor medio extendido**. Si Δx es pequeño, entonces ξ_2 está contenido en un intervalo pequeño y, suponiendo que $d^2 f/dx^2$ es continua, el error de truncamiento es aproximadamente

$$R \approx \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0).$$

Como usualmente suponemos que $d^2 f/dx^2$ está acotada, $|d^2 f/dx^2| < M$, el error de truncamiento es “del orden de delta- x al cuadrado”, es decir,

$$|R| \leq C(\Delta x)^2, \quad \text{con } C = M/2,$$

lo que denotamos por $R = O((\Delta x)^2)$.

Aproximaciones de la primera derivada. Usando la serie de Taylor, podemos aproximar las derivadas de varias formas. Por ejemplo, a partir de (6.2.4):

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi_2). \quad (6.2.5)$$

Introducimos entonces una aproximación por diferencias finitas, la aproximación por **diferencias progresivas** a df/dx :

$$\boxed{\frac{df}{dx}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.} \quad (6.2.6)$$

Esta expresión es muy parecida a la definición de derivada. Aquí utilizamos una diferencia progresiva, pero no tomamos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Como (6.2.5) es válida para todo Δx , podemos sustituir Δx por $-\Delta x$ y obtener la aproximación por **diferencias retrógradas** a df/dx ,

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(\bar{\xi}_2), \quad (6.2.7)$$

de donde:

$$\boxed{\frac{df}{dx}(x_0) \approx \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}.} \quad (6.2.8)$$

Comparando (6.2.5) con (6.2.6), y (6.2.7) con (6.2.8), observamos que el error de truncamiento es $O(\Delta x)$, y casi idéntico para las aproximaciones por diferencias progresivas y retrógradas de la primera derivada.

Para obtener una aproximación más precisa de $(df/dx)(x_0)$, podemos calcular la media de las aproximaciones progresivas y retrógradas. Sumando (6.2.5) y (6.2.7):

$$2\frac{df}{dx}(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{d^2 f}{dx^2}(\bar{\xi}_2) - \frac{d^2 f}{dx^2}(\xi_2) \right]. \quad (6.2.9)$$

Como $\bar{\xi}_2$ está cerca de ξ_2 , esperamos que el error casi se cancele y sea mucho menor que $O(\Delta x)$. Para deducir el error en esta aproximación, volvemos a la serie de Taylor para $f(x_0 - \Delta x)$ y $f(x_0 + \Delta x)$:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots \quad (6.2.10)$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots \quad (6.2.11)$$

Restando (6.2.10) de (6.2.11), nos queda

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x) = 2\Delta x f'(x_0) + \frac{2}{3!}(\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots$$

Luego esperamos que

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{6} f'''(\xi_3), \quad (6.2.12)$$

fórmula que se prueba en un ejercicio. Esto nos lleva a la aproximación por **diferencias centradas** de $df/dx(x_0)$:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (6.2.13)$$

La Ecuación (6.2.13) es normalmente la preferida, ya que es más precisa en el sentido de que el error de truncamiento es $O((\Delta x)^2)$, y en ella aparece el mismo número (dos) de valores necesarios de la función que los utilizados en las fórmulas de las diferencias progresivas y retrógradas. Sin embargo, como demostraremos más tarde, no siempre es mejor utilizar la fórmula de diferencias centradas.

Estas aproximaciones por diferencias finitas a df/dx son **consistentes**, lo que significa que el error de truncamiento se anula cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Existen fórmulas de diferencias finitas más precisas, pero se usan menos frecuentemente.

Ejemplo. Para $f(x) = \log x$ y utilizando $\Delta x = 0.1$, consideremos la aproximación numérica de $(df/dx)(1)$. A diferencia de los problemas prácticos, aquí conocemos la respuesta exacta, $(df/dx)(1) = 1$. Utilizando una calculadora [con

los valores $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.1$, $f(x_0 + \Delta x) = f(1.1) = \log(1.1) = 0.0953102$ y $f(x_0 - \Delta x) = \log(0.9) = -0.1053605$, obtenemos los resultados de la Tabla 6.2.1. Teóricamente, el error sería un orden de magnitud Δx más pequeño para la aproximación por diferencias centradas. Observemos este fenómeno. Para entender mejor el error obtenido, calculemos el error esperado E , usando una estimación del resto. Para las diferencias progresivas y retrógradas se tiene

$$E \approx \left| \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(1) \right| = \frac{0.1}{2} = +0.05,$$

mientras que para diferencias centradas, es

$$E \approx \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{d^3 f}{dx^3}(1) = \frac{(0.1)^2}{6} 2 = 0.00333 \dots$$

Estos errores concuerdan bastante bien con nuestros errores tabulados. Estimar los errores de esta forma es raramente factible, pues usualmente las derivadas segunda y tercera son desconocidas.

Tabla 6.2.1:

	Progresivas	Retrógradas	Centradas
Fórmula de diferencias	0.953102	1.053605	1.00335
Error	4.6898 %	5.3605 %	0.335 %

Derivadas segundas. Sumando (6.2.10) y (6.2.11), obtenemos

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + \frac{2(\Delta x)^4}{4!} f^{(iv)}(x_0) + \dots$$

Luego esperamos que

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} f^{(iv)}(\xi). \quad (6.2.14)$$

Esto nos da una aproximación por diferencias finitas para la segunda derivada con error de truncamiento $O(\Delta x)^2$:

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}.} \quad (6.2.15)$$

La Ecuación (6.2.15) se llama aproximación por **diferencias centradas** para la segunda derivada, ya que también se puede obtener aplicando varias veces las fórmulas

de diferencias centradas para las derivadas primeras (véase el Ejercicio 6.2.2). La aproximación por diferencias centradas para la segunda derivada necesita tres valores de la función: $f(x_0 - \Delta x)$, $f(x_0)$ y $f(x_0 + \Delta x)$. Los respectivos “pesos”, $1/(\Delta x)^2$, $-2/(\Delta x)^2$ y $1/(\Delta x)^2$, se ilustran en la Figura 6.2.2. De hecho, en general, *los pesos deben sumar cero para cualquier aproximación por diferencias finitas a cualquier derivada*.

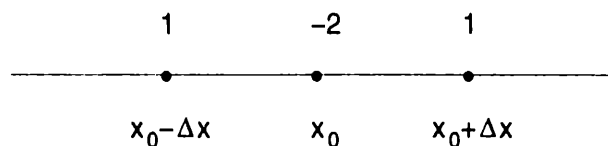


Figura 6.2.2: Pesos para una aproximación por diferencias centradas de la segunda derivada.

Derivadas parciales. Al resolver ecuaciones en derivadas parciales, analizamos funciones de dos o más variables, por ejemplo, $u(x, y)$, $u(x, t)$ y $u(x, y, t)$. Los métodos numéricos utilizan a menudo aproximaciones por diferencias finitas. Algunas derivadas parciales (pero no todas) se pueden obtener usando nuestros resultados anteriores para funciones de una variable. Por ejemplo, para una función $u(x, y)$, la derivada parcial $\partial u / \partial x$ es, en realidad, una derivada ordinaria du/dx si mantenemos y fijo. Por tanto podemos utilizar así las fórmulas de diferencia progresivas, retrógradas o centradas. Usando la fórmula de diferencias centradas, por ejemplo, se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \approx \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0 - \Delta x, y_0)}{2\Delta x}.$$

Para la derivada $\partial u / \partial y$ mantenemos x fijo y obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \approx \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 - \Delta y)}{2\Delta y},$$

usando la fórmula de diferencias centradas. Estas dos fórmulas utilizan el valor de la función en dos puntos, como ilustramos en la Figura 6.2.3.

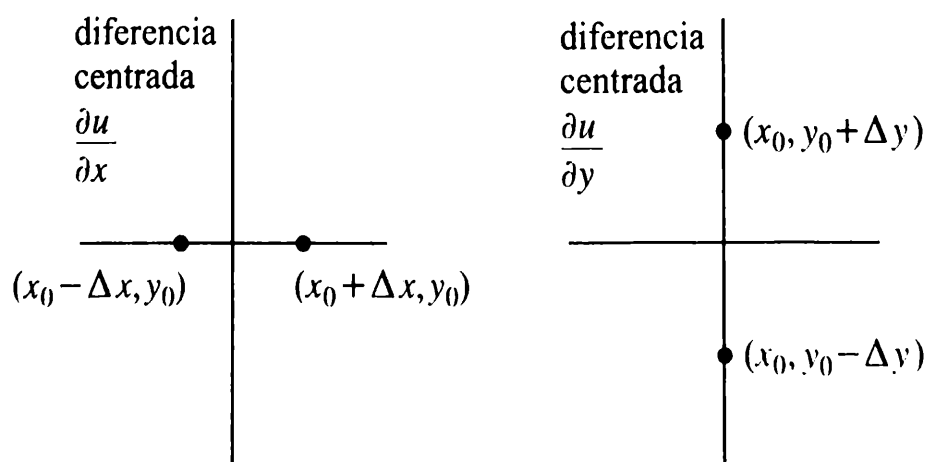


Figura 6.2.3: Puntos para las primeras derivadas parciales.

En los problemas físicos, a menudo necesitamos calcular el laplaciano, $\nabla^2 u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2$. Utilizamos la fórmula de diferencias centradas para las derivadas segundas (6.2.15), sumando la fórmula para x fija a la fórmula para y fija:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x_0, y_0) &\approx \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - \Delta x, y_0)}{(\Delta x)^2} \\ &+ \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0, y_0 - \Delta y)}{(\Delta y)^2}. \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Aquí el error es el máximo de $O((\Delta x)^2)$ y $O((\Delta y)^2)$. A menudo tomamos $\Delta x = \Delta y$, y obtenemos la aproximación estándar de diferencias finitas de cinco puntos para el laplaciano ∇^2 ,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x_0, y_0) &\approx \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[u(x_0 + \Delta x, y_0) + u(x_0 - \Delta x, y_0) \right. \\ &\quad \left. + u(x_0, y_0 + \Delta y) + u(x_0, y_0 - \Delta y) - 4u(x_0, y_0) \right], \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

tal como se ilustra en la Figura 6.2.4. Nótese que los pesos correspondientes suman de nuevo cero.

∇^2 con $\Delta x = \Delta y$

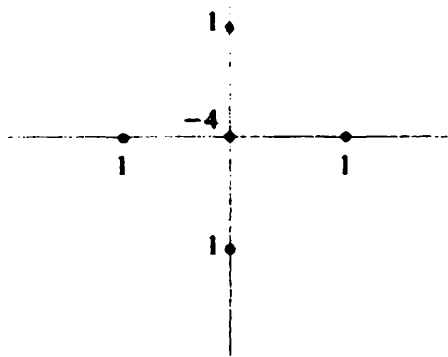


Figura 6.2.4: Pesos para el laplaciano ($\Delta x = \Delta y$).

Se pueden encontrar otras fórmulas para las derivadas en “*Numerical Interpolation, Differentiation, and Integration*”, por P. J. Davis e I. Polonsky (Capítulo 25 de Abramowitz y Stegun [1965]).

EJERCICIOS 6.2

- 6.2.1. (a) Demostrar que el error de truncamiento para la aproximación por diferencias centradas de la primera derivada, (6.2.13), es $-(\Delta x)^2 f'''(\xi_3)/6$. *Indicación:* considérese la serie de Taylor de $g(\Delta x) = f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)$ como una función de Δx alrededor de $\Delta x = 0$.

(b) Demostrar explícitamente que (6.2.13) es exacta para cualquier polinomio cuadrático.

6.2.2. Deducir (6.2.15) usando dos veces la aproximación por diferencias centradas para derivadas primeras.

6.2.3. Deducir el error de truncamiento para la aproximación por diferencias centradas de la segunda derivada.

6.2.4. Supongamos que no conocemos (6.2.15), pero pensamos que es posible aproximar $d^2 f/dx^2(x_0)$ por una combinación lineal desconocida de tres valores de la función, $f(x_0 - \Delta x)$, $f(x_0)$ y $f(x_0 + \Delta x)$:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx a f(x_0 - \Delta x) + b f(x_0) + c f(x_0 + \Delta x).$$

Determinar a , b y c desarrollando el miembro derecho en una serie de Taylor alrededor de x_0 , usando (6.2.10) y (6.2.11) e igualando los coeficientes para $d^2 f/dx^2(x_0)$.

6.2.5. Deducir la aproximación de cinco puntos más precisa para $f'(x_0)$ en la que aparezcan $f(x_0)$, $f(x_0 \pm \Delta x)$ y $f(x_0 \pm 2\Delta x)$. ¿Cuál es el orden de magnitud del error de truncamiento?

***6.2.6.** Deducir una aproximación para $\partial^2 u/\partial x \partial y$ cuyo error de truncamiento sea $O(\Delta x)^2$. *Indicación:* aplicar dos veces las aproximaciones de diferencias centradas para las derivadas parciales de primer orden.

6.2.7. ¿Cuánto se aproxima $\frac{1}{2}[f(x) + f(x + \Delta x)]$ a $f(x + \Delta x/2)$ (es decir, ¿cuál es el error de truncamiento?).

6.3. Ecuación del calor

6.3.1. Introducción

En esta sección introduciremos un método numérico de diferencias finitas para resolver la ecuación del calor unidimensional sin fuentes, en un intervalo acotado $0 < x < L$:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{array} \quad (6.3.1)$$

6.3.2. Una ecuación en diferencias parciales

Comenzaremos sustituyendo la ecuación en derivadas parciales en el punto $x = x_0$, $t = t_0$, por una aproximación basada en nuestras fórmulas en diferencias finitas para las derivadas. Podemos hacer esto de muchas formas. En su momento, aprenderemos por qué algunas de estas formas son buenas y otras malas. De forma algo arbitraria elegimos una **diferencia progresiva en el tiempo** para $\partial u / \partial t$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) = \frac{u(x_0, t_0 + \Delta t) - u(x_0, t_0)}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_0, \eta_1),$$

donde $t_0 < \eta_1 < t_0 + \Delta t$. Para las derivadas espaciales introducimos nuestro esquema de **diferencias espaciales centradas**,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) = \frac{u(x_0 + \Delta x, t_0) - 2u(x_0, t_0) + u(x_0 - \Delta x, t_0)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1, t_0),$$

donde $x_0 < \xi_1 < x_0 + \Delta x$. La ecuación del calor en un punto cualquiera $x = x_0$, $t = t_0$, se convierte en

$$\frac{u(x_0, t_0 + \Delta t) - u(x_0, t_0)}{\Delta t} = k \frac{u(x_0 + \Delta x, t_0) - 2u(x_0, t_0) + u(x_0 - \Delta x, t_0)}{(\Delta x)^2} + E, \quad (6.3.2)$$

de manera exacta, donde el error de discretización (o truncamiento) es

$$E = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_0, \eta_1) - \frac{k(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_1, t_0). \quad (6.3.3)$$

Como E es desconocido, no podemos resolver (6.3.2) y por eso introducimos la *aproximación* que se obtiene ignorando el error de truncamiento, que es

$$\frac{u(x_0, t_0 + \Delta t) - u(x_0, t_0)}{\Delta t} \approx k \frac{u(x_0 + \Delta x, t_0) - 2u(x_0, t_0) + u(x_0 - \Delta x, t_0)}{(\Delta x)^2}. \quad (6.3.4)$$

Para ser más precisos, introducimos $\tilde{u}(x_0, t_0)$, una aproximación en el punto $x = x_0$, $t = t_0$ de la solución exacta, $u(x_0, t_0)$. La aproximación $\tilde{u}(x_0, t_0)$ resuelve (6.3.4) de forma exacta,

$$\frac{\tilde{u}(x_0, t_0 + \Delta t) - \tilde{u}(x_0, t_0)}{\Delta t} = k \frac{\tilde{u}(x_0 + \Delta x, t_0) - 2\tilde{u}(x_0, t_0) + \tilde{u}(x_0 - \Delta x, t_0)}{(\Delta x)^2}, \quad (6.3.5)$$

es decir, $\tilde{u}(x_0, t_0)$ es la solución exacta de una ecuación aproximada. Esperamos que la solución deseada, $u(x_0, t_0)$, se pueda aproximar de forma precisa por $\tilde{u}(x_0, t_0)$.

La Ecuación (6.3.5) involucra puntos separados a una distancia Δx en el espacio y Δt en el tiempo. Por tanto, introducimos una malla uniforme, Δx y una discretización constante en el tiempo, Δt . Un diagrama espacio-tiempo, como el que se muestra en la Figura 6.3.1, ilustra nuestra malla y la discretización en el tiempo en el dominio de nuestro problema de valor inicial. Dividimos la varilla de longitud

L en N intervalos iguales, cada uno de longitud $\Delta x = L/N$, de modo que $x_0 = 0$, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\Delta x, \dots, x_N = N\Delta x = L$ y, en general,

$$x_j = j\Delta x. \quad (6.3.6)$$

De manera análoga, introducimos los tamaños en los pasos en el tiempo Δt tales que

$$t_m = m\Delta t. \quad (6.3.7)$$

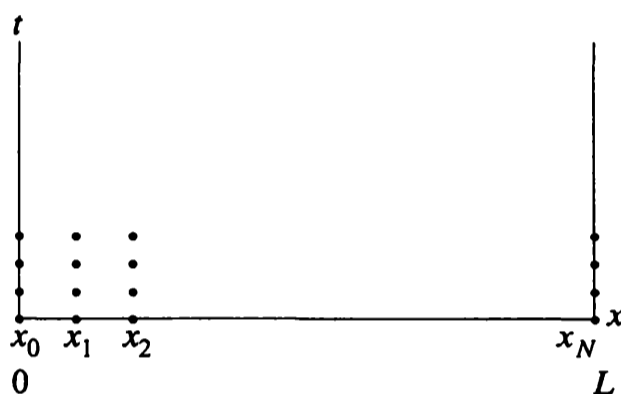


Figura 6.3.1: Discretización espacio-tiempo.

La temperatura exacta en un punto de la malla, $u(x_j, t_m)$, se aproxima por $\tilde{u}(x_j, t_m)$, que satisface (6.3.5). Introducimos ahora la siguiente *notación*:

$$\tilde{u}(x_j, t_m) \equiv u_j^{(m)}, \quad (6.3.8)$$

que denota la solución exacta de (6.3.5), en el punto de la malla j -ésimo, en el tiempo t_m . La Ecuación (6.3.5) se cumplirá en cada punto de la malla $x_0 = x_j$ para cada tiempo $t_0 = t_m$ (excluyendo las fronteras espacio-tiempo). Observemos que $x_0 + \Delta x$ se convierte en $x_j + \Delta x = x_{j+1}$, y $t_0 + \Delta t$ en $t_m + \Delta t = t_{m+1}$. Entonces,

$$\frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t} = k \frac{u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}}{(\Delta x)^2}, \quad (6.3.9)$$

para $j = 1, \dots, N-1$ y $m \geq 1$. Llamamos a (6.3.9) **ecuación en diferencias parciales**. El error de truncamiento local está dado por (6.3.3); es el máximo de $O(\Delta t)$ y $O(\Delta x)^2$. Como $E \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$, decimos que la aproximación (6.3.9) es **consistente** con la ecuación en derivadas parciales (6.3.1).

Además, recordemos que $u_j^{(m)}$ satisface las condiciones iniciales en los puntos de la malla, es decir,

$$u_j^{(0)} = u(x, 0) = f(x) = f(x_j), \quad (6.3.10)$$

donde $x_j = j\Delta x$ para $j = 0, \dots, N$. Análogamente, $u_j^{(m)}$ satisface las condiciones de contorno siguientes en cada paso del tiempo:

$$u_0^{(m)} = u(0, t) = 0, \quad (6.3.11)$$

$$u_N^{(m)} = u(L, t) = 0. \quad (6.3.12)$$

Si hay una discontinuidad física (y por tanto matemática) en el tiempo inicial en cualquier punto de la frontera, entonces podemos analizar numéricamente, tanto $u_0^{(0)}$ como $u_N^{(0)}$, de distintas formas.

6.3.3. Cálculos

Nuestro esquema de diferencias finitas (6.3.9) utiliza cuatro puntos, tres en el tiempo t_m y uno en el tiempo $t_{m+1} = t_m + \Delta t$, tal como se ilustra en la Figura 6.3.2. Podemos “avanzar en el tiempo”, resolviendo $u_j^{(m+1)}$ (marcado con un asterisco en la figura):

$$u_j^{(m+1)} = u_j^{(m)} + s \left(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)} \right), \quad (6.3.13)$$

donde s es un parámetro adimensional:

$$s = k \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (6.3.14)$$

El valor $u_j^{(m+1)}$ es una combinación lineal de los tres valores especificados anteriormente. Comenzamos nuestro cálculo usando la condición inicial $u_j^{(0)} = f(x_j)$, para $j = 1, \dots, N - 1$. Entonces (6.3.13) nos da la solución $u_j^{(1)}$ en el tiempo Δt , y podemos continuar el cálculo. Para los puntos de la malla adyacentes a la frontera (es decir, $j = 1$ y $j = N - 1$), (6.3.13) necesita la solución en los puntos de frontera ($j = 0$ y $j = N$). Obtenemos estos valores a partir de las condiciones de contorno. De esta forma, podemos resolver fácilmente nuestro problema discreto numéricamente. El esquema que proponemos se programa fácilmente en un ordenador personal (o en una calculadora programable).

Velocidad de propagación de las perturbaciones. Como ejemplo sencillo, supongamos que las condiciones iniciales en los puntos de la malla son nulas excepto en un punto interior de la malla, lejos de la frontera, donde vale 1. En el

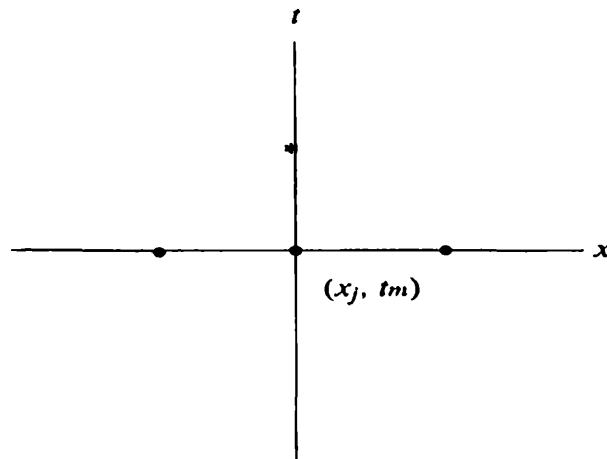


Figura 6.3.2: Avanzando en el tiempo.

primer paso del tiempo, (6.3.13) implica que la solución es cero en todas partes, excepto en el punto original de la malla donde no era cero y en sus dos vecinos inmediatos. Este proceso continúa tal como se muestra en la Figura 6.3.3. Los asteriscos representan valores no nulos. El valor inicial no nulo, que era aislado, se expande a una velocidad constante (hasta que se alcanza la frontera). Esta perturbación se propaga a velocidad $\Delta x/\Delta t$. Sin embargo, para la ecuación del calor, las perturbaciones se propagan a velocidad infinita (véase el Capítulo 9). En cierto sentido, nuestro esquema numérico refleja poco esta propiedad de la ecuación del calor. Sin embargo, si el parámetro s está fijo, entonces la velocidad de propagación numérica es

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{k\Delta x}{s(\Delta x)^2} = \frac{k}{s\Delta x}.$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$ (con s fijo) esta velocidad tiende a infinito, tal como deseamos.

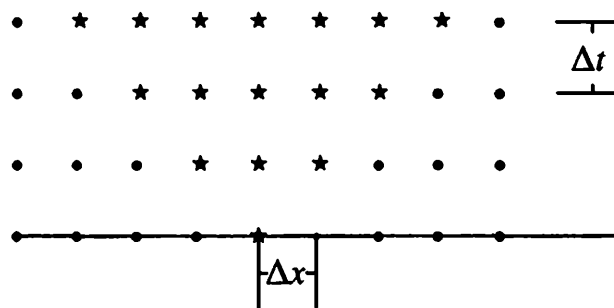


Figura 6.3.3: Velocidad de propagación de las perturbaciones.

Ejemplo con cálculos. Para realizar los cálculos utilizando (6.3.13), debemos especificar los valores de Δx y Δt . Nuestra solución será presumiblemente más precisa cuanto más pequeños sean estos valores y, de hecho, es seguro que el error de truncamiento local se reducirá, pero a cambio de aumentar el tiempo (y por tanto el coste) necesario para realizar los cálculos. Habrá que tener siempre en cuenta estos intereses contrapuestos a la hora de implementar este tipo de métodos de aproximación. Sin embargo, existe una dificultad más severa que necesitaremos analizar. Fijemos, por ejemplo, el valor $\Delta x = L/10$ (nueve puntos interiores y dos puntos de frontera). Como nuestra ecuación en diferencias parciales (6.3.13) depende principalmente de $s = k\Delta t/(\Delta x)^2$, fijaremos dos valores de s para realizar

los cálculos, $s = 1/4$ y $s = 1$, y tomaremos los valores correspondientes de Δt . En ambos casos tomamos la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ dada por la Figura 6.3.4 y las condiciones de contorno (nulas) (6.3.11) y (6.3.12). La solución exacta de la ecuación en derivadas parciales es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad (6.3.15)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx,$$

tal como se describe en el Capítulo 2. Esta expresión muestra que la solución decae exponencialmente en el tiempo y se aproxima a una función sinusoidal ($\operatorname{sen} \pi x/L$) en el espacio, para t grande. En la Figura 6.3.5 se muestran los cálculos elementales de nuestro esquema numérico, (6.3.13), realizados con ordenador, para $s = \frac{1}{4}$ y $s = 1$, uniendo los nueve puntos interiores, para valores fijos de t , con una poligonal. Para $s = \frac{1}{4}$, estos resultados parecen bastante razonables y concuerdan con las propiedades cualitativas de la solución exacta. Por otro lado, la solución de (6.3.13) para $s = 1$ es absurda. Su dificultad más obvia es que hay temperaturas negativas. La solución crece de forma salvaje en el tiempo con rápidas oscilaciones en el espacio y en el tiempo. Ninguno de estos fenómenos está asociado con la ecuación del calor. La aproximación por diferencias finitas nos ha dado resultados inútiles para $s = 1$. En la próxima subsección explicaremos estos resultados. Debemos entender cómo escoger $s = k(\Delta t)/(\Delta x)^2$ para poder obtener soluciones numéricas razonables.

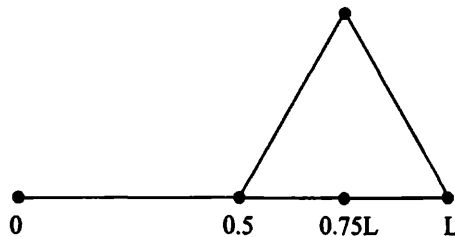


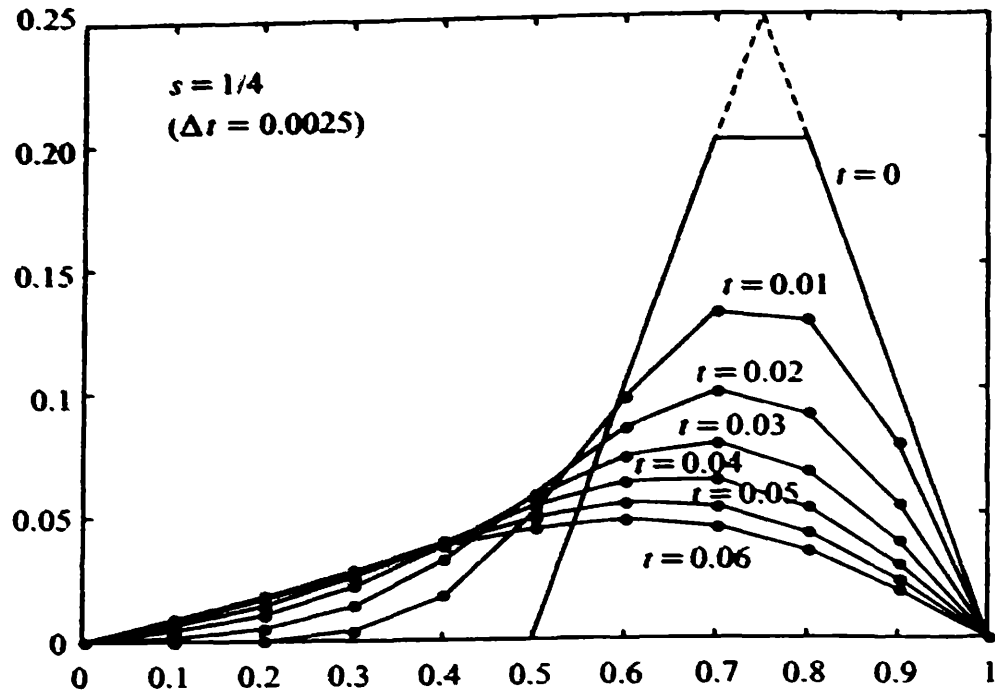
Figura 6.3.4: Condición inicial.

6.3.4. Análisis de estabilidad de Fourier-von Neumann

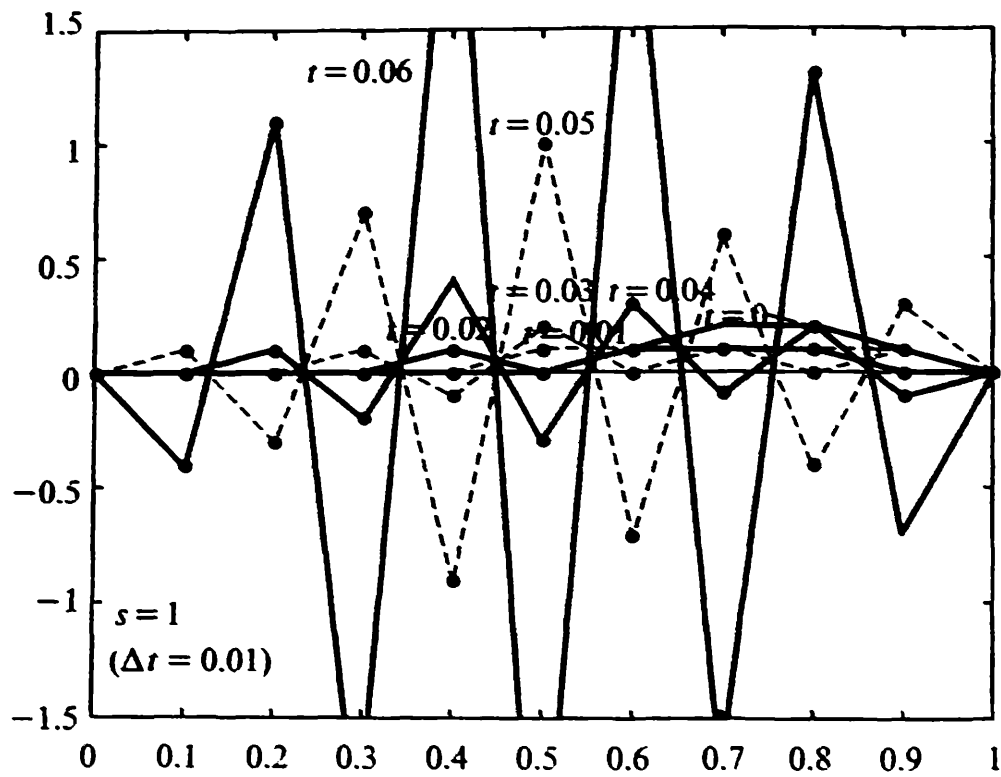
Introducción. En esta subsección analizamos el esquema de diferencias finitas para la ecuación del calor, obtenido usando diferencias progresivas en el tiempo y diferencias centradas en el espacio:

$$\text{edp}^1 : \boxed{u_j^{(m+1)} = u_j^{(m)} + s \left(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)} \right)} \quad (6.3.16)$$

$$\text{CI} : \boxed{u_j^{(0)} = f(x_j) = f_j,} \quad (6.3.17)$$



(a)



(b)

Figura 6.3.5: Cálculos para la ecuación del calor $s = k(\Delta t)/(\Delta x)^2$: (a) $s = \frac{1}{4}$ estable y (b) $s = 1$ inestable.

$$\text{CC : } \begin{cases} u_0^{(m)} = 0, \\ u_N^{(m)} = 0, \end{cases} \tag{6.3.18}$$

donde $s = k(\Delta t)/(\Delta x)^2$, $x_j = j\Delta x$, $t = m\Delta t$ y esperamos que $u(x_j, t) \approx u_j^{(m)}$. Desarrollaremos ideas de von Neumann de la década de 1940, basadas en análisis del tipo de Fourier.

¹El término edp aquí significa ecuación en diferencias parciales.

Autovalores y soluciones producto. En la Sección 6.3.5 demostraremos que el método de separación de variables se puede aplicar a la ecuación en diferencias parciales. Existen soluciones producto especiales con número de onda α de la forma:

$$u_j^{(m)} = e^{i\alpha x} Q^{t/\Delta t} = e^{i\alpha j \Delta x} Q^m. \quad (6.3.19)$$

Sustituyendo (6.3.19) en (6.3.16) y simplificando $e^{i\alpha x} Q^m$, obtenemos

$$Q = 1 + s(e^{i\alpha \Delta x} - 2 + e^{-i\alpha \Delta x}) = 1 - 2s[1 - \cos(\alpha \Delta x)], \quad (6.3.20)$$

con lo que Q es igual para α positivo o negativo. Por tanto, podemos utilizar una combinación lineal de las funciones $e^{\pm i\alpha x}$. La condición de contorno $u_0^{(m)} = 0$ implica que $\sin \alpha x$ es adecuada, mientras que $u_N^{(m)} = 0$ implica que $\alpha = n\pi/L$. Así pues, hay soluciones de (6.3.16) - (6.3.18) de la forma

$$u_j^{(m)} = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} Q^{t/\Delta t}, \quad (6.3.21)$$

donde Q se determina a partir de (6.3.20),

$$Q = 1 - 2s \left[1 - \cos \left(\frac{n\pi \Delta x}{L} \right) \right], \quad (6.3.22)$$

y $n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$, tal como explicaremos. Para la ecuación en derivadas parciales existe una cantidad infinita de autofunciones ($\text{sen } n\pi x/L, n = 1, 2, 3, \dots$). Sin embargo, demostraremos que para nuestra ecuación en diferencias parciales hay sólo $N - 1$ autofunciones independientes ($\text{sen } n\pi x/L, n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$):

$$\phi_j = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = \text{sen} \frac{n\pi j \Delta x}{L} = \text{sen} \frac{n\pi j}{N}, \quad (6.3.23)$$

las mismas autofunciones que para la ecuación en derivadas parciales (en este caso). Por ejemplo, para $n = N$, $\phi_j = \text{sen } \pi j = 0$ (para todo j). Más aún, ϕ_j , para $n = N + 1$, es equivalente a ϕ_j para $n = N - 1$, ya que

$$\text{sen} \frac{(N + 1)\pi j}{N} = \text{sen} \left(\frac{\pi j}{N} + j\pi \right) = \text{sen} \left(\frac{\pi j}{N} - j\pi \right) = -\text{sen} \frac{(N - 1)\pi j}{N}.$$

En la Figura 6.3.6 se representan algunas de estas "autofunciones" (para $N = 10$). Para la ecuación en diferencias parciales, debido a la discretización, la solución está compuesta sólo de $N - 1$ ondas. Esta cantidad de ondas es igual al número de puntos independientes de la malla (excluyendo los extremos). La onda con menor longitud de onda es

$$\text{sen} \frac{(N - 1)\pi x}{L} = \text{sen} \frac{(N - 1)\pi j}{N} = (-1)^{j+1} \text{sen} \frac{\pi j}{N},$$

que cambia de signo en cada punto. La solución general se obtiene por el principio de superposición, introduciendo $N - 1$ constantes β_n :

$$u_j^{(m)} = \sum_{n=1}^{N-1} \beta_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left[1 - 2s \left(1 - \cos \frac{n\pi}{N} \right) \right]^{t/\Delta t}, \quad (6.3.24)$$

donde

$$s = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

Estos coeficientes se pueden determinar a partir de los $N - 1$ datos iniciales, usando la ortogonalidad discreta de las autofunciones $\operatorname{sen} n\pi j/N$. El análisis de esta serie de Fourier discreta se describe en los Ejercicios 6.3.3 y 6.3.4.

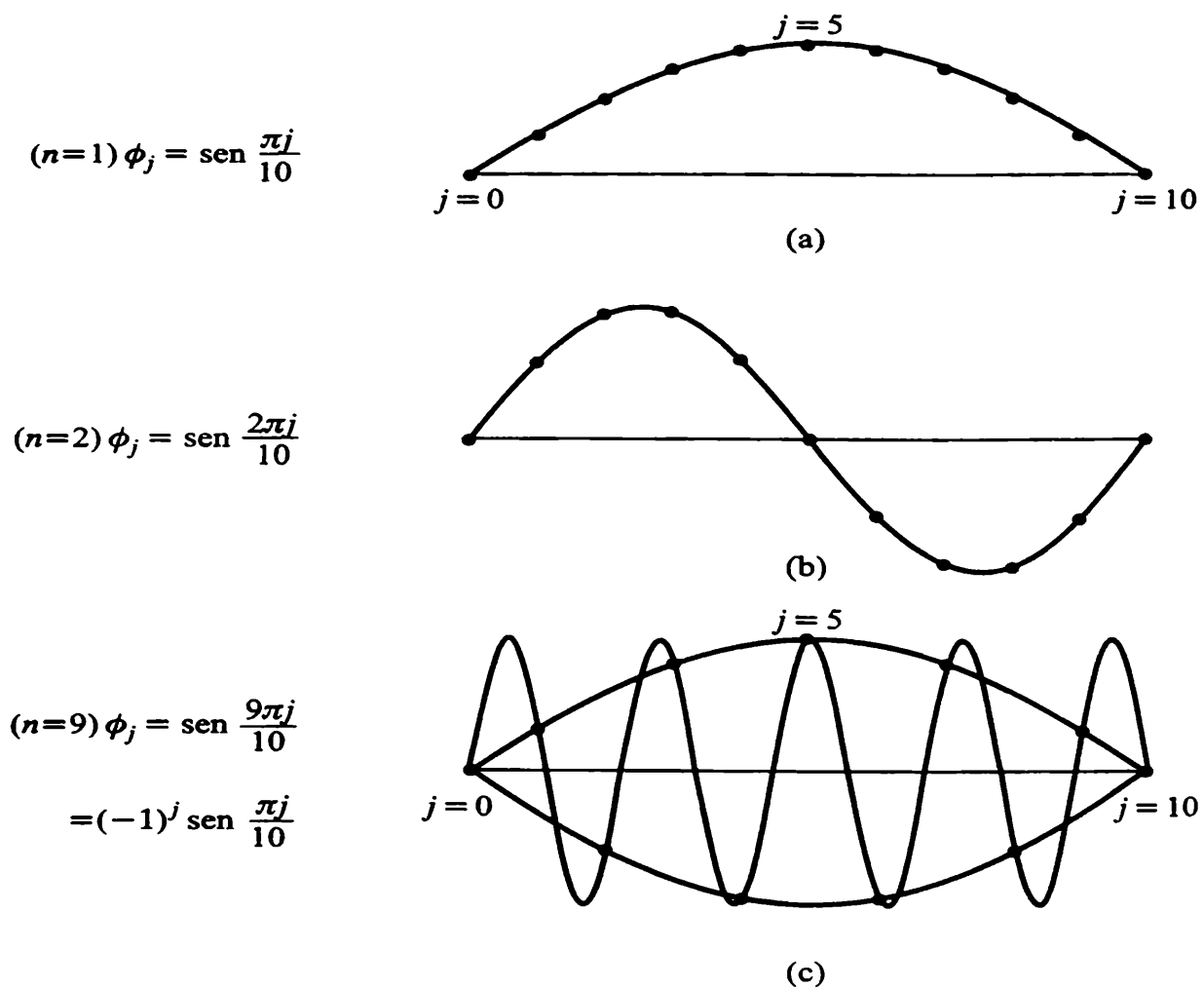


Figura 6.3.6: Autofunciones para el problema discreto.

Comparación con la ecuación en derivadas parciales. La solución producto $u_j^{(m)}$ de la ecuación en diferencias finitas se puede comparar con la solución producto $u(x, t)$ de la ecuación en derivadas parciales:

$u_j^{(m)} = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left[1 - 2s \left(1 - \cos \frac{n\pi}{N} \right) \right]^{t/\Delta t},$	$n = 1, 2, \dots, N - 1,$
$u(x, t) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t},$	$n = 1, 2, \dots,$

donde $s = k\Delta t/(\Delta x)^2$. En la ecuación en derivadas parciales, cada onda decae exponencialmente por el término $e^{-k(n\pi/L)^2 t}$. Para la ecuación en diferencias finitas, la dependencia en el tiempo (correspondiente al término espacial $\sin n\pi x/L$) es

$$Q^m = \left[1 - 2s \left(1 - \cos \frac{n\pi}{N} \right) \right]^{t/\Delta t}. \quad (6.3.25)$$

Estabilidad. Si $Q > 1$, hay crecimiento exponencial en el tiempo, mientras que si $0 < Q < 1$ hay decaimiento exponencial. La solución es constante en el tiempo si $Q = 1$. Además, es posible que haya una oscilación convergente en el tiempo si $-1 < Q < 0$, una oscilación pura si $Q = 1$ y una oscilación divergente si $Q < -1$. Estas posibilidades se discuten en la Sección 6.3.5. El valor de Q determinará la estabilidad. Si $|Q| \leq 1$ para todas las soluciones, el esquema numérico es **estable**. En otro caso el esquema es **inestable**.

Volvamos a analizar $Q^m = Q^{t/\Delta t}$, donde $Q = 1 - 2s(1 - \cos n\pi/N)$. Aquí, $Q \leq 1$; la solución no puede ser una exponencial puramente creciente en el tiempo. Sin embargo, la solución puede ser una oscilación convergente o divergente a la vez que decae exponencialmente. No queremos que el esquema numérico tenga oscilaciones divergentes en el tiempo². Si s es demasiado grande, Q puede llegar a ser demasiado negativa.

Como $Q \leq 1$, la solución será “estable” si $Q \geq -1$. Obtenemos, así, la condición $1 - 2s(1 - \cos n\pi/N) \geq -1$, para $n = 1, 2, 3, \dots, N - 1$, o lo que es lo mismo,

$$s \leq \frac{1}{1 - \cos n\pi/N}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, N - 1.$$

Por tanto, s debe ser menor o igual que el valor más pequeño, que es el que se obtiene para el valor $n = N - 1$,

$$s \leq \frac{1}{1 - \cos(N - 1)\pi/N}.$$

Para simplificar este criterio de estabilidad, observemos que $1 - \cos(N - 1)\pi/N < 2$, y por tanto tenemos la *garantía* de que la solución numérica será estable si $s \leq \frac{1}{2}$:

$$s \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{1 - \cos(N - 1)\pi/N}. \quad (6.3.26)$$

En la práctica, no podemos tener estabilidad con s mucho mayor que $\frac{1}{2}$, pues $\cos(N - 1)\pi/N = -\cos \pi/N$, y por tanto para π/N grande, $1 - \cos(N - 1)\pi/N \approx 2$.

Si $s > \frac{1}{2}$, usualmente $Q < -1$ (pero no necesariamente) para algún n . Entonces, la solución numérica contendrá una oscilación divergente. Llamamos a este efecto **inestabilidad numérica**. Si $s > \frac{1}{2}$, la solución que “crece” más rápidamente corresponde a una oscilación rápida en el espacio ($n = N - 1$). **La inestabilidad numérica se caracteriza por una oscilación divergente en el tiempo ($Q < -1$) de**

²Las oscilaciones convergentes no reproducen el comportamiento de la ecuación en derivadas parciales, aunque al menos decaen (toleramos términos oscilatorios que decaen).

una solución en el espacio rápidamente oscilatoria ($n = N - 1$). Generalmente, si se observan resultados de esta forma en el ordenador, probablemente se tenga un esquema numérico inestable y, por tanto, no fiable. Esto es lo que observamos numéricamente cuando $s = 1$. Para $s = \frac{1}{4}$, la solución se comportaba bastante razonablemente. Sin embargo, para $s = 1$ se observaba una oscilación divergente en el tiempo, variando rápidamente en el espacio.

Como $s = k\Delta t/(\Delta x)^2$, la restricción $s \leq \frac{1}{2}$ nos da que

$$\Delta t \leq \frac{\frac{1}{2}(\Delta x)^2}{k}. \quad (6.3.27)$$

Esto impone una restricción práctica a los cálculos numéricos. Los pasos en el tiempo, Δt , no deben ser demasiado grandes, o de otro modo el esquema se convierte en inestable. De hecho, como Δx debe ser pequeño para obtener cálculos precisos, (6.3.27) demuestra que el paso en el tiempo debe ser extremadamente pequeño. Por tanto, la aproximación por diferencias progresivas en el tiempo y centradas en el espacio para la ecuación del calor resulta algo costosa.

Para minimizar cálculos, hacemos Δt tan grande como sea posible (manteniendo la estabilidad). Aquí $s = \frac{1}{2}$ sería un buen valor. En este caso, la ecuación en diferencias parciales se convierte en

$$u_j^{(m+1)} = \frac{1}{2} \left[u_{j+1}^{(m)} + u_{j-1}^{(m)} \right].$$

La temperatura en el tiempo Δt posterior es la media de las temperaturas a izquierda y derecha.

Convergencia. Para comparar de otro modo las ecuaciones diferenciales y en diferencias, consideremos el límite de la solución de la ecuación en diferencias parciales, cuando $\Delta x \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) y $\Delta t \rightarrow 0$. Demostraremos que la dependencia en el tiempo de la discretización converge a la de la ecuación del calor, si $n/N \ll 1$ (fijando n y haciendo $N \rightarrow \infty$). Si $n/N \ll 1$, entonces, usando la serie de Taylor del coseno, tenemos $\cos n\pi/N \approx 1 - \frac{1}{2}(n\pi/N)^2$ y, por tanto,

$$Q^{t/\Delta t} \approx \left[1 - s \left(\frac{n\pi}{N} \right)^2 \right]^{t/\Delta t} = \left[1 - k\Delta t \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]^{t/\Delta t}, \quad (6.3.28)$$

donde $N = L/\Delta x$. Así pues, cuando $\Delta t \rightarrow 0$,

$$Q^{t/\Delta t} \rightarrow e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad (6.3.29)$$

puesto que e se puede definir como $e = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{1/z}$. Si $n/N \ll 1$, entonces haciendo un análisis más fino de (6.3.28), tomando logaritmos, se puede demostrar que $Q^{t/\Delta t} - \exp(-k(n\pi/L)^2 t) = O(\Delta t)$. Es usual hacer los cálculos con s fijo. Para mejorar los cálculos disminuimos el paso en espacio Δx , por ejemplo dividiéndolo por la mitad, pero debemos recordar que el paso en tiempo Δt se dividirá por

cuatro, con lo que los errores numéricos se dividen también por cuatro. Todos los cálculos se deben hacer con un valor s que cumpla la condición de estabilidad.

Sin embargo, pueden aparecer dificultades en los cálculos prácticos si n/N no es pequeño. *Éstas son soluciones de la ecuación en diferencias altamente oscilatorias en la variable espacial. En el caso de la ecuación del calor, éstas son las únicas ondas que pueden causar dificultades.*

Teorema de equivalencia de Lax. La relación entre convergencia y estabilidad se puede generalizar. El **teorema de equivalencia de Lax** establece que: en las aproximaciones por diferencias finitas *consistentes* de ecuaciones en derivadas parciales lineales dependientes del tiempo que están bien propuestas, el sistema numérico converge si y sólo si es estable.

Una determinación simplificada de la condición de estabilidad. A menudo es conveniente analizar de manera rápida la estabilidad de un método numérico. Con nuestro análisis (basado en el método de separación de variables), hemos demostrado que hay soluciones especiales de la ecuación en diferencias que oscilan en la variable x ,

$$u_j^{(m)} = e^{i\alpha x} Q^{t/\Delta t}, \quad (6.3.30)$$

donde,

$$x = j\Delta x \quad y \quad t = m\Delta t.$$

Las condiciones de contorno restringen los valores que puede tomar α , aunque a menudo, para simplificar el análisis de la estabilidad, ignoramos las condiciones de contorno y permitimos que α tome cualquier valor³. En este caso, la estabilidad es consecuencia de (6.3.20), si $s \leq \frac{1}{2}$.

Paseo aleatorio. La ecuación en diferencias parciales (6.3.16) se puede escribir de la forma:

$$u_j^{(m+1)} = su_{j-1}^{(m)} + (1 - 2s)u_j^{(m)} + su_{j+1}^{(m)}. \quad (6.3.31)$$

En la región estable, $s \leq \frac{1}{2}$, esta ecuación se puede interpretar como un problema de probabilidades conocido como **paseo aleatorio**. Consideremos un “borracho” que en cada unidad de tiempo Δt permanece quieto o camina aleatoriamente hacia la izquierda o hacia la derecha, un paso Δx . No sabemos de forma precisa dónde estará la persona. Sea $u_j^{(m)}$ la probabilidad de que el borracho esté en el punto j , en el instante $m\Delta t$. Suponemos que la persona va a dar el paso Δx en el tiempo Δt , no tiene preferencia por la derecha o la izquierda, es decir, ambas posibilidades tienen la misma probabilidad, s . Notemos que esta interpretación implica que s debe ser menor o igual que $\frac{1}{2}$, y que la probabilidad de que la persona se quede quieta es $1 - 2s$. Finalmente, la probabilidad de que la persona esté en la posición $j\Delta x$ en el momento $(m + 1)\Delta t$ es la suma de las probabilidades de los tres sucesos posibles,

³Nuestro análisis detallado de la estabilidad demostraba que las ondas inestables aparecen sólo para longitudes de onda muy cortas. Para estas ondas, se espera que la frontera tenga un efecto mínimo.

lo que se expresa por medio de la Ecuación (6.3.31). Por ejemplo, la persona pudo haber estado allí en el tiempo inmediatamente anterior, con probabilidad $u_j^{(m)}$, y no haberse movido con probabilidad $1 - 2s$; la probabilidad de este suceso compuesto es $(1 - 2s)u_j^{(m)}$. Por otro lado, la persona podría haber estado un paso a la izquierda, con probabilidad $u_{j-1}^{(m)}$ (o a la derecha, con probabilidad $u_{j+1}^{(m)}$) y moverse un paso en la dirección adecuada con probabilidad s .

La mayor unidad de tiempo para obtener cálculos estables, $s = \frac{1}{2}$, corresponde a un problema de un paseo aleatorio con probabilidad cero de mantenerse quieto. Si la posición inicial es conocida con certeza, entonces

$$u_j^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \text{posición inicial conocida,} \\ 0 & \text{si } j = \text{otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, la persona se mueve a la izquierda o a la derecha con probabilidad $\frac{1}{2}$. Esto nos lleva a la distribución de probabilidad binomial, como se ilustra por el triángulo de Pascal (véase la Figura 6.3.7).

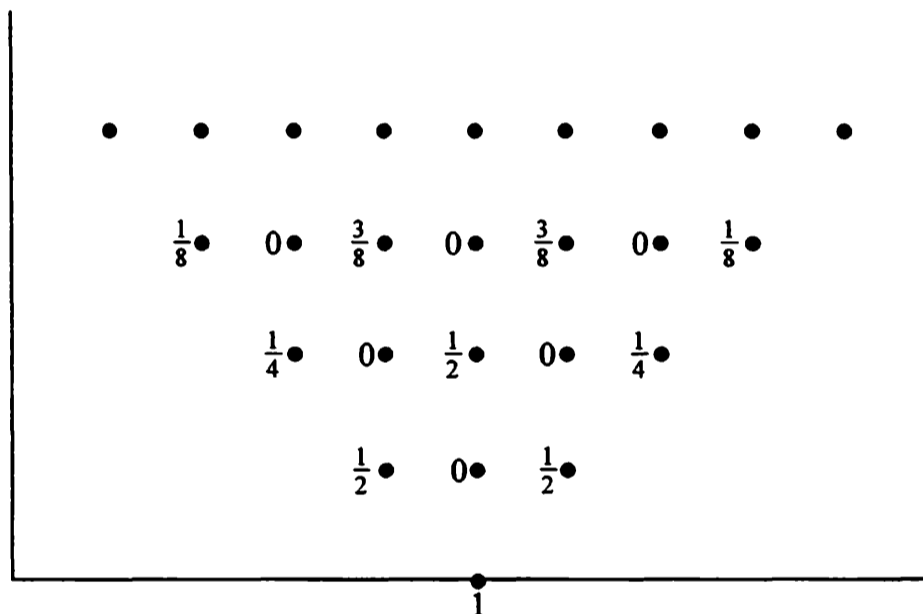


Figura 6.3.7: Triángulo de Pascal.

6.3.5. Separación de variables para ecuaciones en diferencias parciales y soluciones analíticas de ecuaciones en diferencias ordinarias

La ecuación en diferencias parciales se puede analizar por el mismo procedimiento que utilizamos para las ecuaciones en derivadas parciales, es decir, por separación de variables. Comenzamos suponiendo que (6.3.16) tiene soluciones producto especiales de la forma

$$u_j^{(m)} = \phi_j h_m. \quad (6.3.32)$$

Sustituyendo (6.3.32) en (6.3.16), obtenemos

$$\phi_j h_{m+1} = \phi_j h_m + s(\phi_{j+1} h_m - 2\phi_j h_m + \phi_{j-1} h_m).$$

Dividiendo por $\phi_j h_m$, separamos las variables:

$$\frac{h_{m+1}}{h_m} = 1 + s \left(\frac{\phi_{j+1} + \phi_{j-1}}{\phi_j} - 2 \right) = +\lambda,$$

donde λ es una constante de separación.

La ecuación en diferencias parciales nos da entonces dos ecuaciones en diferencias ordinarias. La ecuación en diferencias en tiempo discreto es de primer orden (lo que significa que sólo tiene una diferencia),

$$\boxed{h_{m+1} = +\lambda h_m.} \quad (6.3.33)$$

La constante de separación λ (como en las ecuaciones en derivadas parciales) se determina por un problema de contorno, que aquí es una ecuación en diferencias de segundo orden,

$$\boxed{\phi_{j+1} + \phi_{j-1} = - \left(\frac{-\lambda + 1 - 2s}{s} \right) \phi_j,} \quad (6.3.34)$$

con dos condiciones de contorno homogéneas, obtenidas a partir de (6.3.18):

$$\phi_0 = 0, \quad (6.3.35)$$

$$\phi_N = 0. \quad (6.3.36)$$

Ecuaciones en diferencias de primer orden. Las ecuaciones en diferencias lineales y homogéneas de primer orden con coeficientes constantes, como (6.3.33), son fáciles de analizar. Consideremos la ecuación

$$h_{m+1} = \lambda h_m, \quad (6.3.37)$$

donde λ es una constante, y notemos simplemente que se verifica

$$h_1 = \lambda h_0, \quad h_2 = \lambda h_1 = \lambda^2 h_0, \quad \text{etc.}$$

Por tanto, la solución es

$$h_m = \lambda^m h_0, \quad (6.3.38)$$

donde h_0 es una condición inicial para la ecuación en diferencias de primer orden.

Una forma alternativa de obtener (6.3.38) es suponer que existe una solución homogénea de la forma $h_m = Q^m$. Sustituyendo en (6.3.37), nos da $Q^{m+1} = \lambda Q^m$, es decir, $Q = \lambda$, que es de nuevo (6.3.38). Esta última técnica es análoga a la sustitución de e^{rt} en las ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes.

La solución (6.3.38) está dibujada en la Figura 6.3.8 para varios valores de λ . Observemos que, si $\lambda > 1$, entonces la solución crece exponencialmente (usando

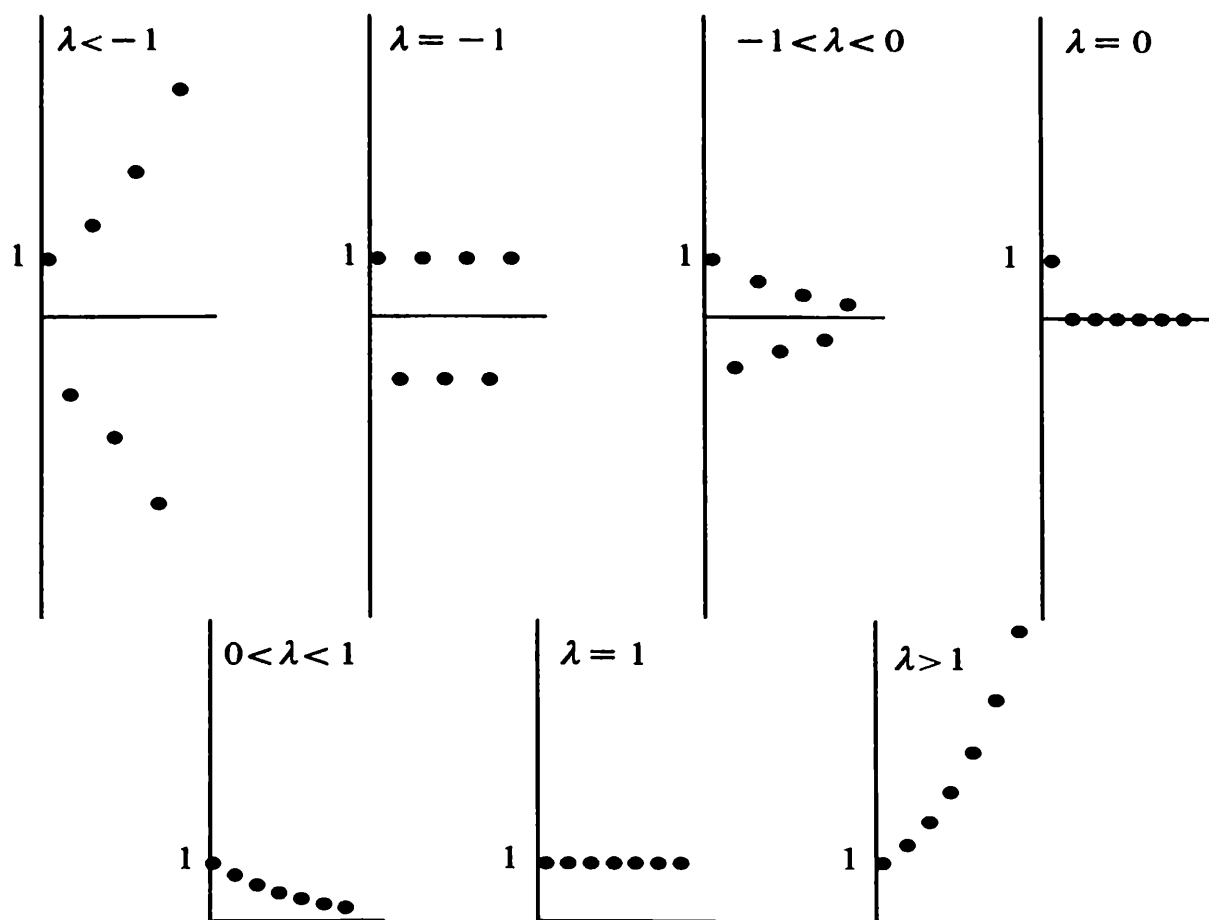


Figura 6.3.8: Soluciones de ecuaciones en diferencias de primer orden.

que $\lambda^m = e^{m \log \lambda} = e^{(\log \lambda / \Delta t)t}$, ya que $m = t / \Delta t$). Si $0 < \lambda < 1$, la solución decae exponencialmente. Más aún, si $-1 < \lambda < 0$, la solución tiene un decaimiento oscilatorio (y exponencial), conocido como **oscilación convergente**. Por otro lado, si $\lambda < -1$, la solución tiene una **oscilación divergente**.

En algunas situaciones podemos incluso tener λ complejo. Usando la forma polar de un número complejo, $\lambda = r e^{i\theta}$, $r = |\lambda|$ y $\theta = \arg \lambda$ (o ángulo), obtenemos

$$\lambda^m = r^m e^{im\theta} = |\lambda|^m (\cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta). \quad (6.3.39)$$

Por ejemplo, la parte real es $|\lambda|^m \cos m\theta$. Como función de m , λ^m oscila (con periodo $m = 2\pi/\theta = 2\pi/\arg \lambda$). La solución crece en el tiempo discreto m , si $|\lambda| > 1$ y decrece, si $|\lambda| < 1$.

En resumen, incluso en el caso complejo, la solución λ^m de $h_{m+1} = \lambda h_m$ está acotada cuando m crece (t crece), si $|\lambda| \leq 1$. Es creciente si $|\lambda| > 1$.

Ecuaciones en diferencias de segundo orden. La ecuación en diferencias (6.3.34) tiene coeficientes constantes, ya que $(-\lambda + 1 - 2s)/s$ es independiente del paso j . Se puede obtener fácilmente una solución analítica. Para cualquier ecuación en diferencias con coeficientes constantes, se puede obtener soluciones homogéneas sustituyendo $\phi_j = Q^j$, del mismo modo que hicimos con las ecuaciones en diferencias de primer grado [véase (6.3.38)].

Las condiciones de contorno, $\phi_0 = \phi_N = 0$, sugieren que la solución puede oscilar. Esto ocurre normalmente si Q es complejo con $|Q| = 1$, en cuyo caso una sustitución equivalente es

$$\phi_j = (|Q| e^{i\theta})^j = e^{i\theta j} = e^{i\theta(x/\Delta x)} = e^{i\alpha x}, \quad (6.3.40)$$

ya que $j = x/\Delta x$, definiendo $\alpha = \theta/\Delta x = (\arg Q)/\Delta x$. En el Ejercicio 6.3.2, se demuestra que (6.3.34) implica que $|Q| = 1$, por lo que se puede utilizar (6.3.40). Sustituyendo (6.3.40) en (6.3.34), obtenemos una ecuación para el número de onda α :

$$e^{i\alpha\Delta x} + e^{-i\alpha\Delta x} = \frac{\lambda - 1 + 2s}{s}$$

o equivalentemente,

$$2 \cos(\alpha\Delta x) = \frac{\lambda - 1 + 2s}{s}. \quad (6.3.41)$$

Esto nos da dos valores de α (iguales salvo el signo) y, por tanto, en lugar de $\phi_j = e^{i\alpha x}$, utilizamos una combinación lineal de $e^{\pm i\alpha x}$, o también

$$\phi_j = c_1 \operatorname{sen} \alpha x + c_2 \operatorname{cos} \alpha x. \quad (6.3.42)$$

Las condiciones de contorno, $\phi_0 = \phi_N = 0$, implican que $c_2 = 0$ y $\alpha = n\pi/L$, donde $n = 1, 2, 3, \dots$. Así,

$$\phi_j = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \operatorname{sen} \frac{n\pi j \Delta x}{L} = \operatorname{sen} \frac{n\pi j}{N}. \quad (6.3.43)$$

En la siguiente subsección realizaremos un análisis más profundo utilizando notación matricial.

6.3.6. Notación matricial

A menudo es conveniente utilizar una notación matricial⁴ para analizar la discretización de ecuaciones en derivadas parciales. Para t fijo, $u(x, t)$ es sólo una función de x . Su discretización $u_j^{(m)}$ está definida en cada uno de los $N + 1$ puntos de la malla (en cada paso del tiempo). Introducimos un *vector* \mathbf{u} de dimensión $N + 1$, que cambia a cada paso del tiempo; es una función de m , $\mathbf{u}^{(m)}$. La componente j -ésima de $\mathbf{u}^{(m)}$ es el valor de $u(x, t)$ en el j -ésimo punto de la malla:

$$\left(\mathbf{u}^{(m)}\right)_j = u_j^{(m)}. \quad (6.3.44)$$

La ecuación en diferencias parciales es

$$u_j^{(m+1)} = u_j^{(m)} + s \left(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)} \right). \quad (6.3.45)$$

Si aplicamos las condiciones de contorno, $u_0^{(m)} = u_N^{(m)} = 0$, entonces

$$u_1^{(m+1)} = u_1^{(m)} + s \left(u_2^{(m)} - 2u_1^{(m)} + u_0^{(m)} \right) = (1 - 2s)u_1^{(m)} + su_2^{(m)}.$$

⁴Esta sección requiere algún conocimiento de álgebra lineal.

Una ecuación similar es válida para $u_{N-1}^{(m+1)}$. Para cada paso del tiempo hay $N - 1$ incógnitas. Introducimos ahora la **matriz tridiagonal** \mathbf{A} , con dimensiones $(N - 1) \times (N - 1)$, y con todos sus valores nulos excepto los de la diagonal principal (con valores $1 - 2s$) y las diagonales vecinas (con valores s):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2s & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 1 - 2s & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 1 - 2s & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 1 - 2s & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 1 - 2s & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 1 - 2s & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 1 - 2s \end{bmatrix}. \quad (6.3.46)$$

La ecuación en diferencias parciales se convierte en la siguiente ecuación vectorial:

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \mathbf{A}\mathbf{u}^{(m)}, \quad (6.3.47)$$

en la que se refleja cómo varía el vector \mathbf{u} . Comenzando con el vector $\mathbf{u}^{(0)}$, que representa la condición inicial, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(1)} &= \mathbf{A}\mathbf{u}^{(0)} \\ \mathbf{u}^{(2)} &= \mathbf{A}\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{A}^2\mathbf{u}^{(0)}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{A}^m\mathbf{u}^{(0)}. \quad (6.3.48)$$

La matriz \mathbf{A} elevada a la m -ésima potencia describe cómo la condición inicial influye en la solución en el paso m -ésimo del tiempo ($t = m\Delta t$).

Para entender esta solución, introducimos los **autovalores** μ de la matriz \mathbf{A} , esto es, los valores μ , tales que existen soluciones vectoriales no triviales $\boldsymbol{\xi}$:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mu\boldsymbol{\xi}. \quad (6.3.49)$$

Los autovalores satisfacen

$$\det[\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}] = 0, \quad (6.3.50)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. Los vectores no triviales $\boldsymbol{\xi}$ que satisfacen (6.3.49) son los **autovectores** correspondientes a μ . Como \mathbf{A} es una matriz $(N - 1) \times (N - 1)$, \mathbf{A} tiene $N - 1$ autovalores. Sin embargo, algunos de ellos pueden ser iguales, es decir, puede haber autovalores múltiples (o **degenerados**). Para cada autovalor distinto, existe un único autovector (salvo por constantes multiplicativas) y en el caso de un autovalor múltiple (de multiplicidad k), hay como máximo k autovectores linealmente independientes. Si para algún autovalor hay menos de k autovectores, decimos que la matriz es **defectiva**. Se puede demostrar que *las matrices reales y simétricas [como es el caso de (6.3.46)] no son defectivas, los autovalores (y consecuentemente los autovectores) son reales y los autovectores son ortogonales (véase la Sección 5.6 del apéndice)*. Por tanto, la matriz \mathbf{A} de (6.3.46)

tiene $N-1$ autovectores linealmente independientes. Denotaremos por μ_n el n -ésimo autovalor y por ξ_n el correspondiente autovector.

Podemos resolver la ecuación vectorial (6.3.47) (equivalente a la ecuación en diferencias parciales) utilizando el método del desarrollo en autovectores. Esta técnica es análoga a usar un desarrollo en autofunciones para resolver la ecuación en derivadas parciales. Cualquier vector se puede desarrollar como combinación lineal de los autovectores:

$$\mathbf{u}^{(m)} = \sum_{n=1}^{N-1} c_n^{(m)} \xi_n. \quad (6.3.51)$$

El vector cambia con m (el tiempo), y por tanto las constantes $c_n^{(m)}$ dependen de m :

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \sum_{n=1}^{N-1} c_n^{(m+1)} \xi_n. \quad (6.3.52)$$

Sin embargo, por (6.3.47),

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \mathbf{A}\mathbf{u}^{(m)} = \sum_{n=1}^{N-1} c_n^{(m)} \mathbf{A}\xi_n = \sum_{n=1}^{N-1} c_n^{(m)} \mu_n \xi_n, \quad (6.3.53)$$

donde hemos utilizado (6.3.51) y (6.3.49). Comparando (6.3.52) y (6.3.53), determinamos una ecuación en diferencias de primer orden con coeficientes constantes para $c_n^{(m)}$:

$$c_n^{(m+1)} = \mu_n c_n^{(m)}, \quad (6.3.54)$$

que se resuelve fácilmente,

$$c_n^{(m)} = c_n^{(0)} (\mu_n)^m, \quad (6.3.55)$$

y así

$$\boxed{\mathbf{u}^{(m)} = \sum_{n=1}^{N-1} c_n^{(0)} (\mu_n)^m \xi_n,} \quad (6.3.56)$$

donde $c_n^{(0)}$ se puede determinar a partir de la condición inicial.

Por (6.3.56) sabemos que el crecimiento de la solución cuando t crece (m crece), depende de $(\mu_n)^m$, donde $m = t/\Delta t$. Recordemos que, por ser μ_n real, se obtiene

$$(\mu_n)^m \Rightarrow \begin{cases} \text{crecimiento exponencial si } \mu_n > 1, \\ \text{decaimiento exponencial si } 0 < \mu_n < 1, \\ \text{oscilación convergente si } -1 < \mu_n < 0, \\ \text{oscilación divergente si } \mu_n < -1. \end{cases}$$

Esta solución numérica es inestable si algún autovalor es $\mu_n > 1$ o si $\mu_n < -1$.

Necesitamos obtener los $N-1$ autovalores μ de \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}\xi = \mu\xi. \quad (6.3.57)$$

Sea ξ_j la j -ésima componente de ξ . Como A está dada por (6.3.46), podemos reescribir (6.3.57) en la forma

$$s\xi_{j+1} + (1 - 2s)\xi_j + s\xi_{j-1} = \mu\xi_j, \quad (6.3.58)$$

con

$$\xi_0 = 0 \quad \text{y} \quad \xi_N = 0. \quad (6.3.59)$$

La Ecuación (6.3.58) es equivalente a

$$\xi_{j+1} + \xi_{j-1} = \left(\frac{\mu + 2s - 1}{s} \right) \xi_j. \quad (6.3.60)$$

Comparando (6.3.60) con (6.3.34), observamos que los autovalores μ de A son los autovalores λ de la ecuación en diferencias de segundo orden obtenida por separación de variables. Por tanto, [véase (6.3.20)],

$$\mu = 1 - 2s(1 - \cos(\alpha\Delta x)), \quad (6.3.61)$$

donde $\alpha = n\pi/L$, para $n = 1, 2, \dots, N - 1$. Como antes, el esquema es normalmente inestable si $s > \frac{1}{2}$. Para resumir este caso sencillo, los autovalores se pueden determinar explícitamente usando análisis de Fourier generalizado.

En problemas más difíciles es raro que se puedan obtener fácilmente los autovalores de matrices grandes. Algunas veces es útil el **teorema del círculo de Gershgorin** (véase el libro de Strang [1980] para una demostración elemental): los autovalores de una matriz $(N - 1) \times (N - 1)$ están contenidos en la unión de los círculos c_1, \dots, c_{N-1} del plano complejo, tales que cada c_i tiene su centro en el coeficiente i -ésimo de la diagonal y su radio es igual a la suma de los valores absolutos del resto de elementos de la fila i -ésima. Si a_{ij} son los coeficientes de la matriz, entonces cada autovalor μ está en alguno de los siguientes círculos:

$$|\mu - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N-1} |a_{ij}|. \quad (6.3.62)$$

Para nuestra matriz A , los elementos de la diagonal son todos iguales a $1 - 2s$ y el resto de la fila suma $2s$ (excepto por las filas primera y última, que suman s). Por tanto, dos círculos son $|\mu - (1 - 2s)| < s$ y los otros $N - 3$ son

$$|\mu - (1 - 2s)| < 2s. \quad (6.3.63)$$

De acuerdo con el teorema anterior, todos los autovalores están contenidos en la unión de todos estos círculos, que es el círculo (6.3.63), que se muestra en la Figura 6.3.9. Puesto que los autovalores μ son reales, se tiene

$$1 - 4s < \mu < 1.$$

Como la estabilidad está garantizada si $-1 \leq \mu \leq 1$, el teorema del círculo de Gershgorin implica que el esquema numérico es estable si $1 - 4s \geq -1$, es decir, $s \leq \frac{1}{2}$. Es conveniente resaltar que si $s > \frac{1}{2}$, el teorema del círculo de Gershgorin *no implica* que el esquema sea inestable.

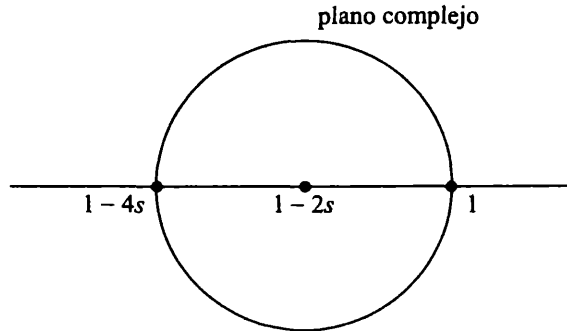


Figura 6.3.9: Círculos de Gershgorin para A correspondientes a la discretización de la ecuación del calor.

6.3.7. Problemas no homogéneos

La ecuación del calor con fuentes se puede resolver numéricamente de la misma forma. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \\ u(0, t) &= A(t), \\ u(L, t) &= B(t), \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

Como antes, utilizamos diferencias progresivas en el tiempo y diferencias centradas en el espacio. Obtenemos la siguiente aproximación numérica:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t} &= \frac{k}{(\Delta x)^2} \left(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)} \right) + Q(j \Delta x, m \Delta t), \\ u_0^{(m)} &= A(m \Delta t), \\ u_N^{(m)} &= B(m \Delta t), \\ u_j^{(0)} &= f(j \Delta x). \end{aligned}$$

La solución se obtiene fácilmente calculando $u_j^{(m+1)}$. Nuestro análisis de estabilidad para problemas homogéneos es válido también para problemas no homogéneos. Por ello, haremos nuestros cálculos eligiendo $s = k \Delta t / (\Delta x)^2 \leq \frac{1}{2}$.

6.3.8. Otros esquemas numéricos

El esquema numérico para la ecuación del calor, que utiliza diferencias centradas en el espacio y diferencias progresivas en el tiempo, es estable si $s = k \Delta t / (\Delta x)^2 \leq \frac{1}{2}$.

Por tanto, el paso en el tiempo debe ser pequeño, proporcional a $(\Delta x)^2$, y deberíamos intentar desarrollar un esquema numérico menos costoso. El error de truncamiento es la suma de varios términos, uno proporcional a Δt y el otro a $(\Delta x)^2$. Si s está fijo (por ejemplo, $s = \frac{1}{2}$), ambos errores son $O((\Delta x)^2)$, ya que $\Delta t = s(\Delta x)^2/k$.

Esquema de Richardson. Para conseguir un esquema menos costoso podríamos intentar unas diferencias en el tiempo más precisas. Richardson (en 1927) fue quien propuso en primer lugar utilizar diferencias centradas a la vez en el espacio y en el tiempo.

$$\frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m-1)}}{\Delta t} = \frac{k}{(\Delta x)^2} \left(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)} \right), \quad (6.3.64)$$

es decir

$$u_j^{(m+1)} = u_j^{(m-1)} + s \left(u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)} \right), \quad (6.3.65)$$

donde de nuevo $s = k\Delta t/(\Delta x)^2$. Aquí el error de truncamiento es la suma de un término $(\Delta t)^2$ y otro $(\Delta x)^2$. Aunque en algún sentido este esquema es más preciso que el anterior, no se debería usar nunca (6.3.65). El Ejercicio 6.3.12(a) demuestra que este método numérico es siempre inestable.

Esquema de Crank-Nicolson. Crank y Nicolson (en 1947) sugirieron una forma alternativa de utilizar diferencias centradas. La diferencia progresiva en el tiempo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t},$$

se puede interpretar como la diferencia centrada alrededor del punto $t + \Delta t/2$. El error al aproximar $(\partial u/\partial t)(t + \Delta t/2)$ es $O((\Delta t)^2)$. Entonces, discretizamos la segunda derivada en $t + \Delta t/2$ con un esquema de diferencias centradas. Como esto necesita del valor de las funciones en ese punto intermedio de la discretización del tiempo, tomamos la media en t y $t + \Delta t$. Esto nos da el esquema de Crank-Nicolson,

$$\frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t} = \frac{k}{2} \left[\frac{u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{j+1}^{(m+1)} - 2u_j^{(m+1)} + u_{j-1}^{(m+1)}}{(\Delta x)^2} \right]. \quad (6.3.66)$$

No es obvio, pero sin embargo es cierto (Ejercicio 6.3.13), que el error de truncamiento sigue siendo la suma de dos términos, uno $(\Delta x)^2$ y el otro $(\Delta t)^2$. La ventaja del método de Crank-Nicolson es que el esquema es estable para todo $s = k\Delta t/(\Delta x)^2$, tal como se demuestra en el Ejercicio 6.3.12(b). El valor Δt puede ser tan grande como queramos. Podemos elegir Δt proporcional a Δx , mejor que a $(\Delta x)^2$. El error es entonces $O((\Delta x)^2)$, una precisión equivalente a la del esquema anterior con mucho menos trabajo de computación. El esquema de Crank-Nicolson es un método práctico. Sin embargo, utiliza seis puntos (véase Fig. 6.3.10), en lugar de los cuatro del método estable más sencillo, tres de los cuales son en el tiempo posterior. No

podemos avanzar directamente hacia adelante en el tiempo usando (6.3.66), sino que, en lugar de eso, necesitamos la solución de un sistema lineal de $N - 1$ ecuaciones. Por eso decimos que el esquema (6.3.66) es **implícito**, mientras que (6.3.13) es **explícito**. En nuestro caso las matrices involucradas son tridiagonales y por tanto el sistema lineal puede resolverse fácilmente (y de forma relativamente poco costosa) por el método de eliminación de Gauss, incluso si N es grande.

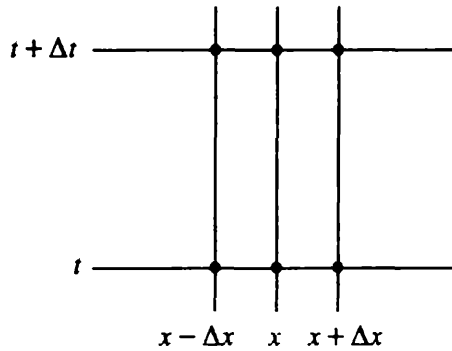


Figura 6.3.10: Esquema de Crank-Nicolson implícito.

6.3.9. Otros tipos de condiciones de contorno

Si nuestro dato es $\partial u / \partial x = g(t)$, en $x = 0$ (fijar la derivada en lugar de la función u), entonces debemos introducir una aproximación numérica para la condición de contorno. Como la discretización de la ecuación en derivadas parciales tiene un error $O((\Delta x)^2)$, podemos introducir un error del mismo orden en la condición de contorno utilizando diferencias centradas en el espacio:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x}.$$

En este caso, la condición de contorno $\partial u / \partial x = g(t)$, en $x = 0$, se convierte en

$$\frac{u_1^{(m)} - u_{-1}^{(m)}}{2\Delta x} = g(t) = g(m\Delta t) = g_m. \quad (6.3.67)$$

Utilizamos (6.3.67) para obtener una expresión de la temperatura en el punto *ficticio* ($x_{-1} = -\Delta x$):

$$u_{-1}^{(m)} = u_1^{(m)} - 2\Delta x g_m. \quad (6.3.68)$$

De esta manera, determinamos el valor inicial en el punto ficticio $u_{-1}^{(0)}$, necesario para calcular la temperatura en la frontera en tiempos posteriores vía la ecuación en diferencias parciales. Si utilizamos diferencias progresivas en el tiempo y centradas en el espacio, podemos aplicar ahora (6.3.16), desde $j = 0$ hasta $j = N - 1$. Por ejemplo, en $x = 0$ ($j = 0$), se tiene:

$$\begin{aligned} u_0^{(m+1)} &= u_0^{(m)} + s \left(u_1^{(m)} - 2u_0^{(m)} + u_{-1}^{(m)} \right) \\ &= u_0^{(m)} + s \left(u_1^{(m)} - 2u_0^{(m)} + u_1^{(m)} - 2\Delta x g_m \right), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado (6.3.68). Vemos así cómo se puede resolver numéricamente una ecuación en derivadas parciales cuando las condiciones de contorno son sobre la derivada: el punto ficticio se elimina entre la condición de contorno y la ecuación en derivadas parciales.

EJERCICIOS 6.3

- 6.3.1.** (a) Demostrar que el error de truncamiento (6.3.3) en nuestro esquema numérico, se hace mucho más pequeño si $k(\Delta t)/(\Delta x)^2 = \frac{1}{6}$. *Indicación:* u satisface la ecuación en derivadas parciales de (6.3.1).
- (b) Determinar el orden de magnitud del error de truncamiento para el valor $k\Delta t/(\Delta x)^2 = \frac{1}{6}$.

- 6.3.2.** Demostrar que (6.3.34) sólo se cumple si $|Q| = 1$, tomando $\phi_j = Q^j$. *Indicación:* demostrar primero que se verifica

$$Q^2 + \left(\frac{-\lambda + 1 - 2s}{s} \right) Q + 1 = 0.$$

- 6.3.3.** Definimos $L(\phi) = \phi_{j+1} + \phi_{j-1} + \gamma\phi_j$.

- (a) Demuéstrese que $uL(v) - vL(u) = w_{j+1} - w_j$, donde $w_j = u_{j-1}v_j - v_{j-1}u_j$.
- (b) Como la suma es análoga a la integración, deducir la versión discreta de la fórmula de Green

$$\sum_{i=1}^{N-1} [uL(v) - vL(u)] = w_N - w_0.$$

- (c) Demostrar que el miembro derecho de la fórmula del apartado (b) se anula si u y v satisfacen las condiciones de contorno homogéneas (6.3.18).
- (d) Si $\gamma = (1 - 2s)/s$, las autofunciones ϕ satisfacen $L(\phi) = (\lambda/s)\phi$. Demostrar que las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales en el sentido de que

$$\sum_{i=1}^{N-1} \phi_i \psi_i = 0.$$

- *6.3.4.** (a) Utilizando el Ejercicio 6.3.3, determinar los coeficientes β_n de (6.3.24) a partir de las condiciones iniciales $u_j^{(0)} = f_j$.
- (b) Evaluar la constante de normalización.

$$\sum_{j=1}^{N-1} \text{sen}^2 \frac{n\pi j}{N}.$$

para cada autofunción (es decir, con n fijo). *Indicación:* usar la fórmula del ángulo doble y la suma de una serie geométrica.

- 6.3.5.** Demostrar que, si se utiliza el modo más inestable de nuestro esquema numérico para la ecuación del calor, es decir, tomando $s > \frac{1}{2}$, el signo de la solución cambia de un punto de la malla al siguiente.
- 6.3.6.** Evaluar $1/[1 - \cos(N - 1)\pi/N]$ para los siguientes casos:
 (a) $N = 4$ (b) $N = 6$ (c) $N = 8$ *(d) $N = 10$
 (e) Asintóticamente para N grande
 ¿A qué conclusiones relativas a la estabilidad se llega?
- 6.3.7.** Calcular numéricamente soluciones de la ecuación del calor con la temperatura inicialmente dada por la Figura 6.3.4. Usar (6.3.16) - (6.3.18), con $N = 10$. Hacerlo para varios valores de s (discutir la estabilidad):
 (a) $s = 0.49$ (b) $s = 0.50$ (c) $s = 0.51$ (d) $s = 0.52$
- 6.3.8.** ¿Bajo qué condición una solución inicialmente positiva, $u(x, 0) > 0$, seguirá siendo positiva, $u(x, t) > 0$, con nuestro esquema numérico (6.3.9) para la ecuación del calor?
- 6.3.9.** Considérese el problema

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad \text{con} \quad u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(L) = 0.$$

- (a) Deducir un sistema de ecuaciones lineales para aproximar $u(x)$, usando la aproximación por diferencias centradas para la derivada segunda y haciendo una malla de anchura $L/3$ (véase la Sección 6.3.2). Usar la notación $x_i = i\Delta x$, $f_i = f(x_i)$, y $u_i = u(x_i)$. Nota: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}L$, $x_2 = \frac{2}{3}L$, $x_3 = L$.
- *(b) Escribir el sistema en forma matricial $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$. ¿Qué es \mathbf{A} ?
- (c) Calcular u_1 y u_2 .
- (d) Demostrar que se puede definir una matriz \mathbf{G} "función de Green", de manera que:

$$u_i = \sum_j G_{ij} f_j \quad (\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{f}).$$

¿Qué es \mathbf{G} ? Demostrar que es simétrica, $G_{ij} = G_{ji}$.

- 6.3.10.** Supongamos que en un paseo aleatorio, en cada Δt la probabilidad de moverse hacia la derecha una longitud Δx es a , la probabilidad de moverse hacia a izquierda esa misma longitud es también a , y la probabilidad de permanecer quieto en el sitio es b (por tanto $2a + b = 1$).
- (a) Formular la ecuación en diferencias para este problema.

- * (b) Deducir una ecuación en derivadas parciales que rija este proceso cuando $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$, tal que

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \frac{k}{s}.$$

- (c) Supongamos que hay un muro (o acantilado) a la derecha en $x = L$, con la propiedad de que *después* de llegar al mismo, la probabilidad de moverse hacia la izquierda es a , hacia la derecha es c , y permanecer quieto $1 - a - c$. Supongamos que nadie vuelve de $x > L$. ¿Qué condición se satisface en el muro? ¿Cuál es la condición de contorno resultante para la ecuación en derivadas parciales? Tomar $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$ como antes. Considérense los casos $c = 0$ y $c \neq 0$.

- 6.3.11.** Supongamos que en un paseo aleatorio bidimensional, en cada paso de tiempo Δt es igualmente probable moverse una longitud Δx hacia la derecha o hacia la izquierda, o moverse una longitud Δy hacia arriba o hacia abajo (tal como se ilustra en la Figura 6.3.11).

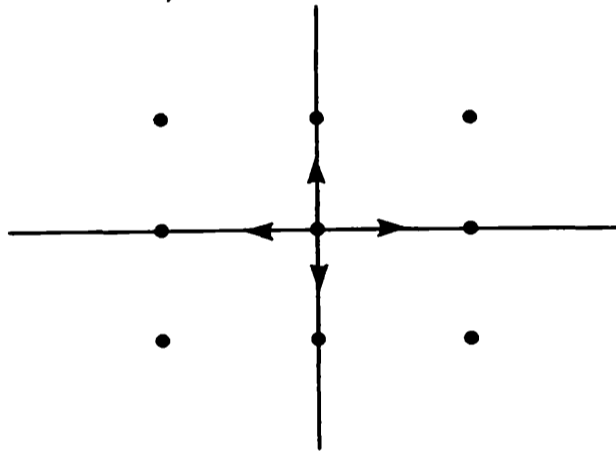


Figura 6.3.11

- (a) Formular la ecuación en diferencias para este problema.
 (b) Deducir una ecuación en derivadas parciales asociada a este proceso cuando $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$, de manera que

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \frac{k_1}{s} \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{(\Delta y)^2}{\Delta t} = \frac{k_2}{s}.$$

- 6.3.12.** Utilizar una determinación simplificada de la estabilidad (es decir, sustituir $u_j^{(m)} = e^{i\alpha x} Q^{t/\Delta t}$), para estudiar:
- (a) El esquema de Richardson (6.3.65) de diferencias centradas en el espacio y en el tiempo para la ecuación del calor.
 (b) El esquema de Crank-Nicolson (6.3.66) para la ecuación del calor.
- 6.3.13.** Estudiar el error de truncamiento para el método de Crank-Nicolson (6.3.66).
- 6.3.14.** Para las siguientes matrices:

1. Calcular los autovalores.
2. Calcular los círculos de Gershgorin definidos por las filas.
3. Comparar (1) y (2) de acuerdo al teorema de Gershgorin.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad *(c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}$$

6.3.15. Para los ejemplos del Ejercicio 6.3.14, calcular los círculos de Gershgorin definidos por las columnas. Enunciar y comprobar el correspondiente teorema para estos círculos.

6.3.16. Analizar detalladamente la estabilidad del esquema de diferencias para la ecuación del calor, definido por medio de diferencias progresivas en el tiempo y diferencias centradas en el espacio, si las condiciones de contorno son

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L) = 0.$$

Indicación: véase la Sección 6.3.9. Comparar el resultado con el obtenido para las condiciones de contorno $u(0) = 0$ y $u(L) = 0$.

6.3.17. Programar en un ordenador el esquema numérico (6.3.9) para resolver la ecuación del calor $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2$ con $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = \text{sen } \pi x$, tomando $\Delta x = 1/100$. Comparar con la solución analítica en $x = 1/2$, $t = 1$, calculando el error cometido (es decir, la diferencia entre la solución analítica y la solución numérica). Elegir Δt para que:

(a) $s = 0.4$ (b) $s = 0.6$

(c) Para mejorar los cálculos del apartado (a), tómesese $\Delta x = 1/200$, pero manteniendo $s = 0.4$

(d) Comparar los errores de los apartados (a) y (c).

6.4. Ecuación del calor bidimensional

Se pueden aplicar ideas similares para calcular soluciones numéricas de la ecuación del calor bidimensional,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Para ello, introduciremos una malla (o retículo) bidimensional, y supondremos por conveniencia que $\Delta x = \Delta y$. Utilizando diferencias progresivas en el tiempo y la

fórmula para el laplaciano basada en diferencias centradas en x y en y [véase (6.2.17)], obtenemos

$$\frac{u_{j,l}^{(m+1)} - u_{j,l}^{(m)}}{\Delta t} = \frac{k}{(\Delta x)^2} \left[u_{j+1,l}^{(m)} + u_{j-1,l}^{(m)} + u_{j,l+1}^{(m)} + u_{j,l-1}^{(m)} - 4u_{j,l}^{(m)} \right], \quad (6.4.1)$$

donde $u_{j,l}^{(m)} \approx u(j\Delta x, l\Delta y, m\Delta t)$. Avanzamos en el tiempo usando (6.4.1).

Análisis de la estabilidad. Como antes, el esquema numérico puede ser inestable. Realicemos un análisis simplificado de la estabilidad, ignorando las condiciones de contorno. Investiguemos para ello el posible crecimiento de las ondas periódicas en la variable espacial, sustituyendo la expresión

$$u_{j,l}^{(m)} = Q^{t/\Delta t} e^{i(\alpha x + \beta y)} \quad (6.4.2)$$

en la Fórmula (6.4.1). Directamente se obtiene

$$\begin{aligned} Q &= 1 + s \left(e^{i\alpha\Delta x} + e^{-i\alpha\Delta x} + e^{i\beta\Delta y} + e^{-i\beta\Delta y} - 4 \right) \\ &= 1 + 2s(\cos \alpha\Delta x + \cos \beta\Delta y - 2), \end{aligned}$$

donde $s = k\Delta t/(\Delta x)^2$ y $\Delta x = \Delta y$. Para asegurar la estabilidad debe ser $-1 < Q < 1$, de lo que deducimos la condición de estabilidad para la ecuación del calor bidimensional,

$$s = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{4}. \quad (6.4.3)$$

Ejemplo. A modo de ejemplo elemental en el que no disponemos de solución exacta, consideremos la ecuación del calor en una región con forma de L , como la que se muestra en la Figura 6.4.1. Suponemos que la temperatura es inicialmente nula, y los datos en la frontera son $u = 1000$ en $x = 0$, y $u = 0$ en el resto de la frontera. Efectuaremos los cálculos con el mayor paso del tiempo que hace que el esquema sea estable, es decir, $s = \frac{1}{4}$ [$\Delta t = (\Delta x)^2/4k$], con lo que (6.4.1) se convierte en

$$u_{j,l}^{(m+1)} = \frac{\left[u_{j+1,l}^{(m)} + u_{j-1,l}^{(m)} + u_{j,l+1}^{(m)} + u_{j,l-1}^{(m)} \right]}{4}. \quad (6.4.4)$$

En este esquema numérico la temperatura en el instante siguiente es la media de los cuatro puntos vecinos de la malla (o retículo) en el momento actual. En las Figuras 6.4.2 y 6.4.3, representamos la solución numérica que se obtiene tomando $\Delta x = \frac{1}{10}$ ($\Delta t = 1/400k$). Las líneas continuas representan contornos de temperatura aproximadamente constantes (isotermas), y nos muestran cómo la energía térmica invade el interior de la región.

La ecuación en diferencias parciales es resoluble de forma directa si la frontera se compone enteramente de puntos de la malla. En general, esto no es así y en ese caso tendremos que aplicar algún procedimiento más complicado para la condición de contorno.

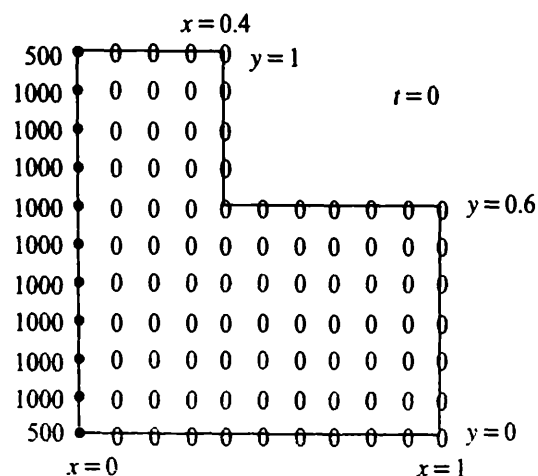


Figura 6.4.1: Condición inicial.

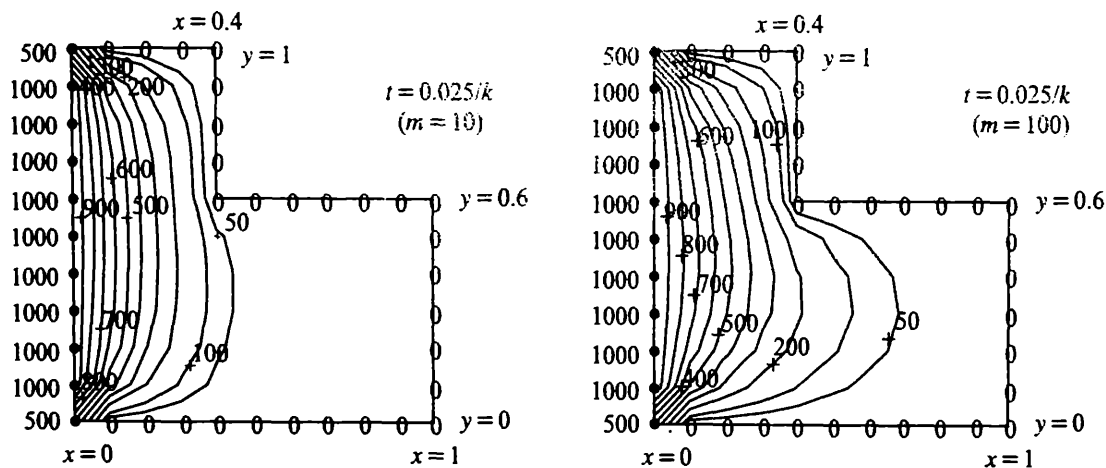


Figura 6.4.2: Cálculo numérico de la temperatura en una región con forma de L .

EJERCICIOS 6.4

- *6.4.1.** Deducir la condición de estabilidad (ignorando la condición de contorno) para la ecuación del calor bidimensional, si $\Delta x \neq \Delta y$.
- 6.4.2.** Deducir la condición de estabilidad (incluyendo el efecto de la condición de contorno) para la ecuación del calor bidimensional, con $u(x, y) = 0$ en los cuatro lados de un cuadrado, si $\Delta x = \Delta y$.
- 6.4.3.** Deducir la condición de estabilidad (ignorando la condición de contorno) para la ecuación del calor tridimensional, si $\Delta x = \Delta y = \Delta z$.

6.4.4. Resolver numéricamente la ecuación del calor en un rectángulo $0 < x < 1$, $0 < y < 2$, con temperatura inicial nula. Supóngase que las condiciones de contorno son nulas en tres lados, pero $u = 1$ en uno de los lados largos.

6.5. Ecuación de ondas

Podemos también calcular soluciones de la ecuación de ondas unidimensional introduciendo aproximaciones por diferencias finitas. Utilizando **diferencias centradas en el espacio y en el tiempo**, la ecuación de ondas,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.5.1)$$

se convierte en la siguiente ecuación en diferencias parciales,

$$\frac{u_j^{(m+1)} - 2u_j^{(m)} + u_j^{(m-1)}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}}{(\Delta x)^2}. \quad (6.5.2)$$

El error de truncamiento es la suma de un término de orden $O((\Delta x)^2)$ y uno de orden $O((\Delta t)^2)$. Podemos avanzar en el tiempo despejando $u_j^{(m+1)}$ en (6.5.2). Obsérvese que en esta fórmula aparecen tres niveles de tiempo, tal y como se ilustra en la Figura 6.5.1. De esta manera, para empezar a calcular $u(x, t)$ se necesita su valor en los tiempos “iniciales”, $t = 0$ y $t = -\Delta t$. Utilizamos entonces, para calcularlos, los datos iniciales asociados a la ecuación de ondas, la posición $u(x, 0) = f(x)$ y la velocidad $\partial u / \partial t(x, 0) = g(x)$. Usando diferencias centradas en el tiempo para $\partial u / \partial t$ [y así mantener un error de truncamiento de orden $O((\Delta t)^2)$], obtenemos

$$u_j^{(0)} = f(x_j) = f(j\Delta x), \quad (6.5.3)$$

$$\frac{u_j^{(1)} - u_j^{(-1)}}{2\Delta t} = g(x_j) = g(j\Delta x). \quad (6.5.4)$$

Para comenzar el esquema debemos determinar $u_j^{(-1)}$. Al imponer las condiciones iniciales, se obtiene el sistema (6.5.3) y (6.5.4), constituido por dos ecuaciones con tres incógnitas, $u_j^{(-1)}$, $u_j^{(0)}$ y $u_j^{(1)}$. La ecuación en diferencias parciales en $t = 0$ proporciona una tercera ecuación:

$$u_j^{(1)} = 2u_j^{(0)} - u_j^{(-1)} + \frac{c^2}{(\Delta x / \Delta t)^2} (u_{j-1}^{(0)} - 2u_j^{(0)} + u_{j+1}^{(0)}). \quad (6.5.5)$$

Se puede eliminar el término $u_j^{(1)}$ de (6.5.4) y (6.5.5), ya que conocemos $u_j^{(0)}$ a partir de (6.5.3). De esta forma, podemos despejar $u_j^{(-1)}$. Una vez que conocemos $u_j^{(-1)}$ y

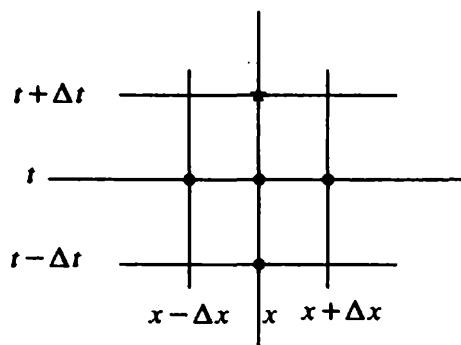


Figura 6.5.1: Avanzando en el tiempo en la ecuación de ondas.

$u_j^{(0)}$, los últimos valores de u se pueden calcular utilizando (6.5.2). Las condiciones de contorno se pueden analizar igual que antes.

Estabilidad. Nuestra limitada experiencia debería ya sugerir que el análisis de la estabilidad es importante. Para determinar si unas ondas periódicas en la variable espacial crecen en el tiempo, sustituimos la expresión

$$u_j^{(m)} = Q^{t/\Delta t} e^{i\alpha x}, \quad (6.5.6)$$

en (6.5.2), obteniendo

$$Q - 2 + \frac{1}{Q} = \sigma, \quad (6.5.7)$$

donde

$$\sigma = \frac{c^2}{(\Delta x/\Delta t)^2} (e^{i\alpha\Delta x} - 2 + e^{-i\alpha\Delta x}) = \frac{2c^2}{(\Delta x/\Delta t)^2} [\cos(\alpha\Delta x) - 1]. \quad (6.5.8)$$

La Ecuación (6.5.7) es una ecuación cuadrática para Q , ya que en (6.5.2) aparecen tres niveles del tiempo y dos diferencias en el tiempo:

$$Q^2 - (\sigma + 2)Q + 1 = 0, \quad \text{que implica} \quad Q = \frac{\sigma + 2 \pm \sqrt{(\sigma + 2)^2 - 4}}{2}. \quad (6.5.9)$$

Las dos raíces corresponden a dos formas en las que las ondas evolucionan en el tiempo. Si $-2 < \sigma + 2 < 2$, las raíces son complejas conjugadas. En este caso (como ya estudiamos anteriormente),

$$Q^m = (re^{i\theta})^m = r^m e^{im\theta},$$

donde $r = |Q|$ y $\theta = \arg Q$. Como se tiene

$$|Q|^2 = \frac{(\sigma + 2)^2}{4} + \frac{4 - (\sigma + 2)^2}{4} = 1,$$

la solución oscila para x fijo, si $-2 < \sigma + 2 < 2$, a medida que crece m (el tiempo). Este hecho es análogo a lo que ocurre con la propia ecuación de ondas, que permite

soluciones periódicas en el tiempo cuando la parte espacial es periódica (por ejemplo, $\text{sen}(n\pi x/L) \cos(n\pi ct/L)$). Si $\sigma + 2 > 2$ o $\sigma + 2 < -2$, las raíces son reales con producto igual a 1 [véase (6.5.9)]. Entonces, una raíz será mayor que 1 en valor absoluto, dando lugar a un comportamiento inestable.

La solución será inestable si $-2 < \sigma + 2 < 2$, es decir, si $-4 < \sigma < 0$. Por (6.5.8) concluimos que nuestro esquema numérico es estable si

$$\boxed{\frac{c}{\Delta x/\Delta t} \leq 1}, \quad (6.5.10)$$

lo que se conoce como **condición de estabilidad de Courant** (para la ecuación de ondas). Aquí, c es la velocidad de propagación de señales de la ecuación de ondas y $\Delta x/\Delta t$ es la velocidad de propagación de señales para la discretización de la ecuación de ondas. Así pues, concluimos que para tener estabilidad, **el esquema numérico debe tener una velocidad de propagación mayor que la de la ecuación de ondas misma**. De esta manera, el esquema numérico será capaz de reflejar la propagación de las señales reales. La condición de estabilidad limita de nuevo el tamaño del paso en el tiempo, ya que en este caso,

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}. \quad (6.5.11)$$

Convergencia. La parte dependiente del tiempo,

$$Q^{t/\Delta t} = e^{i \frac{t}{\Delta t} \arg Q}, \quad (6.5.12)$$

oscila si $-2 < \sigma + 2 < 2$ (el criterio de estabilidad). Notemos que, si $\alpha\Delta x$ es pequeño (donde α es el número de onda, usualmente $n\pi/L$), entonces $\cos(\alpha\Delta x) \approx 1 - \frac{1}{2}(\alpha\Delta x)^2$. Por tanto, el parámetro σ es pequeño y negativo,

$$\sigma \approx 1 \frac{1}{2} (\alpha\Delta x)^2 \frac{2\sigma^2}{(\Delta x/\Delta t)^2}.$$

En este caso la frecuencia temporal de las soluciones de la ecuación en diferencias parciales es

$$\frac{\arg Q}{\Delta t} = \frac{\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{4 - (\sigma + 2)^2}}{\sigma + 2} \right)}{\Delta t} \approx \frac{\left(\frac{\sqrt{4 - (\sigma + 2)^2}}{\sigma + 2} \right)}{\Delta t} \approx \frac{(\sqrt{-\sigma})}{\Delta t} \approx c\alpha, \quad (6.5.13)$$

pues σ es muy pequeño y negativo, y $\tan \phi \approx \phi$ para ángulos ϕ pequeños. La Ecuación (6.5.13) demuestra que la frecuencia temporal de la ecuación en diferencias parciales se aproxima a la frecuencia de la ecuación en derivadas parciales. Esto quizá esté más claro recordando que α es el número de onda, usualmente $n\pi/L$. Por

tanto, si $\alpha\Delta x$ es pequeño, la ecuación en diferencias parciales tiene soluciones que son aproximadamente las mismas que las de la ecuación en derivadas parciales:

$$Q^{t/\Delta t} e^{i\alpha x} = e^{i\frac{1}{\Delta t} \arg Q} e^{i\alpha x} \approx e^{i\alpha x} e^{i\alpha ct}.$$

También se puede demostrar que el error (diferencia entre las soluciones de la ecuación en diferencias y de la ecuación en derivadas parciales para x y t fijos) es del orden $O(\Delta t)$, si $\alpha\Delta x$ es pequeño. Es usual efectuar los cálculos manteniendo fijo el cociente $\Delta x/\Delta t$. Para mejorar los cálculos, disminuimos el paso en espacio Δx , por ejemplo dividiéndolo por la mitad, pero debemos recordar que el paso en tiempo Δt se dividirá también por dos, con lo que los errores numéricos se dividen también por dos. Todos los cálculos se deben hacer con un valor s que cumpla la condición de estabilidad de Courant (6.5.10).

EJERCICIOS 6.5

6.5.1. Modificar la condición de estabilidad de Courant para la ecuación de ondas, para que tenga en cuenta las condiciones de contorno $u(0) = 0$ y $u(L) = 0$.

6.5.2. Consideremos la ecuación de ondas sujeta a las condiciones iniciales,

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{L}{4} < x < \frac{3L}{4}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

y a las condiciones de contorno,

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0. \end{aligned}$$

En cada uno de los casos siguientes, utilizar una malla de nueve puntos interiores y resolver el problema anterior utilizando diferencias centradas en el espacio y en el tiempo. Comparar con la solución exacta.

(a) $\Delta t = \Delta x/2c,$

(b) $\Delta t = \Delta x/c,$

(c) $\Delta t = 2\Delta x/c.$

6.5.3. La ecuación de ondas admite soluciones en la forma $u(x, t) = f(x - ct)$, para cualquier función arbitraria f . Demostrar que se tiene la propiedad análoga para la ecuación en diferencias correspondiente, si $c = \Delta x/\Delta t$, es decir, $u_j^m = f(x_j - ct_m)$ es una solución de (6.5.2) para f arbitraria.

6.5.4. Demostrar que la conclusión del Ejercicio 6.5.3 no es válida si $c \neq \Delta x/\Delta t$.

6.5.5. Consideremos la ecuación de ondas de primer orden

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

(a) Obtener una ecuación en diferencias parciales utilizando diferencias progresivas en el tiempo y diferencias centradas en el espacio.

*(b) Analizar la estabilidad de este esquema (sin condiciones de contorno).

***6.5.6.** Modificar el Ejercicio 6.5.5 con diferencias centradas en el espacio y en el tiempo.

6.5.7. Programar en un ordenador el esquema numérico (6.5.2) para resolver la ecuación de ondas $\partial u / \partial t^2 = \partial^2 u / \partial x^2$, con $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = \sin \pi x$, y $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$, con $\Delta x = 1/100$. Utilizar diferencias progresivas para la condición inicial de la primera derivada, $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$, en lugar de las diferencias centradas (3.5.4). Comparar con la solución analítica en $x = 1/2$, $t = 1$, calculando el error cometido (es decir, la diferencia entre la solución analítica y la solución numérica). Elegir Δt de manera que:

(a) $\Delta x / \Delta t = 1.5$ (b) $\Delta x / \Delta t = 0.5$

(c) Para mejorar los cálculos del apartado (a), tómesese $\Delta x = 1/200$, pero manteniendo $\Delta x / \Delta t = 1.5$

(d) Comparar los errores de los apartados (a) y (c).

6.6. Ecuación de Laplace

Introducción. La ecuación de Laplace,

$$\boxed{\nabla^2 u = 0,} \tag{6.6.1}$$

se plantea normalmente en una región en la que toda la frontera debe cumplir una misma condición. No hay variable tiempo, luego un método de diferencias finitas se comportará aquí de forma diferente a como lo hace en las ecuaciones del calor o de ondas.

Utilizando una discretización habitual por diferencias centradas, la ecuación de Laplace en dos dimensiones se convierte en la siguiente ecuación en diferencias (suponiendo que $\Delta x = \Delta y$):

$$\frac{u_{j+1,l} + u_{j-1,l} + u_{j,l+1} + u_{j,l-1} - 4u_{j,l}}{(\Delta x)^2} = 0, \tag{6.6.2}$$

donde es de esperar que $u_{j,l} \approx u(j \Delta x, l \Delta y)$.

La condición de contorno se puede analizar de la misma forma que se hizo para las ecuaciones del calor y de ondas. En el caso más sencillo está dada a lo largo

de la frontera (formada por puntos de la malla). Las temperaturas en los puntos interiores de la malla son las incógnitas. La Ecuación (6.6.2) es válida en cada uno de esos puntos interiores. Algunos de los términos de (6.6.2) están determinados por las condiciones de contorno, pero la mayoría de ellos son incógnitas. La Ecuación (6.6.2) se puede escribir como un sistema lineal. Podemos utilizar la eliminación gaussiana pero, en la práctica, el número de ecuaciones y de incógnitas (que es igual al número de puntos interiores de la malla) es demasiado grande para conseguir cálculos numéricos eficientes. Esto es especialmente cierto en dimensión tres, donde incluso un retículo sencillo $20 \times 20 \times 20$ generará 8.000 ecuaciones lineales con 8.000 incógnitas.

A partir de la Ecuación (6.6.2), obtenemos

$$u_{j,l} = \frac{u_{j+1,l} + u_{j-1,l} + u_{j,l+1} + u_{j,l-1}}{4}. \quad (6.6.3)$$

La temperatura $u_{j,l}$ debe ser la media de sus cuatro vecinos. Por tanto, la solución de la discretización de la ecuación de Laplace cumple una propiedad del valor medio. También a partir de (6.6.3) podemos demostrar principios del máximo y del mínimo discretos. Estas propiedades son análogas a las de la propia ecuación de Laplace (véase la Sección 2.5.3).

Iteración de Jacobi. En lugar de resolver (6.6.3) de forma exacta, es más usual utilizar un esquema de aproximación iterativo. No nos debemos preocupar mucho por los errores al resolver (6.6.3), *si son pequeños*, ya que (6.6.3) es ya una aproximación de la ecuación de Laplace.

No podemos resolver (6.6.3) directamente porque no conocemos las cuatro temperaturas vecinas. Sin embargo, el siguiente procedimiento nos dará la solución. Podemos hacer una estimación inicial de la solución y utilizar el principio de la media (6.6.3) para “actualizar” la solución:

$$u_{j,l}^{(\text{nueva})} = \frac{1}{4} (u_{j+1,l} + u_{j-1,l} + u_{j,l-1} + u_{j,l+1})^{(\text{antigua})}.$$

Podemos continuar este proceso, que se conoce con el nombre de **iteración de Jacobi**. Utilizaremos la notación $u_{j,l}^{(0)}$ para la estimación inicial, $u_{j,l}^{(1)}$ para la primera iteración (determinada a partir de $u_{j,l}^{(0)}$), $u_{j,l}^{(2)}$ para la segunda iteración (determinada a partir de $u_{j,l}^{(1)}$), y así sucesivamente. Entonces, la iteración $(m + 1)$ satisface

$$u_{j,l}^{(m+1)} = \frac{1}{4} (u_{j+1,l}^{(m)} + u_{j-1,l}^{(m)} + u_{j,l+1}^{(m)} + u_{j,l-1}^{(m)}). \quad (6.6.4)$$

Si la iteración converge, es decir, si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_{j,l}^{(m+1)} = v_{j,l},$$

entonces (6.6.4) demuestra que $v_{j,l}$ cumple la discretización de la ecuación de Laplace (6.6.3).

El esquema dado por (6.6.4) es adecuado para ser programado en un ordenador. Como no podemos hacer $m \rightarrow \infty$, en la práctica detenemos el proceso iterativo cuando $u_{j,l}^{(m+1)} - u_{j,l}^{(m)}$ es pequeño (para todo j y l). Entonces $u_{j,l}^{(m+1)}$ será una aproximación razonablemente buena a la solución exacta $v_{j,l}$ (recordemos que $v_{j,l}$ es solamente una solución aproximada de la ecuación de Laplace).

Los cambios que tienen lugar en cada iteración se pueden enfatizar escribiendo la iteración de Jacobi como

$$u_{j,l}^{(m+1)} = u_{j,l}^{(m)} + \frac{1}{4} \left(u_{j+1,l}^{(m)} + u_{j-1,l}^{(m)} + u_{j,l+1}^{(m)} + u_{j,l-1}^{(m)} - 4u_{j,l}^{(m)} \right). \quad (6.6.5)$$

De esta forma, la iteración de Jacobi es la discretización estándar (con diferencias centradas en el espacio y progresivas en el tiempo) de la ecuación de difusión bidimensional estándar, $\partial u / \partial t = k(\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2)$, con $s = k \Delta t / (\Delta x)^2 = \frac{1}{4}$, véase (6.4.4). Cada iteración corresponde a un paso en el tiempo, $\Delta t = (\Delta x)^2 / 4k$. El ejemplo anterior de resolución de la ecuación del calor en una región con forma de L (véase la Sección 6.4) es exactamente la iteración de Jacobi. Para m grande vemos que la solución se aproxima a valores independientes de m . La distribución espacial resultante es una solución aproximada bastante precisa de la versión discreta de la ecuación de Laplace (con las condiciones de contorno dadas).

Aunque la iteración de Jacobi converge, demostraremos que lo hace muy lentamente. En un primer análisis de la velocidad de convergencia, estudiamos el decaimiento de las oscilaciones espaciales para un cuadrado $L \times L$ ($\Delta x = \Delta y = L/N$). En (6.6.4), m es análoga al tiempo ($t = m\Delta t$), por lo que esta ecuación es análoga al tipo de ecuación en diferencias analizada con anterioridad. Por tanto, sabemos que hay soluciones especiales en la forma

$$u_{j,l}^{(m)} = Q^m e^{i(\alpha x + \beta y)}, \quad (6.6.6)$$

donde $\alpha = n_1\pi/L$, $\beta = n_2\pi/L$, $n_j = 1, 2, \dots, N - 1$. En este cálculo suponemos que se verifican condiciones de contorno nulas. La solución debería converger a cero cuando $m \rightarrow \infty$ y determinaremos la velocidad de convergencia para saber cuántas iteraciones serán necesarias para obtener una aproximación razonable. Sustituyendo (6.6.6) en (6.6.4) llegamos a

$$Q = \frac{1}{4} \left(e^{i\alpha\Delta x} + e^{-i\alpha\Delta x} + e^{i\beta\Delta y} + e^{-i\beta\Delta y} \right) = \frac{1}{2} (\cos \alpha\Delta x + \cos \beta\Delta y).$$

Como $-1 < Q < 1$ para todo α y β , se sigue de (6.6.6) que $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{j,l}^{(m)} = 0$, como queríamos. Sin embargo, la convergencia puede ser muy lenta. La velocidad de convergencia más lenta ocurre para los valores de Q más cercanos a 1. Esto ocurre

para los valores menores y mayores de α y β , $\alpha = \beta = \pi/L$ y $\alpha = \beta = (N-1)\pi/L$, en cuyo caso

$$|Q| = \cos \frac{\pi \Delta x}{L} = \cos \frac{\pi}{N} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{N^2}, \quad (6.6.7)$$

pues $\Delta x = L/N$ y N es grande. En este caso, $|Q|^m$ toma aproximadamente el valor $\left[1 - \frac{1}{2}(\pi/N)^2\right]^m$, que representa el error asociado con la peor oscilación espacial en el cuadrado. Si N es grande, este error converge lentamente a cero. Por ejemplo, para que el error se reduzca por un factor $\frac{1}{2}$, debemos tener

$$\left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2\right]^m = \frac{1}{2},$$

de donde, utilizando logaritmos naturales para calcular m , obtenemos

$$m \log \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2\right] = -\log 2.$$

Como π/N es pequeño y, según la serie de Taylor, $\log(1-x) \approx -x$, para x pequeño, se sigue que el número m de iteraciones necesarias, cuando se utiliza el método de Jacobi, para dividir el error por dos es, aproximadamente,

$$m = \frac{\log 2}{\frac{1}{2}(\pi/N)^2} = N^2 \frac{2 \log 2}{\pi^2},$$

El número de iteraciones necesario para reducir el error solamente por la mitad puede ser bastante grande, proporcional a N^2 , que es el número de puntos de la malla al cuadrado.

Iteración de Gauss-Seidel. La iteración de Jacobi consume mucho tiempo de cálculo, pero existe un esquema que es más fácil de implementar y que converge más rápidamente a la solución de la versión discretizada de la ecuación de Laplace. Es usual en la iteración de Jacobi obtener primero la temperatura actualizada, $u_{j,l}^{(m+1)}$, en la región espacial inferior izquierda. Después, recorreremos completamente una fila de puntos de la malla (de izquierda a derecha), antes de actualizar la temperatura en la fila siguiente por encima (de nuevo de izquierda a derecha), tal como se indica en la Figura 6.6.1. Por ejemplo,

$$u_{3,8}^{(m+1)} = \frac{1}{4} \left(u_{2,8}^{(m)} + u_{3,7}^{(m)} + u_{3,9}^{(m)} + u_{4,8}^{(m)} \right).$$

En la iteración de Jacobi utilizamos los valores antiguos de $u_{2,8}^{(m)}$, $u_{3,7}^{(m)}$, $u_{3,9}^{(m)}$ y $u_{4,8}^{(m)}$ aunque hayan sido calculados ya los valores nuevos para dos de ellos, $u_{3,7}^{(m+1)}$ y $u_{2,8}^{(m+1)}$. Al hacer una implementación por ordenador de la iteración de Jacobi no podemos olvidar inmediatamente los valores antiguos (como hemos demostrado, algunos son necesarios incluso después de haber calculado valores nuevos).

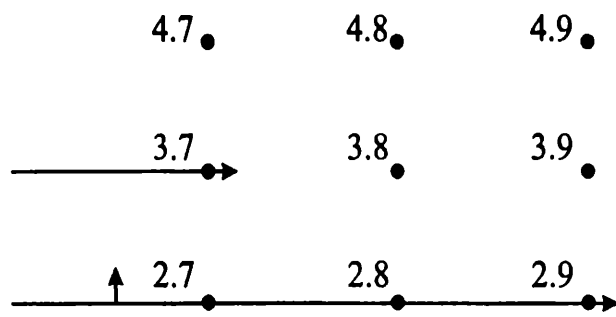


Figura 6.6.1: Iteración Gauss-Seidel.

El cálculo será más fácil de programar si se eliminan los valores antiguos cuando se calculan los nuevos. Por tanto, proponemos utilizar las temperaturas actualizadas cuando las conocemos. Por ejemplo,

$$u_{3,8}^{(m+1)} = \frac{1}{4} \left(u_{2,8}^{(m+1)} + u_{4,8}^{(m)} + u_{3,7}^{(m+1)} + u_{3,9}^{(m)} \right).$$

En general, obtenemos

$$u_{j,l}^{(m+1)} = \frac{1}{4} \left(u_{j-1,l}^{(m+1)} + u_{j+1,l}^{(m)} + u_{j,l-1}^{(m+1)} + u_{j,l+1}^{(m)} \right), \quad (6.6.8)$$

que se conoce como **iteración de Gauss-Seidel**. Si este esquema converge, la solución cumplirá la versión discretizada de la ecuación de Laplace.

Llegados a este punto, no hay ninguna razón de peso para creer que este esquema converja más rápidamente que la iteración de Jacobi. Para estudiar la velocidad de convergencia del método de Gauss-Seidel (para un cuadrado), sustituimos de nuevo las soluciones de la forma

$$u_{j,l}^{(m)} = Q^m e^{i(\alpha x + \beta y)}, \quad (6.6.9)$$

donde,

$$\alpha = \frac{n_1 \pi}{L}, \quad \beta = \frac{n_2 \pi}{L}, \quad n_i = 1, 2, \dots, N-1.$$

En la Ecuación (6.6.8) se obtiene

$$Q = \frac{1}{4} \left[e^{i\alpha \Delta x} + e^{i\beta \Delta y} + Q \left(e^{-i\alpha \Delta x} + e^{-i\beta \Delta y} \right) \right]. \quad (6.6.10)$$

Para simplificar los cálculos hacemos

$$z = \frac{e^{i\alpha \Delta x} + e^{i\beta \Delta y}}{4} = \xi + i\eta, \quad (6.6.11)$$

y entonces obtenemos $Q = z/(1 - \bar{z})$. Como Q es complejo, podemos escribirlo como $Q = |Q|e^{i\theta}$ y, por tanto $u_{j,l}^{(m)} = |Q|^m e^{i\theta m} e^{i(\alpha x + \beta y)}$. La velocidad de convergencia está determinada por $|Q|$,

$$\begin{aligned} |Q|^2 &= \frac{z\bar{z}}{(1 - \bar{z})(1 - z)} = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2 - 2\text{Re}(z)} \\ &= \frac{\xi^2 + \eta^2}{1 + \xi^2 + \eta^2 - 2\xi} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \xi)^2 + \eta^2}. \end{aligned} \quad (6.6.12)$$

Como $|z| < \frac{1}{2}$ y, por tanto, $|\xi| < \frac{1}{2}$, se sigue que $|Q| < 1$, que nos da la convergencia de la iteración de Gauss-Seidel. Sin embargo, la velocidad de convergencia es lenta si $|Q|$ está cerca de 1. La Ecuación (6.6.12) demuestra que $|Q|$ está próximo a 1 sólo si ξ está cerca de $\frac{1}{2}$, lo que en (6.6.11) requiere que α y β sean lo más pequeños posible. Para un cuadrado, $\alpha = \pi/L$ y $\beta = \pi/L$, y entonces

$$\xi = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi \Delta x}{L} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi \Delta x}{L}.$$

Por tanto,

$$|Q|^2 = \frac{1}{5 - 4 \cos \pi \Delta x / L} = \frac{1}{5 - 4 \cos \pi / N} \approx \frac{1}{1 + 2(\pi/N)^2} \approx 1 - 2 \left(\frac{\pi}{N} \right)^2,$$

ya que π/N es pequeño. Entonces

$$|Q| \approx 1 - \left(\frac{\pi}{N} \right)^2.$$

Este valor de $|Q|$ se encuentra el doble de lejos de 1 si lo comparamos con la iteración de Jacobi [véase (6.6.7)]. Haciendo el análisis anterior, se requiere la mitad de iteraciones para reducir el error en una fracción fija. La iteración de Jacobi no se debe utilizar nunca, ya que la iteración de Gauss-Seidel es una alternativa factible y mejor.

Iteración S-O-R. Ambos esquemas de iteración, el de Jacobi y el de Gauss-Seidel requieren un número de iteraciones proporcional a N^2 , donde N es el número de intervalos (en una dimensión). Un esquema mucho más rápido es el de sobre-relajación sucesiva (que llamamos S-O-R por su expresión en inglés *successive over-relaxation*).

Reescribamos el método de Gauss-Seidel para enfatizar el cambio que tiene lugar en cada iteración

$$u_{j,l}^{(m+1)} = u_{j,l}^{(m)} + \frac{1}{4} \left[u_{j-1,l}^{(m)} + u_{j+1,l}^{(m+1)} + u_{j,l-1}^{(m)} + u_{j,l+1}^{(m+1)} - 4u_{j,l}^{(m)} \right].$$

El término entre corchetes representa el cambio después de cada iteración, cuando $u_{j,l}^{(m)}$ se cambia por $u_{j,l}^{(m+1)}$. Históricamente se observó que la convergencia podía ser más rápida si se introducían cambios mayores o menores. La iteración de Gauss-Seidel con un **parámetro de relajación** ω nos da una **iteración S-O-R**:

$$u_{j,l}^{(m+1)} = u_{j,l}^{(m)} + \omega \left[u_{j-1,l}^{(m)} + u_{j+1,l}^{(m+1)} + u_{j,l-1}^{(m)} + u_{j,l+1}^{(m+1)} - 4u_{j,l}^{(m)} \right]. \quad (6.6.13)$$

Si $\omega = \frac{1}{4}$, esto se reduce al esquema de Gauss-Seidel. Si el método S-O-R converge, claramente converge a la versión discretizada de la ecuación de Laplace. Elegiremos ω tal que (6.6.13) converja tan rápido como sea posible.

Introducimos de nuevo la solución discreta,

$$u_{j,l}^{(m)} = Q^m e^{i(\alpha x + \beta y)},$$

para investigar la velocidad de convergencia, donde $\alpha = n_1\pi/L$, $\beta = n_2\pi/L$, $n_i = 1, 2, \dots, N-1$. Obtenemos así

$$Q = 1 + \omega \left[(e^{i\alpha\Delta x} + e^{i\beta\Delta y} + Q(e^{-i\alpha\Delta x} + e^{-i\beta\Delta y})) - 4 \right].$$

Los cálculos aquí son algo complicados. Si hacemos $z = \omega(e^{i\alpha\Delta x} + e^{i\beta\Delta y}) = \xi + i\eta$ para simplificar la expresión anterior, obtenemos $Q = (1 - 4\omega + z)/(1 - \bar{z})$. Recordemos que Q es complejo y $|Q|$ determina la velocidad de convergencia:

$$|Q|^2 = \frac{(1 - 4\omega + \xi)^2 + \eta^2}{(1 - \xi)^2 + \eta^2}.$$

De nuevo $|z| < 2\omega$, que implica $|\xi| < 2\omega$. En el Ejercicio 6.6.1 se pide demostrar que $|Q| < 1$ si $\omega < \frac{1}{2}$, garantizando así la convergencia del esquema S-O-R. Si $\omega < \frac{1}{2}$, $|Q|$ está cerca de 1 sólo si ξ está cerca de 2ω , y esto ocurre sólo si α y β son lo más pequeños posible; los valores mínimos que pueden tomar α y β para un cuadrado son $\alpha = \pi/L$ y $\beta = \pi/L$, luego $\xi = 2\omega \cos \pi\Delta x/L$ y $\eta = 2\omega \sin \pi\Delta x/L$. De esta forma se tiene

$$|Q|^2 = \frac{4\omega^2 + (1 - 4\omega)^2 + (1 - 4\omega)4\omega \cos(\pi/N)}{4\omega^2 + 1 - 4\omega \cos(\pi/N)}.$$

En el Ejercicio 6.6.1 se pide demostrar que el mínimo de $|Q|^2$ se alcanza si $\omega = \frac{1}{2} - (\sqrt{2}/2) \sqrt{1 - \cos \pi/N}$. Como π/N es grande, utilizamos $\omega = \frac{1}{2}(1 - \pi/N)$, en cuyo caso

$$|Q| \approx 1 - \frac{\pi}{2N};$$

véase el Ejercicio 6.6.2. Con la elección adecuada de ω , el valor de $|Q|$, aunque esté aún cerca de 1, es de un orden de magnitud más lejano de 1 que para las iteraciones de Jacobi o de Gauss-Seidel. De hecho (véase el Ejercicio 6.6.2), los errores se reducen a la mitad en el esquema S-O-R cuando el número de iteraciones es proporcional a N (en lugar de N^2).

Para dominios no cuadrados, el mejor valor de ω para el esquema S-O-R es difícil de aproximar. Sin embargo, existe bibliografía de rutinas de ordenador que aproximan ω . Por ello, a menudo el esquema S-O-R es un esquema práctico y de convergencia *relativamente* rápida para la ecuación de Laplace.

Se han desarrollado otros esquemas mejorados, por ejemplo el método implícito de alternancia de dirección, que dedujeron a mediados de los años cincuenta Peaceman, Douglas y Rachford. Existen técnicas más recientes y probablemente se desarrollarán mejores técnicas en el futuro.

EJERCICIOS 6.6

- 6.6.1.** (a) Demostrar que, en un esquema S-O-R, si $\omega < \frac{1}{2}$ se tiene $|Q| < 1$.
 (b) Determinar, minimizando $|Q|^2$, el parámetro de relajación óptimo ω , en un esquema S-O-R para un cuadrado.
- 6.6.2.** (a) Demostrar que, en un esquema S-O-R, si $\omega = \frac{1}{2} (1 - \pi/N)$ se tiene $|Q| \approx 1 - \pi/2N$, para N grande.
 (b) Demostrar que con esta elección el número de iteraciones necesario para reducir el error a la mitad es proporcional a N (no a N^2).
- 6.6.3.** Describir un esquema numérico para resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = f(x, y),$$

(suponiendo que $\Delta x = \Delta y$) análogo a:

- (a) La iteración de Jacobi.
 (b) La iteración de Gauss-Seidel.
 (c) El esquema S-O-R.
- 6.6.4.** Describir un esquema numérico (basado en la iteración de Jacobi) para resolver la ecuación de Laplace en tres dimensiones. Estimar el número de iteraciones necesario para reducir el error a la mitad.
- 6.6.5.** Modificar el Ejercicio 6.6.4 considerando una iteración de Gauss-Seidel.
- 6.6.6.** Demostrar que la iteración de Jacobi corresponde a la ecuación de difusión bidimensional, tomando el límite cuando $\Delta x = \Delta y \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$ de alguna manera adecuada.
- 6.6.7.** ¿A qué ecuación en derivadas parciales corresponde el esquema S-O-R? (*Indicación:* tomar el límite cuando $\Delta x = \Delta y \rightarrow 0$ y $\Delta t \rightarrow 0$ de dos maneras distintas). Particularizar el resultado de la iteración de Gauss-Seidel haciendo $\omega = \frac{1}{4}$.
- 6.6.8.** Resolver la ecuación de Laplace en un cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, con $u = 0$ en tres lados y $u = 1$ en el cuarto, utilizando los métodos siguientes:
- (a) Utilizando una iteración de Jacobi (tómese $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{10}$).
 (b) Usando una iteración de Gauss-Seidel (tómese $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{10}$).
 (c) Usando una iteración S-O-R [tómese $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{10}$ y $\omega = \frac{1}{2} (1 - \pi/10)$].
 (d) Por separación de variables. Evaluar numéricamente los primeros 10 ó 20 términos.
 (e) Comparar los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

6.7. Método de elementos finitos

En el mundo moderno, muchos problemas físicos interesantes formulados por medio de ecuaciones en derivadas parciales se resuelven en el ordenador (incluyendo los ordenadores personales). Los métodos de diferencias finitas se pueden utilizar para aproximar la ecuación en derivadas parciales por un número grande de ecuaciones en diferencias. Describimos ahora otro método conocido como método de elementos finitos. Para profundizar en el tema referimos al lector al libro de Strang (páginas 428-447).

6.7.1. Aproximación con funciones no ortogonales (forma débil de la ecuación en derivadas parciales)

Resolvamos una ecuación en derivadas parciales relativamente simple, la ecuación de Poisson en dos dimensiones con condiciones de contorno homogéneas,

$$\nabla^2 u = f(x, y), \quad \text{con } u = 0 \text{ en la frontera,} \quad (6.7.1)$$

donde $f(x, y)$ es conocida. En los problemas cuya geometría no es rectangular o circular, el método de separación de variables puede ser difícil o imposible de aplicar. Consideremos, por ejemplo, la complicada geometría del polígono de diez lados que se ilustra en la Figura 6.7.1.

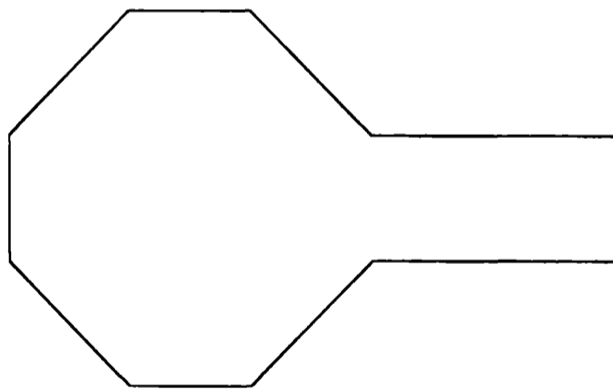


Figura 6.7.1: Un polígono de diez lados.

Aproximamos la solución por un gran número de **funciones test**, $T_i(x, y)$, que no tienen nada que ver con la ecuación en derivadas parciales ni sus autofunciones. Sin embargo, estas funciones test cumplen las correspondientes condiciones de contorno homogéneas:

$$T_i(x, y) = 0 \text{ en la frontera.} \quad (6.7.2)$$

Introducimos $U(x, y)$, **una aproximación a la solución** $u(x, y)$, usando una combinación lineal (finita) de estas funciones test, en lugar de una serie (una suma infinita) de autofunciones:

$$U(x, y) = \sum_{j=1}^n U_j T_j(x, y). \quad (6.7.3)$$

En la práctica, usamos un número grande n de funciones test y con los ordenadores, hoy ese número puede ser del orden de miles.

No podemos pretender que nuestra aproximación cumpla la ecuación en derivadas parciales (6.7.1). En lugar de eso, calcularemos las n constantes para que la aproximación cumpla las n condiciones conocidas como la forma débil de la ecuación en derivadas parciales. Esto es, impondremos que el lado izquierdo y el derecho de la ecuación en derivadas parciales (6.7.1), cuando se multiplican por cada una de las funciones de prueba $T_i(x, y)$ y se integran sobre la región dada, sean iguales, esto es,

$$\iint_R \nabla^2 u T_i dA = \iint_R f T_i dA, \quad (6.7.4)$$

donde $dA = dx dy$. Podemos simplificar esta expresión integrando el lado izquierdo por partes, usando la identidad $\nabla \cdot (T_i \nabla u) = T_i \nabla^2 u + \nabla T_i \cdot \nabla u$, con lo que obtenemos:

$$\iint_R [\nabla \cdot (T_i \nabla u) - \nabla T_i \cdot \nabla u] dA = \iint_R f T_i dA. \quad (6.7.5)$$

Ahora, utilizamos el teorema de la divergencia ($\iint_R \nabla \cdot \vec{B} dA = \oint \vec{B} \cdot \hat{n} ds$, donde ds es el diferencial de longitud de arco) y obtenemos $\iint_R \nabla T_i \cdot \nabla u dA = \oint T_i \nabla u \cdot \hat{n} ds - \iint_R f T_i dA$. Como la contribución de la frontera se anula, tenemos $\oint T_i \nabla u \cdot \hat{n} ds = 0$, porque las funciones test satisfacen las condiciones de contorno homogéneas (6.7.2), y obtenemos así la **forma débil (o de Galerkin) de la ecuación en derivadas parciales**:

$$\iint_R \nabla T_i \cdot \nabla u dA = - \iint_R f T_i dA. \quad (6.7.6)$$

Conviene señalar que todas las soluciones de la ecuación en derivadas parciales (6.7.1) cumplen la forma débil (6.7.6). Impongamos ahora que nuestra aproximación $U(x, y)$ (6.7.3) satisfaga la forma débil:

$$\sum_{j=1}^n U_j \iint_R \nabla T_i \cdot \nabla T_j dA = - \iint_R f T_i dA. \quad (6.7.7)$$

Éstas son n ecuaciones para los n coeficientes desconocidos U_i (una ecuación para cada función test).

Introducimos ahora la **matriz de rigidez K** , que es simétrica, con coeficientes,

$$K_{ij} = K_{ji} = \iint_R \nabla T_i \cdot \nabla T_j dA, \quad (6.7.8)$$

y el vector **F** con coeficientes,

$$F_i = - \iint_R f T_i dA. \quad (6.7.9)$$

Las n ecuaciones de (6.7.7) son, entonces,

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} U_j = F_i, \quad (6.7.10)$$

y se pueden escribir de forma matricial como,

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (6.7.11)$$

Como las funciones test están dadas, el lado derecho de (6.7.11) es conocido y nuestra solución es, por tanto,

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}. \quad (6.7.12)$$

Sin embargo, una solución computacional se obtendrá usualmente sin calcular la inversa de la matriz \mathbf{K} , que es, en general, de gran tamaño.

Autofunciones ortogonales bidimensionales. Si la frontera fuera excepcionalmente simple, podríamos utilizar funciones de prueba que fueran autofunciones bidimensionales, $T_i(x, y) = \phi_i(x, y)$, cumpliendo

$$\nabla^2 \phi_i = -\lambda_i \phi_i. \quad (6.7.13)$$

Estas autofunciones son ortogonales en sentido bidimensional (véase el Capítulo 7):

$$\iint_R \phi_i \phi_j dA = 0 \text{ if } i \neq j. \quad (6.7.14)$$

En los ejercicios se pide demostrar que no es necesaria la integración por partes, pues hay una expresión alternativa de la matriz de rigidez que se puede derivar directamente de (6.7.4) usando (6.7.13),

$$K_{ij} = \iint_R T_i \nabla^2 T_j dA = \iint_R \phi_i \nabla^2 \phi_j dA = -\lambda_j \iint_R \phi_i \phi_j dA. \quad (6.7.15)$$

Utilizando la ortogonalidad bidimensional de las autofunciones (6.7.14), vemos que la matriz de rigidez es diagonal,

$$K_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j, \quad (6.7.16)$$

y los elementos de la diagonal, según (6.7.15), están dados por:

$$K_{ii} = -\lambda_i \iint_R \phi_i^2 dA. \quad (6.7.17)$$

La solución aproximada está dada por la combinación lineal (6.7.3), donde los coeficientes se determinan fácilmente a partir de (6.7.11) o (6.7.12) (si $\lambda = 0$, no es autovalor),

$$U_i = \frac{F_i}{K_{ii}}, \quad (6.7.18)$$

donde K_{ii} está dado por (6.7.17). Esta solución aproximada es un truncamiento de una serie infinita de funciones ortogonales. Un ejemplo de esta serie se describe en una parte de la Subsección 8.6.

Elementos finitos. Las funciones test que usaremos no son ortogonales, por lo que la matriz de rigidez no será diagonal. Sin embargo, los elementos finitos proporcionan una matriz de rigidez que tiene muchos ceros, conocida como matriz **dispersa**. En la práctica, la matriz de rigidez es bastante grande y los métodos generales para obtener su inversa, que necesitamos en (6.7.12), no son prácticos. Sin embargo, hay métodos prácticos de obtener esta inversa, ya que demostraremos que la matriz de rigidez es dispersa.

6.7.2. Elementos finitos triangulares

Una de las formas más sencillas de aproximar una región es dividirla en pequeños triángulos. La aproximación mejora según el número de triángulos aumenta (y el tamaño del mayor de los triángulos decrece). Describiremos el método para el caso de una región poligonal. Hay muchas formas de dividir la región en triángulos, formando una malla triangular. Se puede comenzar dividiendo la región en triángulos de forma algo arbitraria:

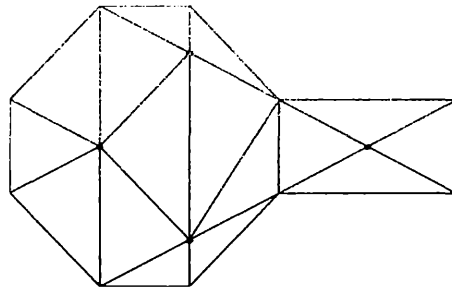


Figura 6.7.2: Una posible triangulación de la región de la Figura 6.7.1.

Describamos primero una malla poco fina para nuestra figura de diez lados (véase la Figura 6.7.1). Elegimos de forma algo arbitraria cuatro puntos interiores y formamos dieciséis triángulos (véase la Figura 6.7.2). En general, se tiene la relación:

$$\begin{aligned} \text{número de triángulos} &= \text{número de triángulos frontera} \\ &+ 2(\text{número de puntos interiores}) - 2. \end{aligned} \quad (6.7.19)$$

Esto se comprueba fácilmente sumando los ángulos interiores de los triángulos (180 veces el número de triángulos) de dos maneras distintas. Cada punto interior está completamente rodeado (esto da 360, multiplicado por el número de puntos interiores) y los ángulos en los puntos de frontera son los ángulos interiores del polígono (180 veces el número de lados menos dos).

Los cuatro puntos interiores (x_i, y_i) dan cuatro incógnitas $U(x_i, y_i)$. Esto nos da un espacio vectorial de cuatro dimensiones. Elegimos las funciones test como la base de funciones más sencilla del espacio vectorial de cuatro dimensiones. Elegimos

entonces la función test $T_1(x, y)$, tal que $T_1(x_1, y_1) = 1$, $T_1(x_2, y_2) = 0$, $T_1(x_3, y_3) = 0$ y $T_1(x_4, y_4) = 0$. De modo análogo, la función test $T_2(x, y)$ se elige para que cumpla $T_2(x_1, y_1) = 0$, $T_2(x_2, y_2) = 1$, $T_2(x_3, y_3) = 0$, $T_2(x_4, y_4) = 0$, etc. Esto se generaliza fácilmente a más de cuatro puntos interiores (y, por tanto, de funciones test).

Nuestra aproximación a la ecuación en derivadas parciales es (6.7.3), una combinación lineal de las cuatro funciones test

$$U(x, y) = \sum_{j=1}^4 U_j T_j(x, y).$$

Notemos que se tiene la agradable propiedad de que

$$\begin{aligned} U(x_1, y_1) &= U_1, \\ U(x_2, y_2) &= U_2, \\ U(x_3, y_3) &= U_3, \\ U(x_4, y_4) &= U_4. \end{aligned} \tag{6.7.20}$$

Aquí, el coeficiente n -ésimo es precisamente la función evaluada en el n -ésimo punto. Ésa es la razón por la que utilizamos la notación U_j para los coeficientes. De esta manera hemos obtenido un conjunto de ecuaciones en diferencias, (6.7.10) o (6.7.11), para las que demostraremos que la matriz de rigidez es dispersa. Por (6.7.20), éstas representan en cada punto interior ecuaciones en diferencias para el valor de u . Así, obtenemos las ecuaciones en diferencias por el método de elementos finitos, que normalmente son diferentes de las ecuaciones en diferencias que se obtienen por los métodos de diferencias finitas.

Nuestras funciones de prueba tienen que estar definidas en todas partes, no sólo en los puntos interiores. Existen diferentes métodos de elementos finitos y describimos aquí el más sencillo de ellos. Supondremos que cada función de prueba es lineal (un simple plano) en cada región triangular. Cada función de prueba tiene el valor máximo 1 en un vértice y decae linealmente a 0 dentro del conjunto de triángulos que rodea a ese vértice. Cada función es entonces como una pirámide: **cada función test es idénticamente cero en las regiones que no conectan con el vértice del pico**. Las cuatro funciones test para este problema se ilustran en la Figura 6.7.3. Cuando hay un gran número de grados de libertad (es decir, vértices y funciones test), cada función test es idénticamente cero sobre la mayor parte de la región.

Cálculo de la matriz de rigidez. La mejor forma de calcular la matriz de rigidez,

$$K_{ij} = \iint_R \nabla T_i \cdot \nabla T_j dA, \tag{6.7.21}$$

consiste en sumar (lo que llamamos **ensamblar**) las contribuciones en cada pequeño elemento finito triangular. Los coeficientes de la matriz de rigidez serán distintos

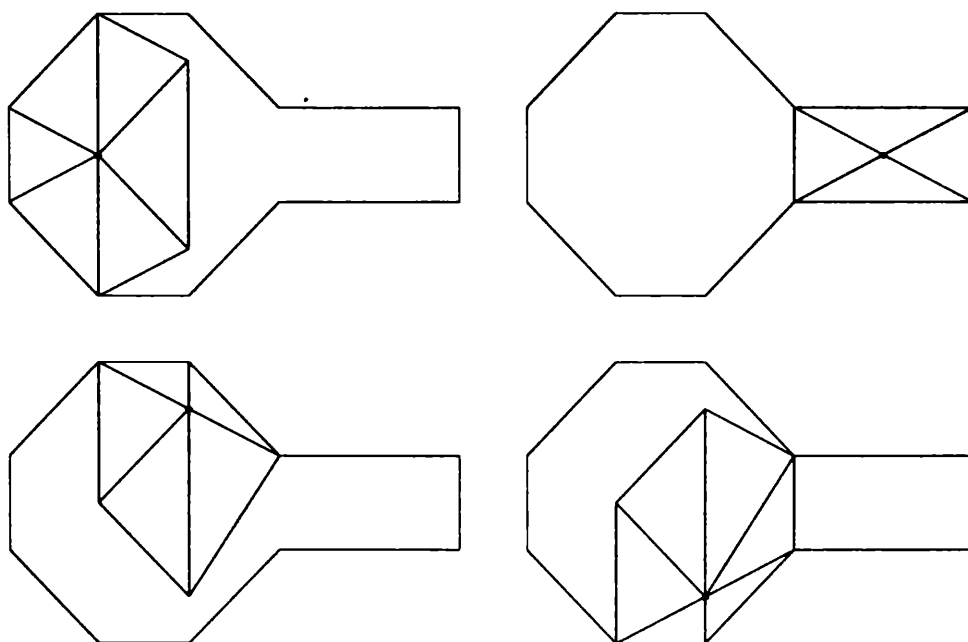


Figura 6.7.3: Cuatro funciones test (cada una corresponde a un punto interior).

de cero sólo para la diagonal y para los coeficientes correspondientes a vértices interiores y adyacentes, y serán nulos cuando correspondan a vértices interiores no adyacentes, ya que cada función de prueba es, en su mayor parte, cero. La **matriz de rigidez será dispersa** cuando haya muchos puntos interiores.

Los coeficientes de la diagonal de la matriz de rigidez correspondientes a un vértice interior específico se ensamblarán sólo a partir de los triángulos que rodean ese vértice interior, y los correspondientes a vértices interiores adyacentes se ensamblarán a partir de los dos pequeños triángulos cuyo lado común es la línea que conecta los dos vértices interiores.

Para un triángulo específico con ángulos interiores θ_i , se puede demostrar (véanse los ejercicios) que los elementos de la diagonal satisfacen, por ejemplo el primero el primero de ellos,

$$k_{11} = \text{parte de } K_{11} \text{ correspondiente al triángulo} = \frac{1}{2 \tan \theta_2} + \frac{1}{2 \tan \theta_3},$$

y las contribuciones a vértices adyacentes son, por ejemplo la primera,

$$k_{12} = \text{parte de } K_{12} \text{ correspondiente al triángulo} = -\frac{1}{2 \tan \theta_3}.$$

Refinamiento de la malla. Comencemos con una malla concreta (por ejemplo, con cuatro puntos interiores como en la Figura 6.7.2). Es usual obtener entonces una malla más fina mediante la subdivisión de cada triángulo, que se obtiene conectando los puntos medios de cada lado. De esta forma, de cada triángulo se obtienen cuatro triángulos semejantes (véase la Figura 6.7.4). Manteniendo triángulos semejantes en

el proceso se consigue que el procedimiento de cálculo sea algo más fácil, ya que la fórmula anterior demuestra que no se necesitan cálculos adicionales para la matriz de rigidez después del primer mallado.

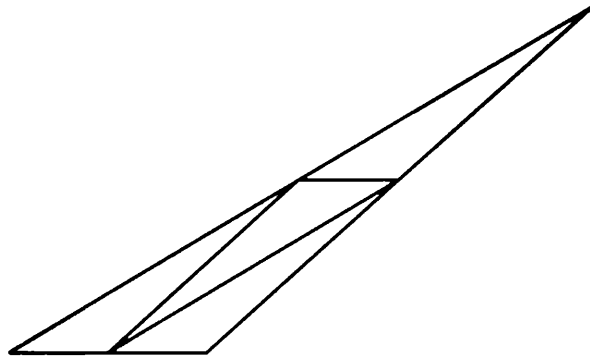


Figura 6.7.4: Refinamiento de la malla (en cada triángulo).

EJERCICIOS 6.7

- 6.7.1.** Considérese una región poligonal cualquiera de cinco lados. Hacer un esquema de las funciones test suponiendo que tenemos:
- 2 puntos interiores.
 - 3 puntos interiores.
 - 5 puntos interiores.
 - 7 puntos interiores.
- 6.7.2.** Para los elementos finitos del Ejercicio 6.7.1, ¿qué coeficientes de la matriz de rigidez son nulos?
- 6.7.3.** Obtener una fórmula para K_{ij} , a partir de (6.7.4).
- 6.7.4.** Demostrar que $\int_R |\nabla U|^2 dA = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}$. Por tanto, la matriz \mathbf{K} se puede identificar completamente calculando esta integral.
- 6.7.5.** Demostrar (completando cuadrados), que el mínimo de $\iint_R [\frac{1}{2} |\nabla U|^2 - f(x, y)U] dA$ donde U satisface (6.7.3), se alcanza cuando $\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$.
- 6.7.6.** Consideremos un triángulo arbitrario (como el que se ilustra en la Figura 6.7.5) con $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (L, 0)$, $P_3 = (D, H)$ y ángulos internos θ_i . La solución aproximada sobre el triángulo será lineal, $U = a + bx + cy$.
- Demostrar que $\iint_R |\nabla U|^2 dA = \frac{1}{2} LH(b^2 + c^2)$
 - Los coeficientes a , b y c se determinan por las condiciones en los tres vértices, $U(P_i) = U_i$. Demostrar que:

$$a = U_1, \quad b = \frac{U_2 - U_1}{L}, \quad c = \frac{U_3 - U_1 - \frac{D}{L}(U_2 - U_1)}{H}.$$

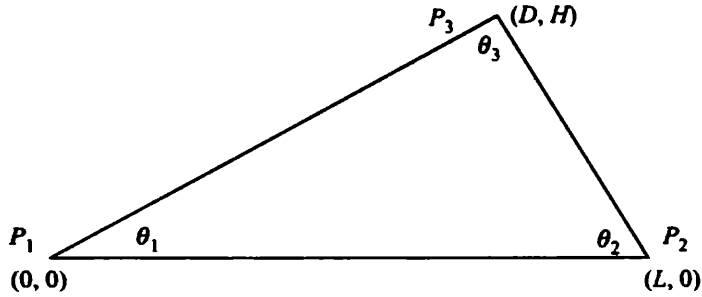


Figura 6.7.5: Elemento finito triangular.

- (c) Demostrar que $\frac{1}{\tan \theta_1} = \frac{D}{H}$, $\frac{1}{\tan \theta_2} = \frac{L-D}{H}$, y usando que $\tan \theta_3 = -\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{\tan \theta_1 \tan \theta_2 - 1}$, probar que $\frac{1}{\tan \theta_3} = \frac{H}{L} - \frac{D}{H} + \frac{D^2}{HL}$.
- (d) Usando el Ejercicio 6.7.4 y los apartados (a), (b) y (c) de este mismo ejercicio, demostrar que la contribución a partir de este triángulo es $K_{12} = -\frac{1}{2 \tan \theta_3}$. Los otros coeficientes de la matriz de rigidez se calculan de igual manera.

6.7.7. Continuar el apartado (d) del Ejercicio 6.7.6, para obtener los elementos siguientes de la matriz de rigidez:

- (a) K_{11} . (b) K_{22} . (c) K_{33} . (d) K_{23} . (e) K_{13} .

Capítulo 7

Ecuaciones en derivadas parciales con tres o más variables independientes

7.1. Introducción

Hasta ahora hemos resuelto muchos problemas de ecuaciones en derivadas parciales por el método de separación de variables, pero todos ellos han involucrado sólo dos variables independientes:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En este capítulo veremos cómo aplicar el método de separación de variables para resolver problemas con más de dos variables independientes.

En particular, discutiremos técnicas para analizar la ecuación del calor (con propiedades térmicas constantes) en dos y tres dimensiones,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (\text{dos dimensiones}) \quad (7.1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (\text{tres dimensiones}) \quad (7.1.2)$$

para varias regiones físicas con distintas condiciones de contorno. También nos fijaremos en la ecuación estacionaria del calor, es decir, la ecuación de Laplace, en tres dimensiones,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

En todos estos problemas, la ecuación en derivadas parciales tiene por lo menos tres variables independientes. También aparecen problemas con más de dos variables independientes en otros modelos no relacionados con el flujo del calor. Por ejemplo, el desplazamiento vertical u de una membrana vibrante satisface la ecuación de ondas bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Deberíamos también mencionar que en acústica la presión u sometida a una perturbación satisface la ecuación de ondas tridimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

A continuación discutiremos y analizaremos algunos de estos problemas.

7.2. Separación de la variable temporal

Mostraremos que podemos aplicar métodos similares a diversos problemas. Empezaremos discutiendo las vibraciones de una membrana con forma arbitraria, y seguiremos con un análisis de la conducción del calor en regiones generales de dos y tres dimensiones.

7.2.1. Membranas vibrantes con forma arbitraria

Consideremos el desplazamiento u de una membrana vibrante que tiene cualquier forma. Más tarde (en las secciones 7.3 y 7.7), particularizaremos nuestros resultados para membranas rectangulares y circulares. El desplazamiento $u(x, y, t)$ satisface la ecuación de ondas bidimensional

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}. \quad (7.2.1)$$

Las condiciones iniciales serán

$$u(x, y, 0) = \alpha(x, y), \quad (7.2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \beta(x, y), \quad (7.2.3)$$

pero como siempre, inicialmente ignoraremos estas condiciones al separar variables. Tendremos una condición de contorno homogénea en toda la frontera; la condición más usual es $u = 0$ en el borde. Sin embargo, es posible, por ejemplo, que el desplazamiento sea cero sólo en una parte de la frontera y que esté "libre" en el resto. Hay muchas otras posibles condiciones de contorno.

Apliquemos ahora el método de separación de variables. Empecemos por probar que, independientemente de la forma de la membrana, podemos separar la variable temporal buscando soluciones producto de la forma siguiente:

$$u(x, y, t) = h(t)\phi(x, y), \quad (7.2.4)$$

donde $\phi(x, y)$ es una función todavía desconocida de las dos variables x e y . No especificamos $\phi(x, y)$ (en este momento), puesto que podríamos esperar obtener resultados diferentes en geometrías diferentes o con condiciones de contorno diferentes. Más tarde pondremos $\phi(x, y) = F(x)G(y)$, para membranas rectangulares, mientras que para membranas circulares intentaremos $\phi(x, y) = F(r)G(\theta)$; es decir, que la forma de continuar posteriormente con la separación de variables depende de la geometría particular de cada problema. Es ésta la razón de que empecemos analizando la forma general (7.2.4). De hecho, para la mayoría de las regiones que no son geoméricamente tan simples como las rectangulares y circulares, $\phi(x, y)$ no puede separarse más. Si sustituimos (7.2.4) en la ecuación para una membrana vibrante, (7.2.1), obtenemos que

$$\phi(x, y) \frac{d^2 h}{dt^2} = c^2 h(t) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right). \quad (7.2.5)$$

Intentemos proceder como hicimos cuando había sólo dos variables independientes. La variable temporal puede separarse de (7.2.5) dividiendo por $h(t)\phi(x, y)$ (es conveniente una división adicional por la constante c^2):

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = -\lambda. \quad (7.2.6)$$

El miembro izquierdo de la primera ecuación es una función únicamente del tiempo, mientras que el miembro derecho es una función sólo de las variables espaciales (x e y). Por tanto, como antes, ambas deben ser iguales a una constante de separación. También ahora debemos decidir qué notación es más conveniente para dicha constante de separación, λ o $-\lambda$. Una rápida mirada a la ecuación diferencial ordinaria que hemos obtenido para $h(t)$ nos muestra que $-\lambda$ es más conveniente (como explicaremos luego). Así pues, obtenemos dos ecuaciones, pero a diferencia del caso de dos variables independientes, una de las ecuaciones todavía es una ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h, \quad (7.2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\lambda \phi. \quad (7.2.8)$$

Hemos elegido la notación $-\lambda$ para la constante de separación porque la ecuación diferencial dependiente del tiempo, (7.2.7), tiene soluciones oscilatorias si $\lambda > 0$. En efecto, en este caso, h es una combinación lineal de $\sin c\sqrt{\lambda}t$ y $\cos c\sqrt{\lambda}t$, y estas funciones oscilan con frecuencia $c\sqrt{\lambda}$. Los valores de λ determinan las frecuencias naturales de oscilación de una membrana vibrante. Sin embargo, no tenemos garantías de que forzosamente sea $\lambda > 0$. Para probar que $\lambda > 0$, debemos analizar el problema resultante de autovalores, (7.2.8), donde ϕ está sujeta a una condición de contorno homogénea en toda la frontera (por ejemplo, $\phi = 0$ en el borde). En el caso que estamos analizando, el problema de autovalores involucra una ecuación lineal homogénea en derivadas parciales. Probaremos que forzosamente $\lambda > 0$ introduciendo un cociente de Rayleigh aplicable a (7.2.8). Antes de analizar (7.2.8), mostraremos que esto mismo ocurre en otros contextos.

7.2.2. Conducción del calor en regiones arbitrarias

Analicemos el flujo de energía térmica en una región bidimensional arbitraria. Empecemos por buscar soluciones producto de la forma

$$u(x, y, t) = h(t)\phi(x, y), \quad (7.2.9)$$

para la ecuación del calor bidimensional, (7.1.1), suponiendo que las propiedades térmicas son constantes y que no hay fuentes. Sustituyendo (7.2.9) en (7.1.1) y luego dividiendo por $kh(t)\phi(x, y)$, obtenemos

$$\frac{1}{k} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right). \quad (7.2.10)$$

Introduzcamos ahora una constante de separación de la forma $-\lambda$ de modo que, como es de esperar, la parte temporal de la solución producto decaiga exponencialmente (si $\lambda > 0$), en lugar de crecer exponencialmente. Las dos ecuaciones son entonces

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\lambda kh, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= -\lambda \phi. \end{aligned} \quad (7.2.11)$$

El autovalor λ está relacionado con la velocidad a la que decae la parte temporal. Sin embargo, λ se determina por medio del problema de valores en la frontera, que se obtiene considerando la ecuación en derivadas parciales en (7.2.11) junto con la condición de contorno correspondiente en toda la frontera de la región.

La Ecuación (7.1.2) es válida para modelizar el flujo de calor en una región tridimensional. Podemos pensar de nuevo en una solución producto,

$$u(x, y, z, t) = h(t)\phi(x, y, z), \quad (7.2.12)$$

y tras separar variables, obtenemos ecuaciones similares a (7.2.11),

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\lambda kh, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= -\lambda \phi. \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

El autovalor λ se determina buscando aquellos valores de λ para los que existen soluciones no triviales de (7.2.13), sujetas a una condición de contorno homogénea en toda la frontera.

7.2.3. Resumen

En las situaciones que hemos descrito en esta sección, la parte espacial $\phi(x, y)$ ó $\phi(x, y, z)$ de la solución de la ecuación en derivadas parciales satisface el problema de autovalores que consiste en la ecuación en derivadas parciales,

$$\nabla^2 \phi = -\lambda \phi, \quad (7.2.14)$$

con ciertas condiciones de contorno, que pueden ser de la forma [véanse (1.5.2) y (4.5.5)]

$$\alpha \phi + \beta \nabla \phi \cdot \hat{n} = 0, \quad (7.2.15)$$

donde α y β pueden depender de x , y y z . Si $\beta = 0$, (7.2.15) es la condición de frontera prescrita. Si $\alpha = 0$, (7.2.15) es la condición de frontera aislada o libre. Si ambas $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, entonces (7.2.15) es la versión multidimensional de la ley de enfriamiento de Newton o la condición de contorno elástica. En la Sección 7.4 describiremos resultados generales para este problema de autovalores en dos o tres dimensiones que son similares a nuestros teoremas para el problema de autovalores de Sturm-Liouville general unidimensional. Pero antes vamos a describir la solución de un problema de autovalores bidimensional en una situación en la que $\phi(x, y)$ puede ser separada de nuevo, dando lugar a dos problemas de autovalores unidimensionales.

EJERCICIOS 7.2

- 7.2.1.** Probar que, para una membrana vibrante con forma arbitraria y que satisfice (7.2.1), tras separar variables se obtiene (7.2.14).
- 7.2.2.** Probar que, para el problema de la conducción del calor (7.1.1) en cualquier región bidimensional, tras separar variables se obtiene (7.2.14).
- 7.2.3.** (a) Obtener soluciones producto, $\phi = f(x)g(y)$, de (7.2.14) que satisfagan $\phi = 0$ en los cuatro lados de un rectángulo. *Indicación:* si es necesario, véase la Sección 7.3.
- (b) Usando el apartado (a), resolver el problema de valor inicial para una membrana vibrante rectangular (fija por todos los lados).
- (c) Usando el apartado (a), resolver el problema de valor inicial para la ecuación del calor bidimensional con temperatura nula en todos los lados.

7.3. Membrana vibrante rectangular

En esta sección analizaremos las vibraciones de una membrana rectangular, como se esboza en la Figura 7.3.1. El desplazamiento vertical $u(x, y, t)$ de la membrana satisface la ecuación de ondas bidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (7.3.1)$$

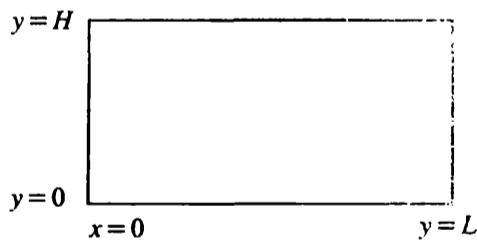


Figura 7.3.1: Membrana rectangular.

Supondremos que la frontera verifica que los cuatro lados están fijos, es decir, que el desplazamiento es cero sobre ellos:

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad (7.3.2)$$

$$u(L, y, t) = 0, \quad u(x, H, t) = 0. \quad (7.3.3)$$

Nos preguntamos cuál es el desplazamiento de la membrana en tiempo t si la posición y velocidad iniciales están dadas:

$$u(x, y, 0) = \alpha(x, y), \quad (7.3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \beta(x, y). \quad (7.3.5)$$

Puesto que la ecuación en derivadas parciales y las condiciones de contorno son lineales y homogéneas, aplicaremos el método de separación de variables como ya indicamos en la Sección 7.2.1. En primer lugar, separaremos sólo la variable temporal buscando soluciones producto de la forma

$$u(x, y, t) = h(t)\phi(x, y). \quad (7.3.6)$$

De acuerdo con nuestros cálculos previos, introduciendo una constante de separación $-\lambda$, obtenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h, \quad (7.3.7)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\lambda \phi. \quad (7.3.8)$$

Probemos ahora que $\lambda > 0$, en cuyo caso $h(t)$ será una combinación lineal de $\sin c\sqrt{\lambda}t$ y $\cos c\sqrt{\lambda}t$. Las condiciones de contorno homogéneas implican que el problema de autovalores es

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\lambda \phi, \quad (7.3.9)$$

$$\begin{aligned} \phi(0, y) &= 0, & \phi(x, 0) &= 0, \\ \phi(L, y) &= 0, & \phi(x, H) &= 0; \end{aligned} \quad (7.3.10)$$

es decir, $\phi = 0$ sobre toda la frontera. Llamamos a las Ecuaciones (7.3.9) - (7.3.10) un problema de autovalores bidimensional.

El problema de autovalores, por sí mismo, es una EDP lineal homogénea en dos variables independientes con condiciones de contorno homogéneas. Como tal (puesto que la frontera es de geometría sencilla), podemos esperar resolver (7.3.9) - (7.3.10) por separación de variables en coordenadas cartesianas. En otras palabras, busquemos soluciones producto de (7.3.9) - (7.3.10) de la forma

$$\phi(x, y) = f(x)g(y). \quad (7.3.11)$$

Antes de comenzar nuestros cálculos, notemos que se sigue de (7.3.6) que nuestra suposición (7.3.11) es equivalente a

$$u(x, y, t) = f(x)g(y)h(t), \quad (7.3.12)$$

un producto de funciones de cada variable independiente. Afirmamos, como probaremos en el apéndice de esta sección, que podríamos obtener el mismo resultado sustituyendo directamente (7.3.12) en la ecuación de ondas (7.3.1), que el que vamos a obtener sustituyendo (7.3.11) en el problema de autovalores bidimensional (7.3.9):

$$g(y)\frac{d^2 f}{dx^2} + f(x)\frac{d^2 g}{dy^2} = -\lambda f(x)g(y). \quad (7.3.13)$$

Las partes que dependen de x y de y pueden separarse dividiendo (7.3.13) por $f(x)g(y)$ y reordenando los términos:

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\lambda - \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = -\mu. \quad (7.3.14)$$

Puesto que la primera expresión es sólo una función de x , mientras que la segunda es sólo una función de y , introducimos una *segunda* constante de separación. La elegimos en la forma $-\mu$, de modo que la ecuación $d^2 f/dx^2 = -\mu f$ que, por otro lado, es fácil de resolver, tenga soluciones oscilatorias (como se espera) si $\mu > 0$. Obtenemos así dos ecuaciones diferenciales ordinarias por separación de variables a partir de una ecuación en derivadas parciales con dos variables independientes:

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} = -\mu f,} \quad (7.3.15)$$

$$\boxed{\frac{d^2 g}{dy^2} = -(\lambda - \mu)g.} \quad (7.3.16)$$

Las Ecuaciones (7.3.15) y (7.3.16) contienen *dos* constantes de separación λ y μ , que debemos determinar. Además $h(t)$ es la solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\boxed{\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h.} \quad (7.3.17)$$

Cuando separamos variables en una ecuación en derivadas parciales en tres variables, $u(x, y, t) = f(x)g(y)h(t)$, obtenemos tres ecuaciones diferenciales ordinarias, cada una de las cuales tiene por solución una función de cada variable independiente. Sin embargo, habrá sólo dos constantes de separación.

Para determinar las constantes de separación, tendremos que usar las condiciones de contorno homogéneas (7.3.10). La forma del producto (7.3.11) implica entonces que

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \quad \text{y} \quad f(L) = 0, \\ g(0) &= 0 \quad \text{y} \quad g(H) = 0. \end{aligned} \quad (7.3.18)$$

Sólo dos de nuestras tres ecuaciones diferenciales ordinarias serán problemas de autovalores. Tenemos condiciones de contorno homogéneas en x e y . Así,

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\mu f, \quad \text{con} \quad f(0) = 0 \quad \text{y} \quad f(L) = 0, \quad (7.3.19)$$

es un problema de autovalores de Sturm-Liouville en la variable x , donde μ es el autovalor y $f(x)$ es la autofunción. Análogamente, el problema en la variable y es un problema de Sturm-Liouville regular:

$$\frac{d^2g}{dy^2} = -(\lambda - \mu)g, \quad \text{con} \quad g(0) = 0 \quad \text{y} \quad g(H) = 0. \quad (7.3.20)$$

En este caso, λ es el autovalor y $g(y)$ la autofunción correspondiente.

Deberíamos estar bien familiarizados con los problemas de autovalores de Sturm-Liouville (7.3.19) y (7.3.20). Sin adentrarnos demasiado en detalles bien conocidos, los autovalores son

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.3.21)$$

y las autofunciones correspondientes son

$$f_n(x) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (7.3.22)$$

Esto determina los valores permisibles de la constante de separación μ_n .

Para cada valor de μ_n , (7.3.20) representa aún un problema de autovalores. Existe un número infinito de autovalores λ para cada n . Por tanto, debemos denotar a λ con un subíndice doble, λ_{nm} . En efecto, a partir de (7.3.20) vemos que los autovalores son

$$\lambda_{nm} - \mu_n = \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.3.23)$$

donde *debemos* usar un índice diferente para representar los diferentes autovalores en la variable y (para cada valor de n). La correspondiente autofunción en la variable y es

$$g_{nm}(y) = \text{sen} \frac{m\pi y}{H}. \quad (7.3.24)$$

La constante de separación λ_{nm} debe determinarse ahora a partir de (7.3.23):

$$\lambda_{nm} = \mu_n + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2, \quad (7.3.25)$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$ y $m = 1, 2, 3, \dots$. El problema de autovalores bidimensional (7.3.9) tiene los autovalores λ_{nm} dados por (7.3.25) y las autofunciones dadas por el producto de las dos autofunciones unidimensionales. Si usamos la notación $\phi_{nm}(x, y)$ para las autofunciones bidimensionales correspondientes al autovalor λ_{nm} , tenemos

$$\phi_{nm}(x, y) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi y}{H}, \quad \begin{array}{l} n = 1, 2, 3, \dots \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{array} \quad (7.3.26)$$

Obsérvese lo fácil que es comprobar que se cumplen las condiciones de contorno.

De (7.3.25) se sigue explícitamente que todos los autovalores de este problema son positivos. Así, las partes dependientes del tiempo de las soluciones producto son (como habíamos intuido previamente) $\text{sen } c\sqrt{\lambda_{nm}t}$ y $\text{cos } c\sqrt{\lambda_{nm}t}$, esto es, oscilaciones con frecuencias naturales $c\sqrt{\lambda_{nm}} = c\sqrt{(n\pi/L)^2 + (m\pi/H)^2}$, con $n = 1, 2, 3, \dots$ y $m = 1, 2, 3, \dots$. Así, al considerar el desplazamiento u , hemos obtenido dos familias doblemente infinitas de soluciones producto:

$$\text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{m\pi y}{H} \text{sen } c\sqrt{\lambda_{nm}t} \quad \text{y} \quad \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{m\pi y}{H} \text{cos } c\sqrt{\lambda_{nm}t}.$$

Como en el caso de la cuerda vibrante, se conoce a cada una de estas soluciones producto especiales como un modo de vibración o armónico. En la Figura 7.3.2 esbozamos una representación de algunos de estos armónicos. En cada uno de ellos esbozamos también curvas de nivel del desplazamiento para cada t fijo. A medida que cambia el tiempo la forma sigue siendo la misma, sólo varía la amplitud periódicamente. En cada modo de vibración, las curvas a lo largo de las cuales el desplazamiento es siempre cero se llaman **curvas nodales** y también están esbozadas en la misma figura. Para cada armónico, el rectángulo $[0, L] \times [0, H]$ queda dividido en varias subregiones que están limitadas por las curvas nodales y tienen las fases cambiadas; es decir, cuando en una de esas regiones hay un desplazamiento positivo la región vecina tiene desplazamiento negativo (esto se representa con los signos $+$ y $-$).

El principio de superposición sugiere que deberíamos considerar una combinación lineal de todas las posibles soluciones producto. Por tanto, debemos incluir ambas familias, y sumar en n y m ,

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{m\pi y}{H} \text{cos } c\sqrt{\lambda_{nm}t} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{m\pi y}{H} \text{sen } c\sqrt{\lambda_{nm}t}. \quad (7.3.27)$$

Esperamos que las dos familias de coeficientes A_{nm} y B_{nm} puedan ser determinadas a partir de las dos condiciones iniciales. Por ejemplo, $u(x, y, 0) = \alpha(x, y)$ implica que

$$\alpha(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \right) \text{sen } \frac{m\pi y}{H}. \quad (7.3.28)$$

La serie en (7.3.28) es un ejemplo de lo que se conoce como una **serie de Fourier doble**. En lugar de discutir la teoría, mostraremos un método para calcular A_{nm} a partir de (7.3.28) (en la Sección 7.4 discutiremos un método más sencillo). Para x fijo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \text{sen } n\pi x/L$ depende sólo de m . Además, estas expresiones deberían ser los coeficientes de la serie de Fourier de senos en la variable y de $\alpha(x, y)$

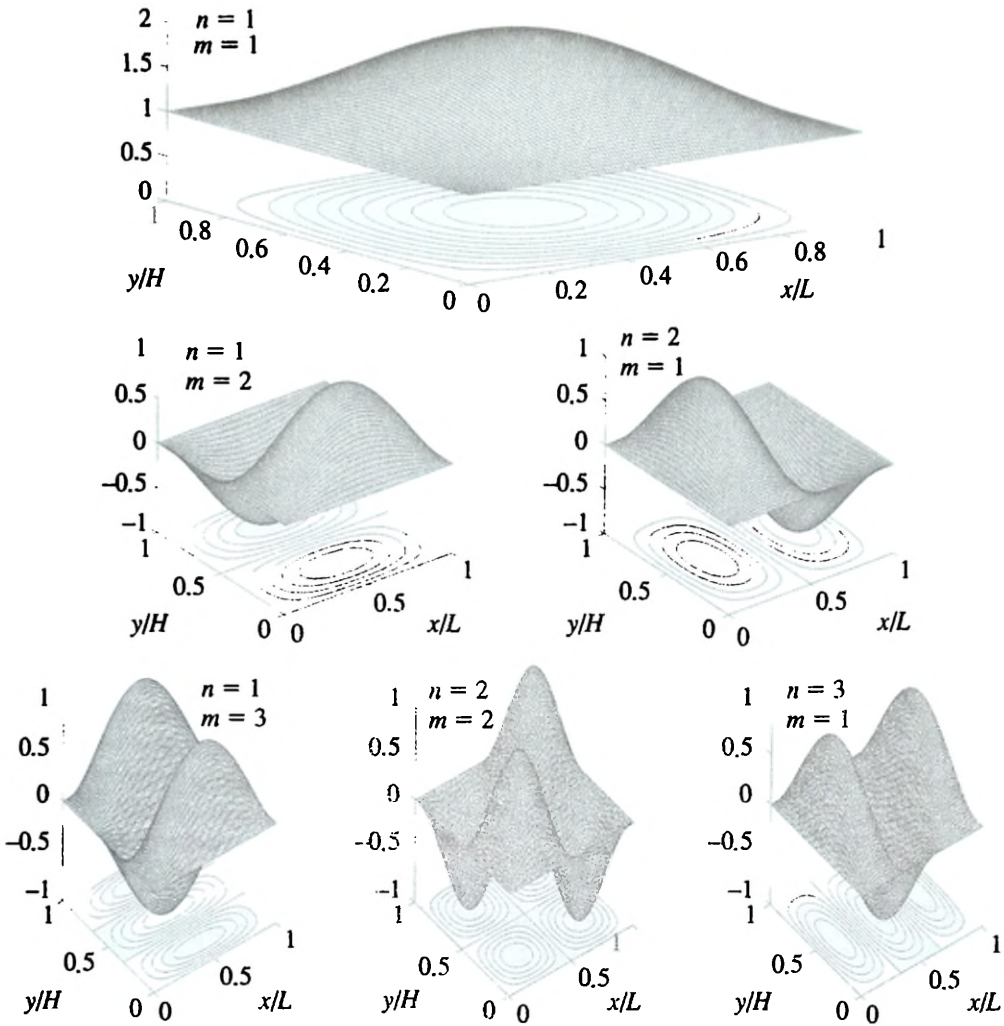


Figura 7.3.2: Curvas nodales para los modos de una membrana vibrante rectangular.

sobre el intervalo $0 < y < H$. A partir de nuestra teoría de series de Fourier de senos, sabemos, por tanto, que podemos determinar fácilmente los coeficientes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \frac{2}{H} \int_0^H \alpha(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} dy, \quad (7.3.29)$$

para cada m . La Ecuación (7.3.29) es válida para todo x ; el miembro derecho es una función de x (no de y , porque integramos en la variable y desde 0 hasta H). Para cada m , el miembro izquierdo es una serie de Fourier de senos en la variable x ; de hecho, es la serie de Fourier de senos del miembro derecho,

$$\frac{2}{H} \int_0^H \alpha(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} dy.$$

Los coeficientes de esta serie de Fourier de senos en la variable x se determinan

fácilmente:

$$A_{nm} = \frac{2}{L} \int_0^L \left[\frac{2}{H} \int_0^H \alpha(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} dy \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (7.3.30)$$

Esta expresión puede simplificarse escribiendo una integral doble sobre toda la región rectangular, en lugar de dos integrales unidimensionales iteradas. Hemos determinado de esta manera un conjunto de coeficientes a partir de una de las condiciones iniciales.

Podemos determinar los otros coeficientes B_{nm} de forma similar. En particular a partir de (7.3.27), obtenemos que $(\partial u / \partial t)(x, y, 0) = \beta(x, y)$, lo que implica que

$$\beta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c \sqrt{\lambda_{nm}} B_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}. \quad (7.3.31)$$

Por tanto, usando de nuevo una serie de Fourier de senos en la variable y y una serie de Fourier de senos en la variable x , obtenemos

$$c \sqrt{\lambda_{nm}} B_{nm} = \frac{4}{LH} \int_0^L \int_0^H \beta(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dy dx. \quad (7.3.32)$$

Finalmente, la solución de nuestro problema de valor inicial es la serie doble dada por (7.3.27), en la que los coeficientes se determinan por medio de (7.3.30) y (7.3.32).

Hemos mostrado que cuando se separan las tres variables independientes de una ecuación en derivadas parciales, se obtienen tres ecuaciones diferenciales ordinarias, dos de las cuales son problemas de autovalores. En general, si partimos de una ecuación en derivadas parciales en N variables independientes que se separan completamente, obtendremos N ecuaciones diferenciales ordinarias, $N - 1$ de las cuales son problemas de autovalores (que nos servirán para determinar las $N - 1$ constantes de separación). Ya hemos visto ejemplos de esto para $N = 2$ y $N = 3$.

EJERCICIOS 7.3

7.3.1. Considérese la ecuación del calor en una región rectangular bidimensional $0 < x < L$, $0 < y < H$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, y, 0) = f(x, y).$$

Resolver el problema de valor inicial y analizar la temperatura cuando $t \rightarrow \infty$ si las condiciones de contorno son:

- *(a) $u(0, y, t) = 0, \quad u(L, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, H, t) = 0.$
- (b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H, t) = 0.$
- *(c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, H, t) = 0.$
- (d) $u(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H, t) = 0.$
- (e) $u(0, y, t) = 0, \quad u(L, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H, t) + h u(x, H, t) = 0.$

En el último apartado, tómesese $h > 0$.

7.3.2. Considérese la ecuación del calor en una región tridimensional con forma de caja, $0 < x < L, 0 < y < H, 0 < z < W$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z).$$

Resolver el problema de valor inicial y analizar la temperatura cuando $t \rightarrow \infty$ si las condiciones de contorno son:

- (a) $u(0, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0, t) = 0,$
 $u(L, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H, z, t) = 0, \quad u(x, y, W, t) = 0.$
- * (b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0, t) = 0,$
 $\frac{\partial u}{\partial x}(L, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H, z, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, W, t) = 0.$

7.3.3 Resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

sobre un rectángulo ($0 < x < L, 0 < y < H$) sujeta a

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0,$$

$$u(L, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H, t) = 0.$$

7.3.4. Considérese la ecuación de ondas para una membrana vibrante rectangular ($0 < x < L, 0 < y < H$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$u(x, y, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = f(x, y).$$

Resolver el problema de valor inicial si

$$(a) \quad u(0, y, t) = 0, \quad u(L, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H, t) = 0.$$

$$* (b) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H, t) = 0.$$

7.3.5. Considérese la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - k \frac{\partial u}{\partial t}. \quad \text{con } k > 0.$$

- (a) Dar una *breve* interpretación física de esta ecuación.
 (b) Supongamos que $u(x, y, t) = f(x)g(y)h(t)$. ¿Qué ecuaciones diferenciales ordinarias satisfarán f , g y h ?

7.3.6. Considérese la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

en un cilindro recto cuya base tiene forma arbitraria (véase la Figura 7.3.3). La tapa es $z = H$ y el fondo es $z = 0$. Supongamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} u(x, y, 0) &= 0. \\ u(x, y, H) &= f(x, y). \end{aligned}$$

y que $u = 0$ sobre la superficie lateral.

- (a) Separar la variable z .
 *(b) Resolver el problema si la región es una caja rectangular, $0 < x < L$, $0 < y < W$, $0 < z < H$.

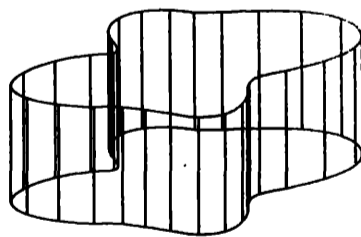


Figura 7.3.3

7.3.7. Resolver la ecuación de Laplace, si es posible,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

en el paralelepípedo $0 < x < L$, $0 < y < W$, $0 < z < H$, sujeta a las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) = 0, & u(x, 0, z) = 0, & u(x, y, 0) = f(x, y), \\
 & \frac{\partial u}{\partial x}(L, y, z) = 0, & u(x, W, z) = 0, & u(x, y, H) = 0. \\
 \text{(b)} \quad & u(0, y, z) = 0, & u(x, 0, z) = 0, & u(x, y, 0) = 0, \\
 & u(L, y, z) = 0, & u(x, W, z) = f(x, z), & u(x, y, H) = 0. \\
 * \text{(c)} \quad & \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) = 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z) = 0, & \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0) = 0, \\
 & \frac{\partial u}{\partial x}(L, y, z) = f(y, z), & \frac{\partial u}{\partial y}(x, W, z) = 0, & \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, H) = 0. \\
 * \text{(d)} \quad & \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) = 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z) = 0, & \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0) = 0, \\
 & u(L, y, z) = g(y, z), & \frac{\partial u}{\partial y}(x, W, z) = 0, & \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, H) = 0.
 \end{aligned}$$

Apéndice de la Sección 7.3: Esbozo de un método alternativo para separar variables

Un método alternativo (y equivalente) de separar variables para

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (7.3.33)$$

es buscar directamente soluciones producto de la forma

$$u(x, y, t) = f(x)g(y)h(t). \quad (7.3.34)$$

Sustituyendo (7.3.34) en (7.3.33), y dividiendo por $c^2 f(x)g(y)h(t)$, obtenemos

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = -\lambda, \quad (7.3.35)$$

tras introducir una constante de separación $-\lambda$. Esto prueba que

$$\boxed{\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h.} \quad (7.3.36)$$

Podemos separar más la Ecuación (7.3.35), de manera que

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\lambda - \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dy^2} = -\mu, \quad (7.3.37)$$

donde hemos introducido una nueva constante de separación $-\mu$:

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} = -\mu f,} \quad (7.3.38)$$

$$\frac{d^2g}{dy^2} = -(\lambda - \mu)g. \quad (7.3.39)$$

Hemos obtenido de este modo las mismas tres ecuaciones diferenciales ordinarias (con dos constantes de separación).

7.4. Enunciados e ilustración del teorema para el problema de autovalores $\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0$

Hemos mostrado, al resolver la ecuación del calor y la ecuación de ondas en una región R en dimensión dos o tres (con propiedades térmicas constantes, tales como la densidad), que la parte espacial $\phi(x, y, z)$ de soluciones producto $u(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)h(t)$ satisface el siguiente problema de autovalores multidimensional:

$$\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0, \quad (7.4.1)$$

con

$$a\phi + b\nabla\phi \cdot \hat{n} = 0 \quad (7.4.2)$$

sobre toda la frontera. Aquí a y b pueden depender de x, y, z . La Ecuación (7.4.1) se conoce como la **ecuación de Helmholtz**.

La Ecuación (7.4.1) puede generalizarse a

$$\nabla \cdot (p\nabla\phi) + q\phi + \lambda\sigma\phi = 0, \quad (7.4.3)$$

donde p, q y σ son funciones de x, y, z . Este problema de autovalores (con la condición de contorno (7.4.2)) es totalmente análogo al problema regular unidimensional de autovalores de Sturm-Liouville. Sin embargo, es preferible tratar un caso algo más simple, como es (7.4.1), que corresponde a $p = \sigma = 1$ y $q = 0$. Enunciaremos y probaremos resultados para (7.4.1) y dejaremos la discusión de (7.4.3) para algunos ejercicios (en la Sección 7.5).

Podremos resolver explícitamente la Ecuación (7.4.1) sólo en el caso de geometrías muy simples (por ejemplo: para rectángulos véase la Sección 7.3 y para círculos véase la Sección 7.7). En otros casos tendremos que conformarnos con un tratamiento numérico, pero, a pesar de todo, existen ciertas propiedades generales de (7.4.1) que son bastante útiles. Estas propiedades son análogas a resultados conocidos para el problema unidimensional de Sturm-Liouville. Discutiremos en la siguiente sección las razones para esta analogía, pero ahora empezaremos enunciando el teorema para el caso bidimensional de (7.4.1) y (7.4.2):

1. Todos los autovalores son reales.
2. Hay infinitos autovalores y existe un autovalor mínimo pero no un autovalor máximo.
3. Pueden existir varias autofunciones asociadas a un autovalor (en contraposición a los problemas de autovalores de Sturm-Liouville regulares).
4. Las autofunciones $\phi(x, y)$ forman un conjunto "completo", esto es, toda función suave a trozos $f(x, y)$ puede representarse como una serie de Fourier generalizada de las autofunciones:

$$f(x, y) \sim \sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda}(x, y). \quad (7.4.4)$$

Aquí, $\sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda}$ representa una combinación lineal de todas las autofunciones. La serie converge en media si se eligen los coeficientes a_{λ} correctamente.

5. Las autofunciones asociadas a autovalores diferentes (λ_1 y λ_2) son ortogonales con respecto al peso σ ($\sigma = 1$) sobre toda la región R . Matemáticamente, esto significa que

$$\iint_R \phi_{\lambda_1} \phi_{\lambda_2} dx dy = 0, \quad \text{si } \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad (7.4.5)$$

donde $\iint_R dx dy$ representa que debemos integrar sobre la región R . Además, las diferentes autofunciones asociadas a un mismo autovalor pueden hacerse ortogonales por el procedimiento de Gram-Schmidt (véase la Sección 7.5). Por tanto, podemos suponer que (7.4.5) es todavía válida incluso si $\lambda_1 = \lambda_2$, siempre que ϕ_{λ_1} sea independiente de ϕ_{λ_2} .

6. Cada autovalor λ está relacionado con cada una de sus autofunciones por medio del cociente de Rayleigh:

$$\lambda = \frac{-\oint \phi \nabla \phi \cdot \hat{n} ds + \iint_R |\nabla \phi|^2 dx dy}{\iint_R \phi^2 dx dy}. \quad (7.4.6)$$

Las condiciones de contorno simplifican a menudo la integral sobre la frontera.

En lo anterior, \hat{n} representa el vector normal unitario exterior a la región plana bidimensional R y $\oint ds$ denota la integral de línea sobre toda la frontera de R (ds es la diferencial de la longitud de arco).

El resultado tridimensional es casi idéntico; debemos reemplazar \iint por \iiint y la integral de línea sobre el borde $\oint ds$ por la integral de superficie sobre la frontera $\oiint dS$, donde dS denota la diferencial de área de la superficie frontera.

Ejemplo. Probaremos algunos de estos enunciados en la Sección 7.5. Pero ahora, para comprender su significado, mostraremos cómo el ejemplo de la Sección 7.3 ilustra la mayoría de ellos. En el caso de las vibraciones de una membrana rectangular ($0 < x < L$, $0 < y < H$) con condiciones de contorno prescritas nulas, hemos probado que el problema de autovalores asociado es

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi + \lambda \phi &= 0, \\ \phi(0, y) &= 0, \quad \phi(x, 0) = 0, \\ \phi(L, y) &= 0, \quad \phi(x, H) = 0. \end{aligned} \tag{7.4.7}$$

También determinamos los autovalores y sus correspondientes autofunciones:

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 \quad \begin{matrix} n = 1, 2, 3, \dots \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{matrix} \quad \text{con} \quad \phi_{nm}(x, y) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{sen} \frac{m\pi y}{H}. \tag{7.4.8}$$

1. **Autovalores reales.** En nuestro cálculo de los autovalores para (7.4.7) *supusimos* que existían autofunciones que podían escribirse en forma de producto. Bajo esta suposición, (7.4.8) nos prueba que los autovalores son reales. En cualquier caso, nuestro teorema garantiza que los autovalores son siempre reales.
2. **Ordenamiento de los autovalores.** Existe una sucesión doblemente infinita de autovalores para (7.4.7), en concreto, $\lambda_{nm} = (n\pi/L)^2 + (m\pi/H)^2$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ y $m = 1, 2, 3, \dots$. Existe un autovalor más pequeño que todos los demás, $\lambda_{11} = (\pi/L)^2 + (\pi/H)^2$, pero no existe el más grande de todos.
3. **Autovalores múltiples.** Nuestro teorema afirma, para $\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0$, que, en general, es posible que exista más de una autofunción asociada a un mismo autovalor. Para ilustrar esto, consideremos el problema (7.4.7) en el caso en que $L = 2H$. Entonces

$$\lambda_{nm} = \frac{\pi^2}{4H^2} (n^2 + 4m^2), \tag{7.4.9}$$

con

$$\phi_{nm} = \text{sen} \frac{n\pi x}{2H} \text{sen} \frac{m\pi y}{H}. \tag{7.4.10}$$

Notemos que es posible tener autofunciones diferentes asociadas al mismo autovalor. Por ejemplo, $n = 4, m = 1$ y $n = 2, m = 2$, conducen al mismo autovalor:

$$\lambda_{41} = \lambda_{22} = 20 \frac{\pi^2}{4H^2}.$$

Para $n = 4, m = 1$, la autofunción es $\phi_{41} = \text{sen}(4\pi x/2H) \text{sen}(\pi y/H)$, mientras que para $n = 2, m = 2$, es $\phi_{22} = \text{sen}(2\pi x/2H) \text{sen}(2\pi y/H)$. Esbozamos las curvas nodales para estas autofunciones en la Figura 7.4.1. Estas autofunciones son diferentes y están asociadas al mismo autovalor, $\lambda = 20(\pi^2/4H^2)$. No es sorprendente que el autovalor sea el mismo, puesto que una membrana vibrante en estos modos puede subdividirse en subregiones con las mismas dimensiones: una con $H \times H/2$ y la otra con $H/2 \times H$. Por simetría tendrán la misma frecuencia natural (y por tanto el mismo autovalor, puesto que la frecuencia natural es $c\sqrt{\lambda}$). De hecho, en general por simetría [y también por la Fórmula (7.4.9)] $\lambda_{(2n)m} = \lambda_{(2m)n}$.

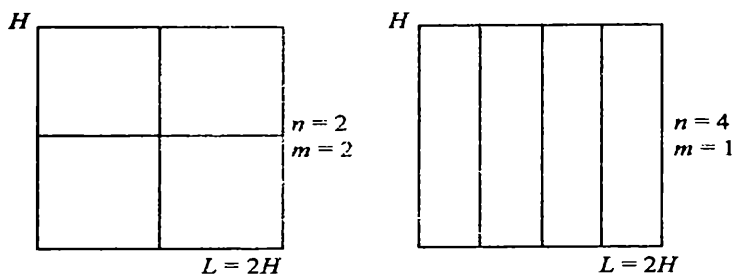


Figura 7.4.1: Curvas nodales para autofunciones con el mismo autovalor (caso simétrico).

Sin embargo, es también posible que haya más de una autofunción por razones que no tengan nada que ver con simetrías. Por ejemplo, $n = 1, m = 4$ y $n = 7, m = 2$ conducen al mismo autovalor: $\lambda_{14} = \lambda_{72} = 65(\pi^2/4H^2)$. Las autofunciones correspondientes son $\phi_{14} = \text{sen}(\pi x/2H) \text{sen}(4\pi y/H)$ y $\phi_{72} = \text{sen}(7\pi x/2H) \text{sen}(2\pi y/H)$, y están esbozadas en la Figura 7.4.2. Es una coincidencia que ambos perfiles vibren con la misma frecuencia. En estas situaciones, es posible que dos autofunciones estén asociadas al mismo autovalor. Podemos encontrar situaciones con más multiplicidades incluso. Puesto que $\lambda_{14} = \lambda_{72} = 65(\pi^2/4H^2)$, también es cierto que $\lambda_{28} = \lambda_{(14)4} = 260(\pi^2/4H^2)$. Sin embargo, por simetría $\lambda_{28} = \lambda_{(16)1}$ y $\lambda_{(14)4} = \lambda_{87}$. Por tanto,

$$\lambda_{28} = \lambda_{(16)1} = \lambda_{(14)4} = \lambda_{87} = 260 \left(\frac{\pi^2}{4H^2} \right).$$

En este caso, hemos encontrado cuatro autofunciones asociadas al mismo autovalor.

4a. Series de autofunciones. De acuerdo con (7.4.4), podemos usar siempre las autofunciones de $\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0$ para representar cualquier función suave a

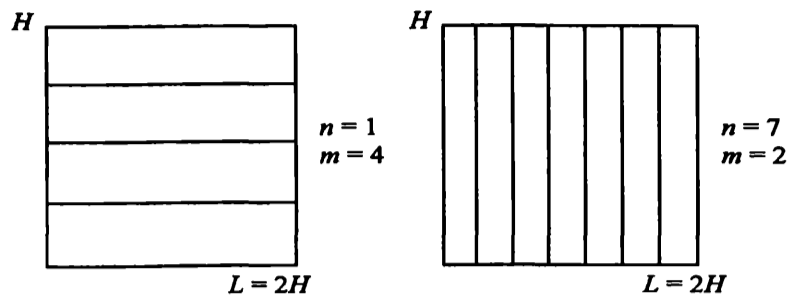


Figura 7.4.2: Curvas nodales para autofunciones con el mismo autovalor (caso asimétrico).

trozos $f(x, y)$. En nuestro ejemplo ilustrativo, (7.4.7), \sum_{λ} se convierte en una serie doble,

$$f(x, y) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}. \quad (7.4.11)$$

5. **Ortogonalidad de las autofunciones.** Mostraremos ahora que podemos usar la ortogonalidad multidimensional (7.4.5) de cualquier par de autofunciones diferentes¹ para determinar los coeficientes de Fourier generalizados a_{λ} que aparecen en (7.4.4). Haremos esto exactamente del mismo modo que hicimos para los desarrollos en autofunciones de Sturm-Liouville unidimensionales. Simplemente multiplicamos (7.4.4) por ϕ_{λ_i} e integramos sobre la región R :

$$\iint_R f \phi_{\lambda_i} dx dy = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \iint_R \phi_{\lambda} \phi_{\lambda_i} dx dy. \quad (7.4.12)$$

Puesto que las autofunciones son todas ortogonales unas a otras (con peso 1 porque $\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0$), se sigue que

$$\iint_R f \phi_{\lambda_i} dx dy = a_{\lambda_i} \iint_R \phi_{\lambda_i}^2 dx dy, \quad (7.4.13)$$

o, equivalentemente,

$$a_{\lambda_i} = \frac{\iint_R f \phi_{\lambda_i} dx dy}{\iint_R \phi_{\lambda_i}^2 dx dy}. \quad (7.4.14)$$

Observemos que no existe dificultad alguna para obtener (7.4.14) a partir de (7.4.13), puesto que el denominador de (7.4.14) es forzosamente positivo.

Para el caso especial de un rectángulo con condiciones de contorno prescritas nulas, (7.4.7), los coeficientes de Fourier generalizados a_{nm} están dados por

¹Si existe más de una autofunción asociada al mismo autovalor, suponemos que esas autofunciones son ortogonales, usando, si es necesario, el proceso de Gram-Schmidt.

(7.4.14):

$$a_{nm} = \frac{\int_0^H \int_0^L f(x, y) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} dx dy}{\int_0^H \int_0^L \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi y}{H} dx dy}. \quad (7.4.15)$$

Puede verse fácilmente que la integral del denominador es igual a $(L/2)(H/2)$ calculando las dos integrales unidimensionales; de esta manera, hemos obtenido de nuevo (7.3.30). En este caso, los coeficientes de Fourier generalizados a_{nm} que aparecen en (7.4.11) pueden ser evaluados de dos formas equivalentes:

- (a) Usando una fórmula de ortogonalidad bidimensional para las autofunciones de $\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0$.
- (b) Usando dos fórmulas de ortogonalidad unidimensionales.

4b. Convergencia. Como con cualquier problema de autovalores de tipo Sturm-Liouville (véase la Sección 5.10), se puede usar una serie *finita* de autofunciones de $\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0$ para aproximar una función $f(x, y)$. En particular, podríamos probar que, si medimos el error en el sentido de las medias cuadráticas,

$$E \equiv \iint_R \left(f - \sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda} \right)^2 dx dy, \quad (7.4.16)$$

con función peso 1, entonces este error se minimiza si los coeficientes a_{λ} vienen dados por (7.4.14), los coeficientes de Fourier generalizados. Es sabido que la aproximación mejora cuando el número de términos aumenta: $E \rightarrow 0$ a medida que incluimos más autofunciones. Decimos que la serie $\sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda}$ **converge en media** hacia f .

EJERCICIOS 7.4

7.4.1. Considérese el problema de autovalores

$$\nabla^2\phi + \lambda\phi = 0,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \phi(x, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(L, y) = 0, \quad \phi(x, H) = 0.$$

- *(a) Probar que existe una sucesión doblemente infinita de autovalores.
- (b) Probar que si $L = H$, la mayoría de los autovalores tienen más de una autofunción.
- (c) Deducir que las autofunciones son ortogonales en sentido bidimensional usando dos relaciones de ortogonalidad unidimensionales.

7.4.2. Probar que $\lambda \geq 0$ a partir del cociente de Rayleigh (7.4.6) sin usar la solución explícita de (7.4.7).

7.4.3. Para realizar este ejercicio, si es necesario véase la Sección 7.5:

- (a) Deducir la identidad $\iint (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u) dx dy = \oint (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \hat{n} ds$.
 (b) A partir de la parte (a), obtener (7.4.5).

7.4.4. Deducir (7.4.6) (si es necesario, véase la Sección 7.6). *Indicación:* multiplicar (7.4.1) por ϕ e integrar.

7.5. Operadores autoadjuntos y problemas de autovalores en varias dimensiones

Introducción. En esta sección vamos a probar algunas de las propiedades de los problemas de autovalores multidimensionales:

$$\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0, \quad (7.5.1)$$

con

$$\beta_1 \phi + \beta_2 \nabla \phi \cdot \hat{n} = 0, \quad (7.5.2)$$

sobre toda la frontera. Aquí, β_1 y β_2 son funciones reales de las variables espaciales. Al igual que en el caso de los problemas de autovalores de Sturm-Liouville, supondremos simplemente que existe un número infinito de autovalores de (7.5.1) - (7.5.2) y que el conjunto resultante de autofunciones es completo. Las pruebas de estas dos afirmaciones son difíciles y están más allá de los objetivos de este texto. Sin embargo, las pruebas de las otras propiedades del problema de autovalores multidimensional son bastante similares a las correspondientes pruebas para el problema de autovalores de Sturm-Liouville unidimensional. Hagamos

$$L \equiv \nabla^2, \quad (7.5.3)$$

en cuyo caso la notación para el problema de autovalores multidimensional se transforma en

$$L(\phi) + \lambda \phi = 0. \quad (7.5.4)$$

Comparando (7.5.4) con (7.5.1), observamos que la función peso para este problema multidimensional se espera que sea 1.

Fórmula de Green multidimensional. Las pruebas para el problema de autovalores unidimensional de Sturm-Liouville dependían de que la expresión $uL(v) - vL(u)$ fuera una diferencial exacta (identidad de Lagrange). Recordemos que también se necesitó su forma integrada (conocida como fórmula de Green). Deduciremos identidades similares para el operador de Laplace, $L = \nabla^2$, un análogo

multidimensional del operador diferencial de Sturm-Liouville. Necesitamos una expresión alternativa de $uL(v) - vL(u) = u\nabla^2v - v\nabla^2u$. Para obtenerla, recordemos que $\nabla^2u = \nabla \cdot (\nabla u)$ y $\nabla \cdot (a\mathbf{B}) = a\nabla \cdot \mathbf{B} + \nabla a \cdot \mathbf{B}$ (donde a es un escalar y \mathbf{B} un vector). Por tanto,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (u\nabla v) &= u\nabla^2v + \nabla u \cdot \nabla v, \\ \nabla \cdot (v\nabla u) &= v\nabla^2u + \nabla v \cdot \nabla u.\end{aligned}\tag{7.5.5}$$

Restando estas identidades obtenemos que

$$u\nabla^2v - v\nabla^2u = \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u).\tag{7.5.6}$$

La forma diferencial (7.5.6), es la versión multidimensional de la identidad de Lagrange, (5.5.7). Ahora, en lugar de integrar desde a hasta b como hicimos en el problema unidimensional, integremos sobre la región bidimensional R

$$\iint_R (u\nabla^2v - v\nabla^2u) \, dx \, dy = \iint_R \nabla \cdot (u\nabla v - v\nabla u) \, dx \, dy.$$

El miembro derecho está preparado para aplicar el teorema de la divergencia (recuérdese que $\iint_R \nabla \cdot \mathbf{A} \, dx \, dy = \oint \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$). Por tanto,

$$\iint_R (u\nabla^2v - v\nabla^2u) \, dx \, dy = \oint (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds.\tag{7.5.7}$$

La Ecuación (7.5.7) es análoga a la fórmula de Green (5.5.8) y es conocida como la **segunda identidad de Green**², pero nosotros nos referiremos a ella como la **fórmula de Green**.

Así pues, hemos probado que $L = \nabla^2$ es un operador multidimensional **autoadjunto** en el sentido siguiente:

Si u y v son cualquier pareja de funciones, tales que

$$\oint (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0,\tag{7.5.8}$$

entonces

$$\iint_R [uL(v) - vL(u)] \, dx \, dy = 0,\tag{7.5.9}$$

donde $L = \nabla^2$.

²La primera identidad de Green se obtiene integrando (7.5.5) [en lugar de (7.5.6)] con $v = u$ y aplicando el teorema de la divergencia.

Las condiciones de contorno prescritas tendrán la consecuencia de que, en muchos problemas, los términos de frontera se anulen. Por ejemplo, (7.5.9) es válida si ambas funciones, u y v , se anulan en la frontera. Conviene también observar que para problemas tridimensionales, debemos reemplazar \iint por \iiint y \oint por \oint .

Ortogonalidad de las autofunciones. Podemos probar varias de las afirmaciones de nuestro teorema directamente a partir de la fórmula de Green (7.5.7), como en el caso del problema de autovalores unidimensional de Sturm-Liouville. Para probar que las autofunciones correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales, consideremos dos autofunciones ϕ_1 y ϕ_2 correspondientes a los autovalores λ_1 y λ_2 :

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi_1 + \lambda_1\phi_1 &= 0 \quad \text{ó} \quad L(\phi_1) + \lambda_1\phi_1 = 0 \\ \nabla^2\phi_2 + \lambda_2\phi_2 &= 0 \quad \text{ó} \quad L(\phi_2) + \lambda_2\phi_2 = 0.\end{aligned}\tag{7.5.10}$$

Si ambas autofunciones ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen las mismas condiciones de contorno homogéneas, entonces se satisface (7.5.8) y en ese caso se sigue (7.5.9). Por tanto

$$\iint_R (-\phi_1\lambda_2\phi_2 + \phi_2\lambda_1\phi_1) \, dx \, dy = (\lambda_1 - \lambda_2) \iint_R \phi_1\phi_2 \, dx \, dy = 0.$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces

$$\iint_R \phi_1\phi_2 \, dx \, dy = 0,\tag{7.5.11}$$

lo que significa que las autofunciones asociadas a autovalores diferentes son ortogonales (en un sentido multidimensional y con peso 1). Si dos o más autofunciones están asociadas al mismo autovalor, entonces podemos hacer que sean ortogonales entre sí (y también a las demás autofunciones) por un procedimiento que se muestra en el apéndice de esta sección y que se conoce como método de Gram-Schmidt.

Ahora podemos probar que los autovalores son todos reales. La prueba se deja como un ejercicio, puesto que es idéntica a la que usamos para el problema unidimensional de Sturm-Liouville (véase la Sección 5.5).

EJERCICIOS 7.5

7.5.1. El desplazamiento vertical de una membrana no uniforme satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

donde c depende de x e y . Supóngase que $u = 0$ sobre la frontera de una membrana con forma irregular.

(a) Probar que se puede separar la variable temporal suponiendo que

$$u(x, y, t) = \phi(x, y)h(t).$$

Probar que $\phi(x, y)$ satisface el problema de autovalores

$$\nabla^2 \phi + \lambda \sigma(x, y) \phi = 0 \quad \text{con } \phi = 0 \quad \text{sobre la frontera.} \quad (7.5.12)$$

¿Qué es $\sigma(x, y)$?

- (b) Determinar las frecuencias de vibración suponiendo conocidos los autovalores y que son positivos.

7.5.2. Considérese el problema de autovalores bidimensional (7.5.12) (véase el Ejercicio 7.5.1):

- (a) Probar que las autofunciones asociadas a autovalores distintos son ortogonales (¿con qué peso?).
 (b) Probar que todos los autovalores son reales.
 (c) Resolver el Ejercicio 7.6.1.

7.5.3. Rehacer el Ejercicio 7.5.2 si la condición de contorno se cambia por

- (a) $\nabla \phi \cdot \hat{n} = 0$ sobre la frontera.
 (b) $\nabla \phi \cdot \hat{n} + h(x, y) \phi = 0$ sobre la frontera.
 (c) $\phi = 0$ sobre parte de la frontera y $\nabla \phi \cdot \hat{n} = 0$ sobre el resto de la misma.

7.5.4. Considérese la ecuación del calor en tres dimensiones sin fuentes pero con propiedades térmicas no constantes,

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K_0 \nabla u),$$

donde $c\rho$ y K_0 son funciones de x, y, z . Supóngase que $u = 0$ sobre la frontera. Probar que se puede separar la variable temporal suponiendo que

$$u(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)h(t).$$

Probar que $\phi(x, y, z)$ satisface el problema de autovalores

$$\nabla \cdot (p \nabla \phi) + \lambda \sigma(x, y, z) \phi = 0, \quad \text{con } \phi = 0 \quad \text{sobre la frontera.} \quad (7.5.13)$$

¿Qué son $\sigma(x, y, z)$ y $p(x, y, z)$?

7.5.5. Considérese el problema de autovalores tridimensional (7.5.13) (véase el Ejercicio 7.5.4):

- (a) Probar que las autofunciones asociadas a autovalores diferentes son ortogonales (¿con qué peso?).
 (b) Probar que todos los autovalores son reales.
 (c) Resolver el Ejercicio 7.6.3.

7.5.6. Obtener una expresión para

$$\iint [uL(v) - vL(u)] dx dy$$

sobre una región bidimensional R , donde

$$L = \nabla^2 + q(x, y) \quad [\text{es decir, } L(u) = \nabla^2 u + q(x, y)u].$$

7.5.7. Considérese la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en una región tridimensional R (donde u es la temperatura). Supóngase que el flujo de calor está dado sobre la frontera (pero no es necesariamente una constante).

- (a) Explicar *físicamente* por qué $\oint \nabla u \cdot \hat{n} dS = 0$.
- (b) Demostrar esto matemáticamente.

7.5.8. Supóngase que en una región tridimensional R

$$\nabla^2 \phi = f(x, y, z),$$

con f dada y $\nabla \phi \cdot \hat{n} = 0$ sobre la frontera.

- (a) Probar matemáticamente que si existe solución, necesariamente

$$\iiint_R f dx dy dz = 0.$$

- (b) Explicar físicamente de forma breve (usando el modelo del flujo de calor) ¿por qué la condición (a) se debe verificar para cualquier solución? ¿Qué ocurre en un problema de flujo de calor si

$$\iiint_R f dx dy dz > 0?$$

7.5.9. Probar que el término de frontera (7.5.8) se anula si ambas funciones u y v satisfacen (7.5.2):

- (a) Suponiendo que $\beta_2 \neq 0$.
- (b) Suponiendo que $\beta_2 = 0$ sobre parte de la frontera.

Apéndice de la Sección 7.5: El método de Gram-Schmidt

Deseamos probar en general que las autofunciones *asociadas al mismo autovalor* pueden hacerse ortogonales. El proceso es conocido como **ortogonalización de Gram-Schmidt**. Supongamos que $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ son autofunciones independientes asociadas al mismo autovalor. Formaremos un conjunto de n autofunciones independientes que denotaremos $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ que serán mutuamente ortogonales,

incluso aunque ϕ_1, \dots, ϕ_n no lo sean. Tomaremos en primer lugar $\psi_1 = \phi_1$. Cualquier combinación lineal de autofunciones asociadas a un mismo autovalor es de nuevo una autofunción asociada a ese autovalor (puesto que todas ellas satisfacen la *misma* ecuación diferencial lineal homogénea y las mismas condiciones de contorno). Por tanto, $\psi_2 = \phi_2 + c\psi_1$ es también una autofunción (automáticamente independiente de ψ_1) donde c es una constante arbitraria. Elegimos ahora c de modo que $\psi_2 = \phi_2 + c\psi_1$ sea ortogonal a ψ_1 : $\iint_R \psi_1 \psi_2 \, dx \, dy = 0$ se convierte en

$$\iint_R (\phi_2 + c\psi_1)\psi_1 \, dx \, dy = 0,$$

con lo que c está determinada de modo único:

$$c = \frac{-\iint_R \phi_2 \psi_1 \, dx \, dy}{\iint_R \psi_1^2 \, dx \, dy}. \quad (7.5.14)$$

Como puede haber más de dos autofunciones asociadas al mismo autovalor, continuamos este proceso.

Una tercera autofunción es $\psi_3 = \phi_3 + c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, donde elegimos c_1 y c_2 de modo que ψ_3 sea ortogonal a las dos primeras: $\iint_R \psi_3 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \, dx \, dy = 0$. Así pues,

$$\iint_R (\phi_3 + c_1\psi_1 + c_2\psi_2) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \, dx \, dy = 0.$$

Sin embargo, ψ_2 es ya ortogonal a ψ_1 , y por tanto

$$\iint_R \phi_3 \psi_1 \, dx \, dy + c_1 \iint_R \psi_1^2 \, dx \, dy = 0,$$

$$\iint_R \phi_3 \psi_2 \, dx \, dy + c_2 \iint_R \psi_2^2 \, dx \, dy = 0,$$

de donde se determinan fácilmente las dos constantes. Este proceso puede usarse para obtener n autofunciones ortogonales. En general, obtendremos que

$$\psi_j = \phi_j - \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{\iint_R \phi_j \psi_i \, dx \, dy}{\iint_R \psi_i^2 \, dx \, dy} \right) \psi_i.$$

Hemos probado, por tanto, que, incluso en el caso de autovalores múltiples, podemos suponer que nuestras autofunciones son ortogonales, usando, si es necesario, esta construcción de Gram-Schmidt.

7.6. Cociente de Rayleigh

En la Sección 5.6 obtuvimos el cociente de Rayleigh para el problema de autovalores unidimensional de Sturm-Liouville. Obtuvimos el resultado multiplicando la

ecuación diferencial por ϕ , integrando sobre toda la región, despejando λ , y simplificando tras usar la integración por partes. Deduciremos ahora un resultado similar para la ecuación

$$\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0. \quad (7.6.1)$$

Procedamos como antes: multiplicamos (7.6.1) por ϕ , integramos sobre la región bidimensional y despejamos λ , para obtener la fórmula

$$\lambda = \frac{-\iint_R \phi \nabla^2 \phi \, dx \, dy}{\iint_R \phi^2 \, dx \, dy}. \quad (7.6.2)$$

Ahora queremos generalizar la integración por partes a funciones multidimensionales. La integración por partes está basada en la regla de la derivada de un producto, $(fg)' = f g' + g f'$. En el caso multidimensional, en lugar de usar la derivada, usamos una regla para la divergencia de un producto $\nabla \cdot (fg) = f \nabla \cdot g + g \cdot \nabla f$, donde f denota un campo escalar y g uno vectorial. Haciendo $f = \phi$ y $g = \nabla \phi$, se sigue que $\nabla \cdot (\phi \nabla \phi) = \phi \nabla \cdot (\nabla \phi) + \nabla \phi \cdot \nabla \phi$. Puesto que $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi$ y $\nabla \phi \cdot \nabla \phi = |\nabla \phi|^2$, tenemos que

$$\phi \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) - |\nabla \phi|^2. \quad (7.6.3)$$

Usando (7.6.3), (7.6.2) nos proporciona una expresión alternativa para el autovalor,

$$\lambda = \frac{-\iint_R \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) \, dx \, dy + \iint_R |\nabla \phi|^2 \, dx \, dy}{\iint_R \phi^2 \, dx \, dy}. \quad (7.6.4)$$

Usemos ahora (de nuevo) el teorema de la divergencia para evaluar la primera integral en el numerador de (7.6.4). Puesto que $\iint_R \nabla \cdot \mathbf{A} \, dx \, dy = \oint \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$, se sigue la expresión

$$\lambda = \frac{-\oint \phi \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds + \iint_R |\nabla \phi|^2 \, dx \, dy}{\iint_R \phi^2 \, dx \, dy}, \quad (7.6.5)$$

que se conoce como el **cociente de Rayleigh** y es bastante similar al cociente de Rayleigh para los problemas de autovalores de Sturm-Liouville. Obsérvese que existe una contribución de frontera para cada uno de estos cocientes: $-p \phi \, d\phi/dx|_a^b$ para (5.6.3) y $-\oint \phi \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds$ para (7.6.5).

Ejemplo. Consideremos cualquier región en la que la condición de contorno sea $\phi = 0$ sobre toda la frontera. Entonces $\oint \phi \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} \, ds = 0$ y, por tanto, de (7.6.5) se deduce que $\lambda \geq 0$. Si fuera $\lambda = 0$, entonces (7.6.5) implicaría que

$$0 = \iint_R |\nabla \phi|^2 \, dx \, dy. \quad (7.6.6)$$

Así pues,

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} = \mathbf{0}, \quad (7.6.7)$$

en todas partes. De (7.6.7) se sigue que $\partial\phi/\partial x = 0$ y $\partial\phi/\partial y = 0$ en todas partes. Por tanto, ϕ es una función constante, pero como $\phi = 0$ en la frontera, se sigue que $\phi = 0$ en todas partes. Pero la función $\phi \equiv 0$ no es una autofunción y, por tanto, hemos probado que $\lambda = 0$ no es un autovalor. En conclusión, $\lambda > 0$.

EJERCICIOS 7.6

7.6.1. Considérese el problema de autovalores bidimensional con $\sigma > 0$ (véase el Ejercicio 7.5.1):

$$\nabla^2\phi + \lambda\sigma(x, y)\phi = 0, \quad \text{con } \phi = 0 \text{ sobre la frontera.}$$

(a) Probar que $\lambda \geq 0$.

(b) ¿Es $\lambda = 0$ un autovalor? Si lo es, ¿cuál es su autofunción?

7.6.2. Rehacer el Ejercicio 7.6.1 si la condición de contorno se sustituye por

(a) $\nabla\phi \cdot \hat{n} = 0$ sobre la frontera.

(b) $\nabla\phi \cdot \hat{n} + h(x, y)\phi = 0$ sobre la frontera.

(c) $\phi = 0$ sobre parte de la frontera y $\nabla\phi \cdot \hat{n} = 0$ sobre el resto de la misma.

7.6.3. Rehacer el Ejercicio 7.6.1 si la ecuación diferencial es

$$\nabla \cdot (p\nabla\phi) + \lambda\sigma(x, y, z)\phi = 0$$

con condición de contorno

(a) $\phi = 0$ sobre la frontera.

(b) $\nabla\phi \cdot \hat{n} = 0$ sobre la frontera.

7.6.4. (a) Si $\nabla^2\phi = 0$ con $\phi = 0$ sobre la frontera, probar que $\phi = 0$ en todas partes. *Indicación:* usar el hecho de que $\lambda = 0$ no es un autovalor para $\nabla^2\phi = -\lambda\phi$.

(b) Probar que no pueden existir dos soluciones diferentes del problema

$$\nabla^2u = f(x, y, z)$$

con la condición de contorno $u = g(x, y, z)$ sobre la frontera. *Indicación:* considérese $u_1 - u_2$ y úsese el apartado (a).

7.7. Membrana vibrante circular y funciones de Bessel

7.7.1. Introducción

Mostremos ahora una aplicación interesante de los problemas de autovalores tanto unidimensionales (Sturm-Liouville) como multidimensionales. Consideremos las vibraciones de una membrana circular. El desplazamiento vertical satisface la ecuación de ondas bidimensional,

$$\text{EDP : } \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u.} \quad (7.7.1)$$

La geometría del problema nos sugiere que usemos coordenadas polares, $u = u(r, \theta, t)$. Supondremos que la membrana tiene desplazamiento nulo en la frontera circular, $r = a$:

$$\text{CC : } \boxed{u(a, \theta, t) = 0.} \quad (7.7.2)$$

También supondremos conocidas la posición y velocidad iniciales:

$$\text{CI : } \boxed{\begin{aligned} u(r, \theta, 0) &= \alpha(r, \theta), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) &= \beta(r, \theta). \end{aligned}} \quad (7.7.3)$$

7.7.2. Separación de variables

En primer lugar separamos la variable temporal buscando soluciones producto de la forma,

$$u(r, \theta, t) = \phi(r, \theta)h(t). \quad (7.7.4)$$

Como hemos visto ya anteriormente, $h(t)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h, \quad (7.7.5)$$

donde λ es una constante de separación. A partir de (7.7.5) deducimos que las frecuencias naturales de vibración son $c\sqrt{\lambda}$ (si $\lambda > 0$). Además, $\phi(r, \theta)$ satisface el problema de autovalores bidimensional

$$\boxed{\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0,} \quad (7.7.6)$$

con $\phi = 0$ sobre toda la frontera, $r = a$:

$$\phi(a, \theta) = 0. \quad (7.7.7)$$

Intentemos ahora obtener soluciones producto de (7.7.6) en coordenadas polares,

$$\phi(r, \theta) = f(r)g(\theta), \quad (7.7.8)$$

puesto que en esas coordenadas, los puntos de la membrana verifican $0 < r < a$, $-\pi < \theta < \pi$. Esto equivale a buscar desde el principio soluciones de la ecuación de ondas que sean producto de funciones de cada variable independiente, $u(r, \theta, t) = f(r)g(\theta)h(t)$. Sustituyamos ahora (7.7.8) en (7.7.6); en coordenadas polares, se tiene que

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2},$$

con lo que $\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0$ se convierte en

$$\frac{g(\theta)}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \frac{f(r)}{r^2} \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \lambda f(r)g(\theta) = 0. \quad (7.7.9)$$

Podemos separar las variables r y θ multiplicando esta ecuación por r^2 y dividiéndola por $f(r)g(\theta)$:

$$-\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} = \frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \lambda r^2 = \mu. \quad (7.7.10)$$

Hemos introducido una nueva constante de separación que hemos escrito en la forma μ debido a nuestra experiencia anterior con regiones circulares (véanse las Secciones 2.4.2 y 2.5.2), que nos sugiere que $g(\theta)$ debe oscilar para que pueda satisfacer las condiciones periódicas en la variable θ . Así pues, nuestras tres ecuaciones diferenciales, con dos constantes de separación, son

$$\boxed{\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h,} \quad (7.7.11)$$

$$\boxed{\frac{d^2 g}{d\theta^2} = -\mu g,} \quad (7.7.12)$$

$$\boxed{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + (\lambda r^2 - \mu) f = 0.} \quad (7.7.13)$$

Dos de estas ecuaciones deben ser problemas de autovalores. Sin embargo, si ignoramos las condiciones iniciales, la única condición de contorno que tenemos es la

que se sigue del hecho de que $u(a, \theta, t) = 0$ ó $\phi(a, \theta) = 0$, es decir, $f(a) = 0$. Sin embargo, si recordamos que $-\pi < \theta < \pi$ y $0 < r < a$, tanto θ como r están definidas en intervalos finitos, por lo que ambas deberían satisfacer condiciones de contorno en los extremos de esos intervalos. Así, la naturaleza periódica de la solución en θ implica que

$$g(-\pi) = g(\pi), \quad (7.7.14)$$

$$\frac{dg}{d\theta}(-\pi) = \frac{dg}{d\theta}(\pi). \quad (7.7.15)$$

Por otro lado, ya teníamos una condición en $r = a$. Puesto que las coordenadas polares son singulares en $r = 0$, debemos introducir una condición de singularidad en ese punto. Puesto que el desplazamiento de la membrana debe ser finito, concluimos que

$$|f(0)| < \infty.$$

7.7.3. Problemas de autovalores (unidimensionales)

Tras separar variables, hemos obtenido dos problemas de autovalores. Estamos bastante familiarizados con uno de ellos, el problema de autovalores en la variable θ , (7.7.12) con (7.7.14) y (7.7.15). Aunque no es un problema regular de Sturm-Liouville debido a las condiciones de contorno periódicas, sabemos que los autovalores son

$$\mu_m = m^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.7.16)$$

y las autofunciones correspondientes son

$$g(\theta) = \text{sen } m\theta \quad \text{y} \quad g(\theta) = \text{cos } m\theta. \quad (7.7.17)$$

Obsérvese que para $m = 0$ sólo tenemos una autofunción (no dos como para $m \neq 0$). Como ya sabemos, este problema de autovalores genera una serie de Fourier en la variable θ . Conviene señalar que m representa el número de máximos en la dirección θ .

Para cada valor entero de m , (7.7.13) define un problema de autovalores para λ :

$$\boxed{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + (\lambda r^2 - m^2) f = 0,} \quad (7.7.18)$$

$$\boxed{f(a) = 0,} \quad (7.7.19)$$

$$\boxed{|f(0)| < \infty.} \quad (7.7.20)$$

Puesto que la Ecuación (7.7.18) tiene coeficientes no constantes, no es sorprendente que sea algo más difícil de analizar. Podemos escribir la Ecuación (7.7.18) en la forma de un problema de Sturm-Liouville dividiéndola por r :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(\lambda r - \frac{m^2}{r} \right) f = 0, \quad (7.7.21)$$

o lo que es lo mismo, $Lf + \lambda r f = 0$, donde $L = (d/dr)(r d/dr) - m^2/r$. Comparando con la ecuación diferencial general de Sturm-Liouville,

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d\phi}{dx} \right] + q\phi + \lambda\sigma\phi = 0,$$

con variable independiente r , tenemos que $x = r$, $p(r) = r$, $\sigma(r) = r$ y $q(r) = -m^2/r$. Así pues, nuestro problema no es un problema regular de Sturm-Liouville debido al comportamiento en el origen ($r = 0$):

1. La condición de contorno en $r = 0$, (7.7.20), no es de la forma correcta.
2. $p(r) = 0$ y $\sigma(r) = 0$ en $r = 0$ (y por tanto no son positivas en todas partes).
3. $q(r)$ tiende a ∞ cuando $r \rightarrow 0$ [y por tanto $q(r)$ no es continua] para $m \neq 0$.

Sin embargo, se demuestra que todos los resultados que enunciamos para los problemas regulares de Sturm-Liouville son válidos todavía para este importante problema singular de Sturm-Liouville. En primer lugar, existe una sucesión infinita de autovalores (para cada m). Denotemos los autovalores por λ_{nm} , donde $m = 0, 1, 2, \dots$ y $n = 1, 2, \dots$, y las autofunciones por $f_{nm}(r)$. Para cada m fijo, estas autofunciones son ortogonales con peso r [véase (7.7.21)], puesto que puede probarse que los términos de frontera en la fórmula de Green se anulan (véase el Ejercicio 5.5.1). Por tanto,

$$\int_0^a f_{mn_1} f_{mn_2} r \, dr = 0 \quad \text{para } n_1 \neq n_2. \quad (7.7.22)$$

Enunciaremos brevemente más propiedades explícitas de estas autofunciones.

7.7.4. Ecuación de Bessel

Como acabamos de ver, la solución en la variable radial que se obtiene al separar variables satisface una ecuación diferencial "singular" de Sturm-Liouville, (7.7.21). Esta ecuación puede escribirse en forma alternativa usando la regla de derivación del producto y multiplicando por r :

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} + (\lambda r^2 - m^2) f = 0. \quad (7.7.23)$$

Podemos realizar un análisis adicional de (7.7.23). La Ecuación (7.7.23) contiene dos parámetros, m y λ . Ya sabemos que m es un entero, pero los valores permisibles de λ todavía son desconocidos para nosotros. Sería bastante tedioso resolver numéricamente (7.7.23) para varios valores de λ (para diferentes valores enteros de m). En lugar de ello, debemos observar que el simple cambio de escala,

$$z = \sqrt{\lambda}r, \quad (7.7.24)$$

elimina la dependencia de λ de la ecuación diferencial:

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + (z^2 - m^2) f = 0. \quad (7.7.25)$$

Observemos también que podemos llevar a cabo el cambio de variable (7.7.24) puesto que probamos en la Sección 7.6, a partir del cociente de Rayleigh multidimensional, que λ es positivo³ (para $\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0$) siempre que $\phi = 0$ sobre toda la frontera, como ocurre aquí. Podemos probar también que $\lambda > 0$ para este problema usando el cociente de Rayleigh unidimensional, que se basa en (7.7.18) - (7.7.20) (véase el Ejercicio 7.7.13). La Ecuación (7.7.25) tiene la ventaja de que no depende de λ , con lo que hace falta menos trabajo para resolver (7.7.25) que para resolver (7.7.23). Sin embargo, conviene resaltar que hemos ganado más que eso, puesto que la Ecuación (7.7.25) ha sido investigada durante más 150 años y, de hecho, es conocida como la **ecuación diferencial de Bessel de orden m** .

7.7.5. Puntos singulares y Ecuación de Bessel

En esta subsección vamos a desarrollar *brevemente* algunas de las propiedades de la ecuación diferencial de Bessel. La Ecuación (7.7.25) es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables. No podremos obtener una solución exacta en forma cerrada de (7.7.25) que involucre funciones elementales. A la hora de analizar una ecuación diferencial, una de las primeras cosas que debemos hacer es buscar valores especiales de la variable independiente que podrían causar algunas dificultades. En nuestro caso, $z = 0$ es un punto singular de (7.7.25).

Quizás deberíamos definir qué es lo que se entiende por punto singular de una ecuación diferencial. Escribiendo la ecuación en forma estándar:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + a(z) \frac{df}{dz} + b(z) f = 0,$$

³En otros problemas, si $\lambda = 0$, la transformación (7.7.24) no es válida. Sin embargo, en este caso el cambio de variable no es necesario puesto que (7.7.23) se convierte en una ecuación equidimensional que puede revolverse de forma explícita (como en la Sección 2.5.2).

el punto $z = z_0$ se llama un punto ordinario si $a(z)$, $b(z)$ y todas sus derivadas son finitas en $z = z_0$. En otro caso, $z = z_0$ es un punto singular. Para la ecuación diferencial de Bessel, $a(z) = 1/z$ y $b(z) = 1 - m^2/z^2$, por lo que todos los puntos finitos⁴, excepto $z = 0$, son puntos ordinarios. En cambio, $z = 0$ es un punto singular (puesto que, por ejemplo, $a(0)$ no está definido).

Es conocido a partir de la teoría de ecuaciones diferenciales, que en el entorno de un punto ordinario todas las soluciones de la ecuación diferencial se comportan bien (esto es, existen tanto $f(z)$ como todas sus derivadas en ese entorno). Tenemos garantizado, por tanto, que todas las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel se comportan bien en todo punto finito, excepto posiblemente en $z = 0$. Así, la única dificultad que podemos tener estará en el entorno de $z = 0$. Investiguemos, pues, el comportamiento que se espera de las soluciones de la ecuación de Bessel cerca de $z = 0$. Para ello, describiremos una primera aproximación (pero importante) de estas soluciones. Si z está muy cercano a 0, entonces deberíamos esperar que el término $z^2 f$ en la ecuación de Bessel pudiera ser ignorado, puesto que es mucho más pequeño⁵ que $m^2 f$. No ignoramos los términos $z^2 d^2 f/dz^2$ ó $z df/dz$ porque, aunque z sea pequeña, es posible que las derivadas de f sean lo bastante grandes como para que $z df/dz$ sea tan grande como $-m^2 f$. La eliminación del término $z^2 f$ nos conduce a la ecuación

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} - m^2 f \approx 0, \quad (7.7.26)$$

que constituye una aproximación válida cerca de $z = 0$. La ventaja de esta *aproximación* es que (7.7.26) es resoluble de forma exacta, puesto que es una ecuación equidimensional (conocida como ecuación de Cauchy o de Euler; véase la Sección 2.5.2). Podemos resolver la Ecuación (7.7.26) buscando soluciones de la forma

$$f \approx z^s. \quad (7.7.27)$$

Sustituyendo (7.7.27) en (7.7.26), obtenemos una ecuación cuadrática para s ,

$$s(s-1) + s - m^2 = 0, \quad (7.7.28)$$

conocida como **ecuación indicial**. Así, $s^2 = m^2$ y las dos raíces (índices) son $s = \pm m$. Si $m \neq 0$ (en cuyo caso supondremos que $m > 0$), entonces obtenemos dos soluciones aproximadas independientes.

$$f \approx z^m \quad \text{y} \quad f \approx z^{-m} \quad (m > 0). \quad (7.7.29)$$

Sin embargo, si $m = 0$, obtenemos sólo una solución independiente $f \approx z^0 = 1$. Podemos deducir una segunda solución fácilmente a partir de (7.7.26). Si $m = 0$,

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} \approx 0, \quad \text{es decir} \quad z \frac{d}{dz} \left(z \frac{df}{dz} \right) \approx 0.$$

⁴Puede probarse que, con una definición apropiada, el punto $z = \infty$ no es un punto ordinario para la ecuación diferencial de Bessel.

⁵Se tiene que $z^2 f$ puede ser eliminado, incluso si $m = 0$, cerca de $z = 0$, de forma que la ecuación resultante todavía proporciona una buena aproximación.

Por tanto, $z df/dz$ es constante y, además de $f \approx 1$, es también posible que sea $f \approx \ln z$. Resumiendo, para $m = 0$ hay dos soluciones independientes que tienen el comportamiento esperado cerca de $z = 0$,

$$f \approx 1 \quad \text{y} \quad f \approx \ln z \quad (m = 0). \quad (7.7.30)$$

La solución general de la ecuación diferencial de Bessel será una combinación lineal de dos soluciones independientes que satisfacen (7.7.29) si $m \neq 0$ y (7.7.30) si $m = 0$.

Hasta aquí, hemos obtenido sólo el comportamiento esperado cerca de $z = 0$. En la siguiente subsección obtendremos propiedades adicionales, pero antes de hacerlo conviene resaltar que a causa de la existencia de un punto singular en $z = 0$, es posible que las soluciones no se comporten bien en $z = 0$. De hecho, vemos a partir de (7.7.29) y (7.7.30) que podemos elegir soluciones independientes de la ecuación diferencial de Bessel de modo tal que una de ellas se comporta bien en $z = 0$ mientras que la otra no lo hace (obsérvese que una de las soluciones verifica que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \pm\infty$).

7.7.6. Funciones de Bessel y su comportamiento cerca de $z = 0$

Continuemos discutiendo la ecuación diferencial de Bessel de orden m ,

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + (z^2 - m^2) f = 0. \quad (7.7.31)$$

Cerca de $z = 0$, existen soluciones singulares y soluciones que se comportan bien. Como la ecuación diferencial depende de m , las soluciones correspondientes dependerán también de m . La notación estándar para una *solución* de (7.7.31) que se comporta bien, es $J_m(z)$, y una solución de este tipo se llama **función de Bessel de orden m de primera especie**. De modo similar, la notación usual para una solución singular de la ecuación de Bessel es $Y_m(z)$, y se denomina **función de Bessel de orden m de segunda especie**. Muchos problemas que usan la ecuación de Bessel se resuelven simplemente recordando que $Y_m(z)$ tiende a $\pm\infty$ cuando $z \rightarrow 0$.

La solución general de cualquier ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden se obtiene mediante una combinación lineal de dos soluciones independientes. Por tanto, la solución general de la ecuación de Bessel (7.7.31) es

$$f = c_1 J_m(z) + c_2 Y_m(z). \quad (7.7.32)$$

Las definiciones precisas de $J_m(z)$ e $Y_m(z)$ se dan en la Sección 7.8. Sin embargo, para nuestros propósitos inmediatos, sólo necesitamos observar que *para z pequeño*

($z \rightarrow 0$) se comportan de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}
 J_m(z) \sim \begin{cases} 1 & m = 0, \\ \frac{1}{2^m m!} z^m & m > 0, \end{cases} \\
 Y_m(z) \sim \begin{cases} \frac{2}{\pi} \ln z & m = 0, \\ -\frac{2^m (m-1)!}{\pi} z^{-m} & m > 0. \end{cases}
 \end{array} \quad (7.7.33)$$

Debemos resaltar que (7.7.33) es consistente con el comportamiento aproximado que dedujimos en la sección anterior, (7.7.29) y (7.7.30). Obsérvese que $J_m(z)$ está acotada cuando $z \rightarrow 0$, mientras que $Y_m(z)$ no lo está.

7.7.7. Problemas de autovalores que involucran funciones de Bessel

En esta sección determinaremos los autovalores del problema de Sturm-Liouville singular (m está fijo):

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(\lambda r - \frac{m^2}{r} \right) f = 0, \quad (7.7.34)$$

$$f(a) = 0, \quad (7.7.35)$$

$$|f(0)| < \infty. \quad (7.7.36)$$

Haciendo el cambio de variable $z = \sqrt{\lambda r}$, (7.7.34) se convierte en la ecuación diferencial de Bessel,

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + (z^2 - m^2) f = 0.$$

La solución general de esta ecuación es una combinación lineal de funciones de Bessel, $f = c_1 J_m(z) + c_2 Y_m(z)$. El cambio de escala implica que en términos de la coordenada radial r , tenemos

$$f = c_1 J_m(\sqrt{\lambda r}) + c_2 Y_m(\sqrt{\lambda r}). \quad (7.7.37)$$

Determinaremos los autovalores aplicando las condiciones de contorno homogéneas (7.7.35) y (7.7.36). Como $f(0)$ es finito, pero $Y_m(0)$ es infinito, debe ser $c_2 = 0$, lo

que implica que

$$f = c_1 J_m(\sqrt{\lambda}r). \quad (7.7.38)$$

Por tanto, la condición $f(a) = 0$ determina los autovalores:

$$J_m(\sqrt{\lambda}a) = 0. \quad (7.7.39)$$

Se sigue que $\sqrt{\lambda}a$ debe ser un cero de la función de Bessel $J_m(z)$. Más tarde, en la Sección 7.8.1, mostraremos que el perfil de una función de Bessel es el de una onda amortiguada. Cada función de Bessel $J_m(z)$ tiene infinitos ceros. Denotemos por z_{mn} el n -ésimo cero de $J_m(z)$. Entonces

$$\sqrt{\lambda}a = z_{mn}, \quad \text{es decir,} \quad \lambda_{mn} = \left(\frac{z_{mn}}{a}\right)^2. \quad (7.7.40)$$

Por tanto, para cada m hay un número infinito de autovalores. Obsérvese que (7.7.40) es el resultado análogo a $\lambda = (n\pi/L)^2$, ya que $n\pi$ son los ceros de la función $\sin x$.

Ejemplo. En la Figura 7.7.1 se esboza la gráfica de la función $J_0(z)$. Usando unas tablas lo suficientemente precisas⁶, vemos que el primer cero de $J_0(z)$ es $z = 2.4048255577\dots$. En la Figura 7.7.1. se representan también algunos otros ceros. Recuerdese que los autovalores son $\lambda_{0n} = (z_{0n}/a)^2$.

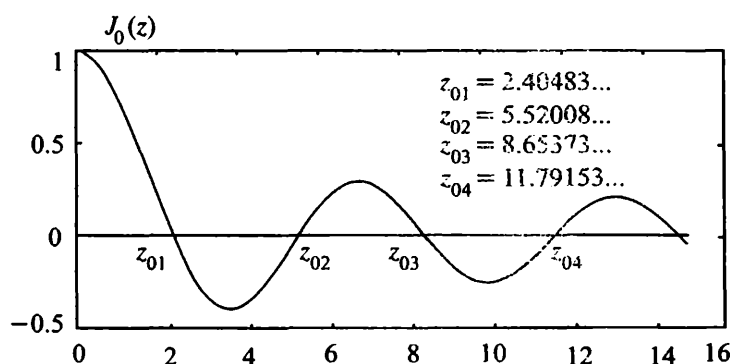


Figura 7.7.1: Gráfica de $J_0(z)$ y sus ceros.

Autofunciones. Las autofunciones son, por tanto,

$$J_m\left(\sqrt{\lambda_{mn}}r\right) = J_m\left(z_{mn}\frac{r}{a}\right), \quad (7.7.41)$$

⁶Existen tablas de los ceros de las funciones de Bessel. El libro *Handbook of Mathematical Functions* (Abramowitz y Stegun [1965]) es una posible fuente de ellas. Alternativamente, hay alrededor de 700 páginas dedicadas a las funciones de Bessel en el libro *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* de Watson [1966].

para $m = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$. Para cada m , éstas forman un conjunto infinito de autofunciones del problema de Sturm-Liouville singular (7.7.34) - (7.7.36). Para m fijo, estas autofunciones son ortogonales con peso r [como ya discutimos; véase (7.7.22)]:

$$\int_0^a J_m(\sqrt{\lambda_{mp}r}) J_m(\sqrt{\lambda_{mq}r}) r dr = 0, \quad p \neq q. \quad (7.7.42)$$

Es sabido que este conjunto infinito de autofunciones (m fijo) es completo. Por tanto, cualquier función suave a trozos de r puede representarse por medio de una serie de Fourier generalizada de las autofunciones:

$$\alpha(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_m(\sqrt{\lambda_{mn}r}), \quad (7.7.43)$$

donde m está fijo. Estas series a veces se llaman **series de Fourier-Bessel**. Los coeficientes pueden determinarse a partir de la ortogonalidad de las funciones de Bessel (con peso r):

$$a_n = \frac{\int_0^a \alpha(r) J_m(\sqrt{\lambda_{mn}r}) r dr}{\int_0^a J_m^2(\sqrt{\lambda_{mn}r}) r dr}. \quad (7.7.44)$$

Omitimos aquí la evaluación de las integrales de normalización $\int_0^a J_m^2(\sqrt{\lambda_{mn}r}) r dr$ (véase, por ejemplo, Churchill [1972], y Berg y McGregor [1966]).

7.7.8. Problema de valores iniciales para una membrana circular

Las vibraciones $u(r, \theta, t)$ de una membrana circular quedan descritas por medio de la ecuación de ondas bidimensional (7.7.1), estando u prescrita sobre la frontera, (7.7.2), y sujeta a las condiciones iniciales (7.7.3). Cuando aplicamos el método de separación de variables, obtenemos cuatro familias de soluciones producto, $u(r, \theta, t) = f(r)g(\theta)h(t)$:

$$J_m(\sqrt{\lambda_{mn}r}) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\theta \\ \text{sen } m\theta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos c\sqrt{\lambda_{mn}t} \\ \text{sen } c\sqrt{\lambda_{mn}t} \end{array} \right\}. \quad (7.7.45)$$

Para simplificar los cálculos, supondremos que la membrana inicialmente está en reposo,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = \beta(r, \theta) = 0.$$

Por tanto, los términos $\text{sen } c\sqrt{\lambda_{mn}t}$ en (7.7.45) no serán necesarios. De acuerdo con el principio de superposición, intentaremos satisfacer el problema de valores iniciales considerando una combinación lineal infinita de las restantes soluciones producto:

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}r}) \cos m\theta \cos c\sqrt{\lambda_{mn}t} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}r}) \text{sen } m\theta \cos c\sqrt{\lambda_{mn}t}. \end{aligned} \quad (7.7.46)$$

La posición inicial $u(r, \theta, 0) = \alpha(r, \theta)$ implica que

$$\alpha(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) \right) \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) \right) \sin m\theta. \quad (7.7.47)$$

Ordenando de forma apropiada los términos en (7.7.47), vemos que ésta es una serie de Fourier ordinaria en θ . Sus coeficientes de Fourier son, a su vez, series de Fourier-Bessel (obsérvese que m está fijo). Por lo tanto, los coeficientes pueden determinarse por medio de la ortogonalidad de $J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r)$ con peso r [como en (7.7.44)]. De este modo podemos calcular los coeficientes por aplicación repetida de la ortogonalidad unidimensional. Podemos determinar dos familias de coeficientes A_{mn} y B_{mn} (incluyendo $m = 0$) a partir de una condición inicial, puesto que la periodicidad en θ conduce a dos autofunciones asociadas a cada autovalor.

Sin embargo, es relativamente más fácil determinar todos los coeficientes usando la ortogonalidad bidimensional. Recordemos que para el problema de autovalores bidimensional,

$$\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0,$$

con $\phi = 0$ sobre la circunferencia de radio a , las autofunciones bidimensionales forman las familias doblemente infinitas

$$\phi_\lambda(r, \theta) = J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{array} \right\}.$$

Por tanto,

$$\alpha(r, \theta) = \sum_{\lambda} A_{\lambda} \phi_{\lambda}(r, \theta), \quad (7.7.48)$$

donde el símbolo \sum_{λ} significa que sumamos sobre todas las autofunciones [en el caso que tratamos ahora, dos sumas dobles, que incluyen $\sin m\theta$ y $\cos m\theta$ como en (7.7.47)]. Estas autofunciones $\phi_{\lambda}(r, \theta)$ son ortogonales (en un sentido bidimensional) con peso 1. Podemos entonces calcular inmediatamente A_{λ} (que representa tanto a A_{mn} como a B_{mn})

$$A_{\lambda} = \frac{\int \int \alpha(r, \theta) \phi_{\lambda}(r, \theta) dA}{\int \int \phi_{\lambda}^2(r, \theta) dA}. \quad (7.7.49)$$

Aquí $dA = r dr d\theta$. En dos dimensiones la función peso es constante. Sin embargo, por razones geométricas $dA = r dr d\theta$ (escribiendo la integral en coordenadas polares el *jacobiano* es r). Por tanto, **el peso r que aparece en la ortogonalidad unidimensional de las funciones de Bessel es solamente un factor geométrico.**

7.7.9. Caso radial

En esta subsección consideramos, a modo de ejemplo, las vibraciones de una membrana circular, con $u = 0$ sobre la circunferencia frontera, en el caso en que las condiciones iniciales tengan simetría circular (lo que significa que son independientes de θ) y, por tanto, sean funciones radiales. Podríamos considerar éste como un caso especial del problema general analizado en la Sección 7.7.8. Sin embargo, un método alternativo que conduce al mismo resultado consiste en reformular el problema: la simetría del mismo, incluyendo las condiciones iniciales, sugiere que la solución debería ser radial, es decir, no debería depender del ángulo θ . Así pues,

$$u(r, t) \quad \text{y} \quad \nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad \text{puesto que} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

La formulación matemática es, por tanto,

$$\text{EDP : } \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)}, \quad (7.7.50)$$

$$\text{CC : } \boxed{u(a, t) = 0}, \quad (7.7.51)$$

$$\text{CI : } \boxed{\begin{aligned} u(r, 0) &= \alpha(r), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) &= \beta(r). \end{aligned}} \quad (7.7.52)$$

Obsérvese que la ecuación en derivadas parciales tiene dos variables independientes y, por ello, no tendríamos que estudiar este problema en este capítulo que está reservado para el estudio de ecuaciones en derivadas parciales con más de dos variables independientes. Podríamos haber analizado este problema antes pero, como veremos, las funciones de Bessel son las funciones que aparecen en este contexto y, por ello, es más natural discutir este problema en esta parte del texto.

Apliquemos el método de separación de variables a (7.7.50) - (7.7.52). La búsqueda de soluciones producto,

$$u(r, t) = \phi(r)h(t), \quad (7.7.53)$$

conduce a

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{r\phi} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) = -\lambda, \quad (7.7.54)$$

donde hemos introducido la constante de separación $-\lambda$ porque intuimos que el desplazamiento es oscilante en el tiempo. La ecuación temporal,

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h,$$

tiene las soluciones $\sin c\sqrt{\lambda}t$ y $\cos c\sqrt{\lambda}t$, si $\lambda > 0$. El problema de autovalores para la constante de separación es

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi}{dr} \right) + \lambda r \phi = 0, \quad (7.7.55)$$

$$\phi(a) = 0, \quad (7.7.56)$$

$$|\phi(0)| < \infty. \quad (7.7.57)$$

Puesto que (7.7.55) ya está en la forma habitual de un problema de Sturm-Liouville, deducimos inmediatamente que las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales con peso r .

Ahora podemos deducir, a partir del cociente de Rayleigh, que $\lambda > 0$, con lo que podemos usar la transformación

$$z = \sqrt{\lambda}r, \quad (7.7.58)$$

en cuyo caso (7.7.55) se convierte en

$$\frac{d}{dz} \left(z \frac{d\phi}{dz} \right) + z\phi = 0, \quad \text{es decir,} \quad z^2 \frac{d^2\phi}{dz^2} + z \frac{d\phi}{dz} + z^2\phi = 0. \quad (7.7.59)$$

Debemos recordar ahora que la ecuación de Bessel de orden m es

$$z^2 \frac{d^2\phi}{dz^2} + z \frac{d\phi}{dz} + (z^2 - m^2)\phi = 0, \quad (7.7.60)$$

y que sus soluciones son las funciones de Bessel de orden m , $J_m(z)$ e $Y_m(z)$. Comparando con (7.7.60), vemos que (7.7.59) es la ecuación de Bessel de orden 0. Por tanto, la solución general de (7.7.59) es una combinación lineal de las funciones de Bessel de orden cero:

$$\phi = c_1 J_0(z) + c_2 Y_0(z) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}r) + c_2 Y_0(\sqrt{\lambda}r), \quad (7.7.61)$$

en términos de la variable radial. La condición de singularidad en el origen (7.7.57) obliga a que $c_2 = 0$, puesto que $Y_0(\sqrt{\lambda}r)$ tiene una singularidad logarítmica en $r = 0$:

$$\phi = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}r). \quad (7.7.62)$$

Finalmente, podemos determinar los autovalores usando la condición en $r = a$, (7.7.56), con lo que

$$J_0(\sqrt{\lambda}a) = 0. \quad (7.7.63)$$

Por tanto, $\sqrt{\lambda}a$ debe ser un cero de la función de Bessel de orden cero de primera especie, y obtenemos un número infinito de autovalores, que denotamos $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Así pues, hemos obtenido dos familias infinitas de soluciones producto

$$J_0\left(\sqrt{\lambda_n}r\right) \operatorname{sen} c\sqrt{\lambda_n}t \quad \text{y} \quad J_0\left(\sqrt{\lambda_n}r\right) \operatorname{cos} c\sqrt{\lambda_n}t,$$

y, de acuerdo con el principio de superposición, debemos buscar soluciones de nuestro problema original (7.7.50) - (7.7.52), de la forma

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\sqrt{\lambda_n}r\right) \operatorname{cos} c\sqrt{\lambda_n}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0\left(\sqrt{\lambda_n}r\right) \operatorname{sen} c\sqrt{\lambda_n}t. \quad (7.7.64)$$

Como antes, determinamos los coeficientes a_n y b_n a partir de las condiciones iniciales. La condición $u(r, 0) = \alpha(r)$ implica que

$$\alpha(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\sqrt{\lambda_n}r\right). \quad (7.7.65)$$

Los coeficientes a_n son, por tanto, los coeficientes de Fourier-Bessel (de orden 0) de $\alpha(r)$. Puesto que $J_0\left(\sqrt{\lambda_n}r\right)$ constituyen un conjunto ortogonal con respecto al peso r , podemos determinar fácilmente los coeficientes a_n ,

$$a_n = \frac{\int_0^a \alpha(r) J_0\left(\sqrt{\lambda_n}r\right) r \, dr}{\int_0^a J_0^2\left(\sqrt{\lambda_n}r\right) r \, dr}. \quad (7.7.66)$$

De modo similar, la condición inicial $\frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \beta(r)$ determina los coeficientes b_n .

EJERCICIOS 7.7

***7.7.1.** Resolver de la forma más simple posible:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u,$$

con $u(a, \theta, t) = 0$, $u(r, \theta, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = \alpha(r) \operatorname{sen} 3\theta$.

7.7.2. Resolver de la forma más simple posible:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u, \quad \text{sujeta a} \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, t) = 0,$$

con condiciones iniciales

- (a) $u(r, \theta, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = \beta(r) \cos 5\theta.$
 (b) $u(r, \theta, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = \beta(r).$
 (c) $u(r, \theta, 0) = \alpha(r, \theta), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = 0.$
 *(d) $u(r, \theta, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = \beta(r, \theta).$

7.7.3. Considérese una membrana vibrante que tiene forma de un cuarto de círculo, $0 < r < a, 0 < \theta < \pi/2$, con $u = 0$ sobre toda la frontera.

- *(a) Obtener una expresión para las frecuencias de vibración.
 (b) Resolver el problema de valor inicial si

$$u(r, \theta, 0) = g(r, \theta), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = 0.$$

7.7.4. Considérese el desplazamiento $u(r, \theta, t)$ de una membrana que tiene forma de cuña de radio a y ángulo $\pi/3 = 60^\circ$, y que satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u.$$

Supóngase también que $\lambda > 0$. Determinar las frecuencias de oscilación si las condiciones de contorno son:

- (a) $u(r, 0, t) = 0, \quad u(r, \pi/3, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, t) = 0.$
 (b) $u(r, 0, t) = 0, \quad u(r, \pi/3, t) = 0, \quad u(a, \theta, t) = 0.$

***7.7.5.** Considérese el desplazamiento $u(r, \theta, t)$ de una membrana cuya forma es la de un sector de 90° de un anillo, $a < r < b, 0 < \theta < \pi/2$, con la condición de que $u = 0$ sobre toda la frontera. Determinar las frecuencias naturales de vibración.

7.7.6. Considérese la membrana circular que satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u,$$

sujeta a la condición de contorno

$$u(a, \theta, t) = -\frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, t).$$

- (a) Demostrar que esta membrana sólo oscila.
 (b) Obtener una expresión que determine las frecuencias naturales.
 (c) Resolver el problema de valor inicial si

$$u(r, \theta, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = \alpha(r) \sin 3\theta.$$

7.7.7. Resolver la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u$$

en un círculo de radio a con temperatura nula sobre toda la frontera, si inicialmente

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta).$$

Analizar brevemente el $\lim_{t \rightarrow \infty} u(r, \theta, t)$. Comparar el resultado con el que sería de esperar usando razonamientos físicos.

*7.7.8. Rehacer el Ejercicio 7.7.7, pero ahora con toda la frontera aislada.

7.7.9. Resolver la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u$$

en un semicírculo de radio a y analizar brevemente el $\lim_{t \rightarrow \infty}$ si las condiciones iniciales son

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$$

y las condiciones de contorno son

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & u(r, 0, t) = 0, & u(r, \pi, t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, t) = 0. \\ * \text{(b)} & \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0, t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi, t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, t) = 0. \\ \text{(c)} & \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0, t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi, t) = 0, & u(a, \theta, t) = 0. \\ \text{(d)} & u(r, 0, t) = 0, & u(r, \pi, t) = 0, & u(a, \theta, t) = 0. \end{array}$$

*7.7.10. Resolver la ecuación del calor con simetría circular

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

sujeta a las condiciones

$$\begin{array}{l} u(a, t) = 0 \\ u(r, 0) = f(r). \end{array}$$

Analizar brevemente el $\lim_{t \rightarrow \infty} u(r, t)$.

7.7.11. Rehacer el Ejercicio 7.7.10 con la condición de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial r}(a, t) = 0.$$

7.7.12. ¿Cuál es el comportamiento aproximado esperado para todas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales cerca de $x = 0$?

$$\begin{aligned}
 *(\text{a}) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (x - 6)y &= 0. & (\text{b}) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(x^2 + \frac{3}{16}\right)y &= 0. \\
 *(\text{c}) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (x + x^2) \frac{dy}{dx} + 4y &= 0. & (\text{d}) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (x + x^2) \frac{dy}{dx} - 4y &= 0. \\
 *(\text{e}) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + (6 + x^3)y &= 0. & (\text{f}) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(x + \frac{1}{4}\right)y &= 0.
 \end{aligned}$$

7.7.13. Demostrar usando el cociente de Rayleigh que $\lambda > 0$ en el problema dado por las Ecuaciones (7.7.18) - (7.7.20).

7.8. Más sobre funciones de Bessel

7.8.1. Propiedades cualitativas de las funciones de Bessel

Es útil tener alguna idea de cómo es la gráfica de las funciones de Bessel. Reescribamos la ecuación diferencial de Bessel en la forma

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = - \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) f - \frac{1}{z} \frac{df}{dz}, \quad (7.8.1)$$

con objeto de compararla con la ecuación que describe el movimiento de un sistema masa-resorte:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - c \frac{dy}{dt},$$

donde hemos supuesto que la masa es de una unidad, y denotamos por k la “constante” del resorte y por c el coeficiente de rozamiento. La posición de equilibrio se alcanza en $y = 0$. Por tanto, podríamos pensar que la ecuación de Bessel representa un sistema masa-resorte con fuerza de rozamiento variable ($c = 1/t$) y una fuerza de “recuperación” también variable en el tiempo ($k = 1 - m^2/t^2$). Esta última fuerza es una fuerza variable de recuperación sólo para $t > m$ ($z > m$). Podríamos esperar que las soluciones de la ecuación de Bessel fueran similares a las de un oscilador amortiguado (al menos para $z > m$). Cuanto mayor es la variable z , más se aproxima a 1 la constante variable del resorte k , y más tiende a anularse la fuerza de rozamiento. Así, la solución debería oscilar con frecuencia aproximadamente 1, y también debería amortiguarse lentamente. Este comportamiento es similar al de un sistema masa-resorte poco amortiguado, pero las soluciones de la ecuación de Bessel deberían decaer más lentamente que cualquier exponencial, puesto que la fuerza de rozamiento tiende a cero. En la Figura 7.8.1 esbozamos soluciones numéricas bastante precisas de las funciones de Bessel, de modo que podemos comprobar que se verifican estos extremos. Obsérvese que *para z pequeño*,

$$\begin{aligned}
 J_0(z) &\approx 1, & Y_0(z) &\approx \frac{2}{\pi} \ln z, \\
 J_1(z) &\approx \frac{1}{2}z, & Y_1(z) &\approx -\frac{2}{\pi}z^{-1}, \\
 J_2(z) &\approx \frac{1}{8}z^2, & Y_2(z) &\approx -\frac{4}{\pi}z^{-2}.
 \end{aligned} \quad (7.8.2)$$

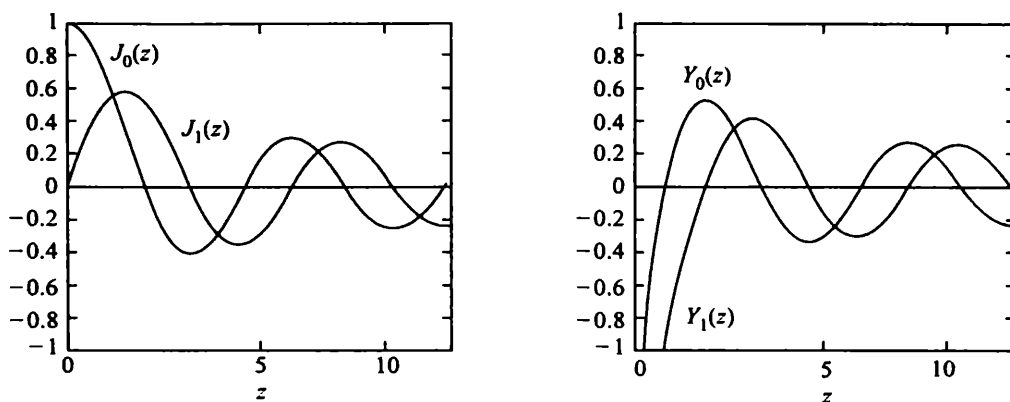


Figura 7.8.1: Gráfica de varias funciones de Bessel.

Estos bocetos muestran claramente una propiedad que merece la pena memorizar: **las funciones de Bessel de primera y segunda especie tienen el aspecto de ondas amortiguadas**. De hecho, es sabido que $J_m(z)$ e $Y_m(z)$ pueden aproximarse con precisión, para z grande, por medio de funciones oscilatorias amortiguadas bastante simples:

$$\begin{aligned} J_m(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - m\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty, \\ Y_m(z) &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \text{sen}\left(z - \frac{\pi}{4} - m\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.8.3)$$

Las fórmulas de este tipo se conocen como fórmulas asintóticas, lo que significa que la aproximación mejora cuando $z \rightarrow \infty$. Anteriormente, en la Sección 5.9, afirmamos que siempre existen fórmulas de aproximación análogas a (7.8.3) para cualquier problema de Sturm-Liouville para los autovalores grandes, $\lambda \gg 1$. En nuestro caso, $\lambda \gg 1$ implica que $z \gg 1$, puesto que $z = \sqrt{\lambda}r$ y $0 < r < a$ (siempre que r no sea demasiado pequeño).

Una deducción de (7.8.3) requeriría resultados más allá del alcance de este texto. Sin embargo, conviene señalar que fórmulas asintóticas como (7.8.3) están disponibles en muchos libros⁷. Observemos que de (7.8.3) se sigue que la única diferencia en el comportamiento aproximado para z grande de todas estas funciones de Bessel es el desplazamiento de fase que corresponde a cada una de ellas. Notemos también que la frecuencia es aproximadamente 1 (y el periodo 2π) para z grande, lo que es consistente con la comparación con un sistema masa-resorte con fuerza de rozamiento que tiende a anularse y $k \rightarrow 1$. Además, la amplitud de la oscilación,

⁷Un manual muy recomendable para estudiantes con gran interés por las aplicaciones de las matemáticas a la ciencia y la ingeniería (de hecho, el manual favorito del autor de este texto) es *Handbook of Mathematical Functions*, editado por M. Abramowitz e I. A. Stegun, publicado originalmente en formato económico por el National Bureau of Standards en 1964 y reimpresso más recientemente por Dover, en 1965, en edición rústica.

Tabla 7.8.1: Ceros de $J_0(z)$.

n	z_{0n}	Exacto	Fórmula para z grande (7.8.4)	Error	Porcentaje de error	$z_{0n} - z_{0(n-1)}$
1	z_{01}	2.40483 ...	2.35619	0.04864	2.0	—
2	z_{02}	5.52008 ...	5.49779	0.02229	0.4	3.11525
3	z_{03}	8.65373 ...	8.63938	0.01435	0.2	3.13365
4	z_{04}	11.79153 ...	11.78097	0.01156	0.1	3.13780

$\sqrt{2/\pi z}$, decae más lentamente cuando $z \rightarrow \infty$ que la velocidad de amortiguamiento exponencial asociada a un oscilador poco amortiguado, lo que confirma la discusión cualitativa anterior.

7.8.2. Fórmulas asintóticas para los autovalores

A partir de las fórmulas asintóticas (7.8.3) pueden obtenerse valores aproximados de los ceros de las autofunciones $J_m(z)$. Por ejemplo, para $m = 0$ y para z grande,

$$J_0(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right).$$

Los ceros verifican aproximadamente que $z - \pi/4 = -\pi/2 + s\pi$, pero s debe ser grande (para que z pueda ser grande). Por tanto, los ceros grandes están dados aproximadamente por

$$z \sim \pi \left(s - \frac{1}{4}\right), \quad (7.8.4)$$

para s entero grande. Se puede probar que la fórmula (7.8.4) es cada vez más aproximada cuando n aumenta. De hecho, puesto que la fórmula ya es razonablemente precisa para $n = 2$ ó 3 (véase la Tabla 7.8.1), puede ser innecesario computar el cero con un grado de precisión mayor que el que da (7.8.4). Una indicación adicional de la precisión de la fórmula asintótica es que vemos que la diferencia entre los dos primeros autovalores es ya cercana a π (como se predice para los autovalores grandes).

7.8.3. Ceros de funciones de Bessel y curvas nodales

Hemos probado que las autofunciones son $J_m(\sqrt{\lambda_{mn}r})$, donde $\lambda_{mn} = (z_{mn}/a)^2$, y z_{mn} es el n -ésimo cero de $J_m(z)$. Por tanto, tenemos como autofunciones

$$J_m\left(z_{mn} \frac{r}{a}\right).$$

Por ejemplo, para $m = 0$ las autofunciones son $J_0(z_{0n}r/a)$. Hemos reproducido la función $J_0(z)$ en la Figura 7.8.2 (e indicado sus primeros ceros). Cuando r varía entre 0 y a , el argumento de la autofunción $J_0(z_{0n}r/a)$ varía entre 0 y el n -ésimo

cero, z_{0n} . En $r = a$ se tiene que $z = z_{0n}$, el n -ésimo cero. Por tanto, la autofunción n -ésima tiene $n - 1$ ceros en el interior. Este resultado, aunque fue originalmente enunciado sólo para problemas de Sturm-Liouville regulares, es también cierto para problemas singulares (si existen las autofunciones).

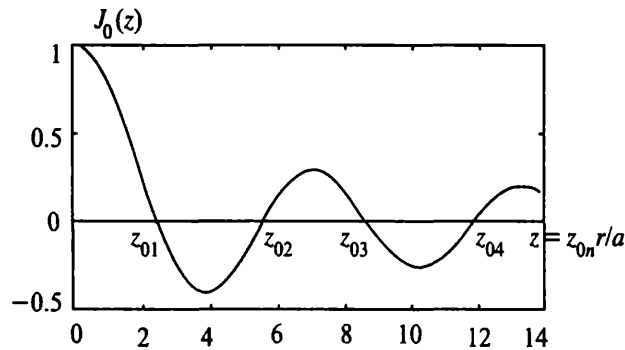


Figura 7.8.2: Gráfica de $J_0(z)$ y sus ceros.

La solución $u(r, \theta, t) = f(r)g(\theta)h(t)$ de la ecuación de ondas que se obtiene por separación de variables es,

$$u(r, \theta, t) = J_m \left(z_{mn} \frac{r}{a} \right) \begin{Bmatrix} \text{sen } m\theta \\ \text{cos } m\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{sen } c\sqrt{\lambda_{mn}t} \\ \text{cos } c\sqrt{\lambda_{mn}t} \end{Bmatrix}, \quad (7.8.5)$$

y se conoce como un modo de oscilación. Existen cuatro familias de soluciones para cada $m \neq 0$ (para $m = 0$ existen sólo dos familias). Cada modo oscila con una frecuencia natural característica, $c\sqrt{\lambda_{mn}}$. En ciertas posiciones a lo largo de la membrana, que se conocen como **curvas nodales**, dicha membrana permanece sin perturbar todo el tiempo (estas posiciones se llaman nodos en el caso de cuerdas vibrantes). La curva nodal para el modo que tiene $\text{sen } m\theta$ está determinada por

$$J_m \left(z_{mn} \frac{r}{a} \right) \text{sen } m\theta = 0. \quad (7.8.6)$$

Por tanto, la curva nodal está formada por todos los puntos donde, o bien $\text{sen } m\theta = 0$, o bien $J_m(z_{mn}r/a) = 0$. Por un lado, $\text{sen } m\theta$ se anula a lo largo de $2m$ rayos distintos, $\theta = s\pi/m$, $s = 1, 2, \dots, 2m$. Por otro, para que $J_m(z_{mn}r/a)$ con $0 < r < a$, pueda anularse, $z_{mn}r/a$ debe ser un cero de $J_m(z)$, $z_{mn}r/a = z_{mp}$, $p = 1, 2, \dots, n-1$. Por tanto, además de $r = a$, existen $n - 1$ circunferencias a lo largo de las cuales $J_m(z_{mn}r/a) = 0$. En la Figura 7.8.3 ilustramos este hecho para $m = 3$, $n = 2$. Las curvas nodales han sido determinadas a partir de una tabla.

7.8.4. Representación en serie de funciones de Bessel

El método usual de discutir las funciones de Bessel se basa en el desarrollo en serie de las soluciones de una ecuación diferencial, aunque por este procedimiento obtendríamos aquí poca información útil adicional. Sin embargo, a pesar de todo podemos encontrar algo de ayuda en las fórmulas que siguen.

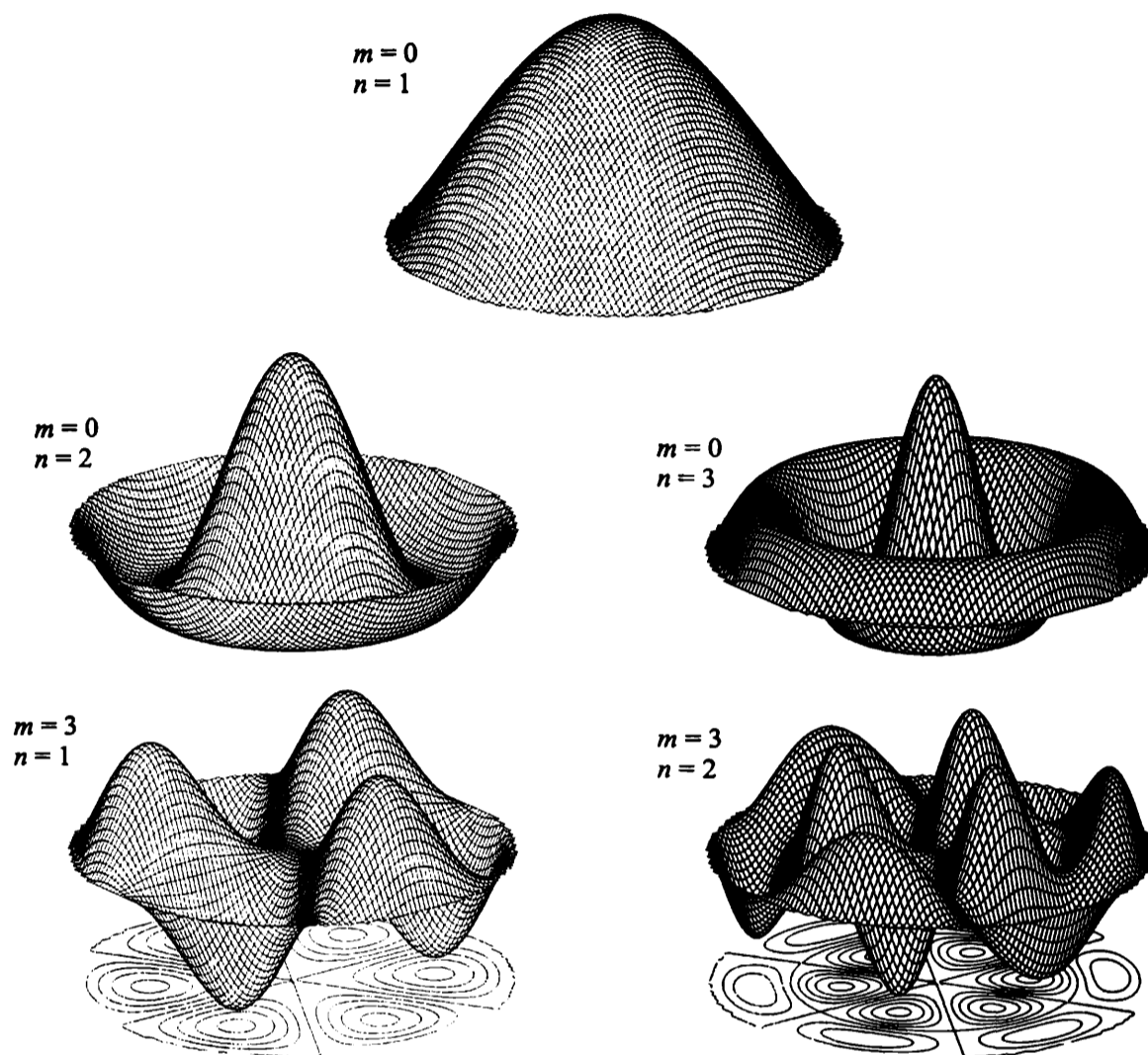


Figura 7.8.3: Curvas nodales para una membrana vibrante circular.

En primer lugar, revisemos algunos resultados adicionales relacionados con soluciones en serie alrededor de $z = 0$ de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + a(z) \frac{df}{dz} + b(z) f = 0. \quad (7.8.7)$$

Recordemos que $z = 0$ es un punto ordinario si tanto $a(z)$ como $b(z)$ pueden desarrollarse en serie de Taylor en torno de $z = 0$. En este caso, tenemos garantizado que todas las soluciones pueden representarse por una serie de Taylor convergente,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

al menos en un entorno de $z = 0$.

Si $z = 0$ no es un punto ordinario, entonces lo llamamos un punto singular (esto es, $z = 0$ es un punto singular de la ecuación de Bessel). Si $z = 0$ es un punto singular, no podemos asegurar que todas las soluciones se puedan desarrollar en serie

de Taylor alrededor de $z = 0$. Sin embargo, si $a(z) = R(z)/z$ y $b(z) = S(z)/z^2$ con $R(z)$ y $S(z)$ dos funciones desarrollables en serie de Taylor, entonces aún podemos decir más cosas acerca de las soluciones de la ecuación diferencial cerca de $z = 0$. En este caso, en el que $z = 0$ es lo que llamamos un **punto singular regular**, los coeficientes $a(z)$ y $b(z)$ pueden tener *como mucho* un polo simple y un polo doble, respectivamente. Es posible que los coeficientes $a(z)$ y $b(z)$ no sean singulares. Por ejemplo, si $a(z) = 1 + z$ y $b(z) = (1 - z^3)/z^2$, entonces $z = 0$ es un punto singular regular. Como la ecuación diferencial de Bessel escrita en la forma (7.8.7) es

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{df}{dz} + \frac{z^2 - m^2}{z^2} f = 0,$$

tenemos que $R(z) = 1$ y $S(z) = z^2 - m^2$; ambas funciones tienen desarrollo en serie de Taylor alrededor de $z = 0$. Por tanto, $z = 0$ es un punto singular regular para la ecuación de Bessel.

Si $z = 0$ es un punto singular regular, se sabe por el **método de Frobenius** que al menos una solución de la ecuación diferencial es de la forma

$$f = z^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (7.8.8)$$

esto es, z^p multiplicado por una serie de Taylor, donde p es una de las raíces de la ecuación cuadrática indicial. Un método para obtener la ecuación indicial consiste en sustituir $f = z^p$ en la ecuación equidimensional que se obtiene al reemplazar $R(z)$ por $R(0)$ y $S(z)$ por $S(0)$. Por tanto, la ecuación indicial es

$$p(p - 1) + R(0)p + S(0) = 0.$$

Si los dos valores de p (las raíces de la ecuación indicial) difieren en una cantidad no entera, entonces existen dos soluciones independientes de la forma (7.8.8). Si las dos raíces de la ecuación indicial son idénticas, entonces sólo existe una solución de la forma (7.8.8) y la otra solución es más complicada, pero siempre involucra logaritmos. Si la diferencia entre las raíces es un entero, entonces a veces existen dos soluciones de la forma (7.8.8), mientras que otras veces sólo la solución correspondiente a la raíz más grande tiene la forma (7.8.8) y la solución correspondiente a la raíz más pequeña es una serie que comienza con esa raíz modificada por la introducción de logaritmos. Los detalles acerca del método de Frobenius pueden verse en textos de ecuaciones diferenciales más elementales.

Hemos mostrado pues que la ecuación indicial de la ecuación diferencial de Bessel es

$$p(p - 1) + p - m^2 = 0,$$

puesto que $R(0) = 1$ y $S(0) = -m^2$. Sus raíces son, por tanto, $\pm m$. Si $m = 0$, las raíces son idénticas. En este caso, la forma (7.8.8) es válida sólo para una de las soluciones, mientras que debemos tener logaritmos en la segunda solución. En cambio, para $m \neq 0$ las raíces de la ecuación indicial difieren en un entero y cálculos

detallados muestran que también debemos tener en cuenta los logaritmos. Puede verificarse por sustitución que las siguientes series son soluciones de la ecuación de Bessel. De hecho, a menudo estas series se toman como las definiciones de las funciones de Bessel $J_m(z)$ e $Y_m(z)$:

$$J_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+m}}{k!(k+m)!}, \quad (7.8.9)$$

$$Y_m(z) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\log \frac{z}{2} + \gamma \right) J_m(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k-1)!(z/2)^{2k-m}}{k!} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} [\varphi(k) + \varphi(k+m)] \frac{(z/2)^{2k+m}}{k!(m+k)!} \right]. \quad (7.8.10)$$

Estas fórmulas⁸, proceden del manual de Abramowitz y Stegun que mencionamos anteriormente.

EJERCICIOS 7.8

7.8.1. El problema de contorno para una membrana anular, $1 < r < 2$ (fija en las circunferencias frontera interior y exterior), es

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(\lambda r - \frac{m^2}{r} \right) f = 0,$$

con $f(1) = 0$ y $f(2) = 0$, donde $m = 0, 1, 2, \dots$

- (a) Probar que $\lambda > 0$.
- * (b) Obtener una expresión para los autovalores.
- (c) ¿A qué valor de m corresponde el autovalor más pequeño?
- * (d) Obtener una cota inferior y una superior para el autovalor más pequeño.
- (e) Obtener una cota superior para el autovalor más pequeño usando una función test.
- (f) Calcular, de forma aproximada, el autovalor más pequeño usando el apartado (b) y tablas de las funciones de Bessel. Compárese con los resultados obtenidos en los apartados (d) y (e).

⁸Hemos usado las siguientes propiedades:

- i) $\varphi(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + 1/k$, $\varphi(0) = 0$.
- ii) $\gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} [\varphi(k) - \ln k] = 0.5772157\dots$, conocida como constante de Euler.
- iii) Si $m = 0$, $\sum_{k=0}^{m-1} \equiv 0$.

7.8.2. Considérese la temperatura $u(r, \theta, t)$ en un cuarto de círculo de radio a que satisfice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u,$$

sujeta a las condiciones

$$\begin{aligned} u(r, 0, t) &= 0, & u(a, \theta, t) &= 0, \\ u(r, \pi/2, t) &= 0, & u(r, \theta, 0) &= G(r, \theta). \end{aligned}$$

(a) Probar que el problema de contorno que se obtiene al separar variables es

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(\lambda r - \frac{\mu}{r} \right) f = 0,$$

con $f(a) = 0$ y $f(0)$ acotadas.

(b) Demostrar que $\lambda > 0$ si $\mu \geq 0$.

(c) Probar que para cada μ , la autofunción asociada al autovalor más pequeño no tiene ceros para $0 < r < a$.

*(d) Resolver el problema de valor inicial.

7.8.3. Rehacer el Ejercicio 7.8.2 con las condiciones de contorno

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(r, \frac{\pi}{2}, t \right) = 0, \quad u(a, \theta, t) = 0.$$

7.8.4. Considérese el problema de contorno

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(\lambda r - \frac{m^2}{r} \right) f = 0,$$

con $f(a) = 0$ y $f(0)$ acotada. Probar, para cada m entero, que la autofunción n -ésima tiene $n - 1$ ceros en $0 < r < a$.

7.8.5. Esbozar aproximadamente las siguientes funciones de Bessel para $z > 0$, usando el comportamiento conocido cuando $z \rightarrow 0$.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} J_4(z). & \text{(b)} Y_1(z). & \text{(c)} Y_0(z). \\ \text{(d)} J_0(z). & \text{(e)} Y_5(z). & \text{(f)} J_2(z). \end{array}$$

7.8.6. Determinar aproximadamente las frecuencias de vibración *grandes* de una membrana circular.

7.8.7. Considérese la ecuación de Bessel

$$z^2 \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + (z^2 - m^2) f = 0.$$

Sea $f = y/z^{1/2}$. Deducir que

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + y \left(1 + \frac{1}{4} z^{-2} - m^2 z^{-2} \right) = 0.$$

- *7.8.8.** Determinar expresiones exactas para $J_{1/2}(z)$ e $Y_{1/2}(z)$ usando el Ejercicio 7.8.7. Comprobar que se cumplen las Ecuaciones (7.8.3) y (7.7.33) en este caso.
- 7.8.9.** Usando el resultado del Ejercicio 7.8.7, comprobar de forma aproximada las Ecuaciones (7.8.3).
- 7.8.10.** Usar el resultado del Ejercicio 7.8.7 para mejorar (7.8.3):
- (a) Sustituir $y = e^{iz}w(z)$ y probar que
- $$\frac{d^2w}{dz^2} + 2i\frac{dw}{dz} + \frac{\gamma}{z^2}w = 0, \quad \text{donde } \gamma = \frac{1}{4} - m^2.$$
- (b) Sustituir $w = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^{-n}$. Determinar unos pocos de los primeros términos β_n (suponiendo que $\beta_0 = 1$).
- (c) Usar la parte (b) para obtener una solución asintótica mejorada de la ecuación de Bessel. Para obtener las soluciones reales, tómense las partes real e imaginaria.
- (d) Encontrar una fórmula de recurrencia para β_n . Probar que la serie diverge (a pesar de ello, una subserie finita es muy útil).
- 7.8.11.** Hagamos $x = 1/z$ con objeto de “comprender” el comportamiento de la ecuación diferencial de Bessel cuando $z \rightarrow \infty$. Probar que $x = 0$ es un punto singular, y de hecho un punto singular irregular [la solución asintótica de una ecuación diferencial en el entorno de un punto singular irregular se analiza sin motivar en el Ejercicio 7.8.10. Para una presentación más sistemática, se puede consultar textos avanzados en métodos asintóticos o de perturbaciones (tales como Bender y Orszag [1978])].
- 7.8.12.** El autovalor más pequeño de (7.7.34) - (7.7.36) para $m = 0$ es $\lambda = (z_{01}/a)^2$. Determinar una cota superior razonablemente precisa usando el cociente de Rayleigh con una función test. Compárese con el valor exacto.
- 7.8.13.** Explicar por qué las circunferencias nodales de la Figura 7.8.3 están aproximadamente equiespaciadas.

7.9. Ecuación de Laplace en un cilindro circular

7.9.1. Introducción

La ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 u = 0, \tag{7.9.1}$$

se puede entender como una ecuación de ondas estacionaria (sin fuentes). Hemos resuelto la ecuación de Laplace en un rectángulo (Sección 2.5.1) y en un círculo (Sección 2.5.2). En ambos casos, al separar variables, obtuvimos oscilaciones en

una dirección pero no en otras. Podemos también resolver la ecuación de Laplace en una caja rectangular por el método de separación de variables. Como se muestra en algunos ejercicios del Capítulo 7, las tres variables independientes conducen a dos problemas de autovalores que tienen soluciones oscilatorias y soluciones que no son oscilatorias en una dirección.

Un problema más interesante consiste en considerar la ecuación de Laplace en un cilindro circular de radio a y altura H . Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\y &= r \operatorname{sen} \theta, \\z &= z,\end{aligned}$$

la ecuación de Laplace se escribe:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (7.9.2)$$

Prescribimos u (por ejemplo, la temperatura) sobre toda la frontera del cilindro:

$$\begin{aligned}\text{tapa superior :} & \quad u(r, \theta, H) = \beta(r, \theta), \\ \text{tapa inferior :} & \quad u(r, \theta, 0) = \alpha(r, \theta), \\ \text{superficie lateral :} & \quad u(a, \theta, z) = \gamma(\theta, z).\end{aligned}$$

Éstas son tres condiciones de contorno no homogéneas. Una forma de atacar el problema es descomponerlo en una suma de tres problemas más simples, cada uno de los cuales consiste en resolver una ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde $u = u_1 + u_2 + u_3$. Ilustramos este procedimiento en la Figura 7.9.1. De este modo, cada problema satisface dos condiciones de contorno homogéneas, pero la suma satisface las deseadas condiciones no homogéneas. Separaremos variables a la vez, para los tres casos, y entonces procederemos a resolver cada problema individualmente.

7.9.2. Separación de variables

Empecemos buscando soluciones producto,

$$u(r, \theta, z) = f(r)g(\theta)h(z), \quad (7.9.3)$$

para la ecuación de Laplace. Sustituyendo (7.9.3) en la Ecuación (7.9.2), y dividiendo por $f(r)g(\theta)h(z)$, obtenemos

$$\frac{1}{r f} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = 0. \quad (7.9.4)$$

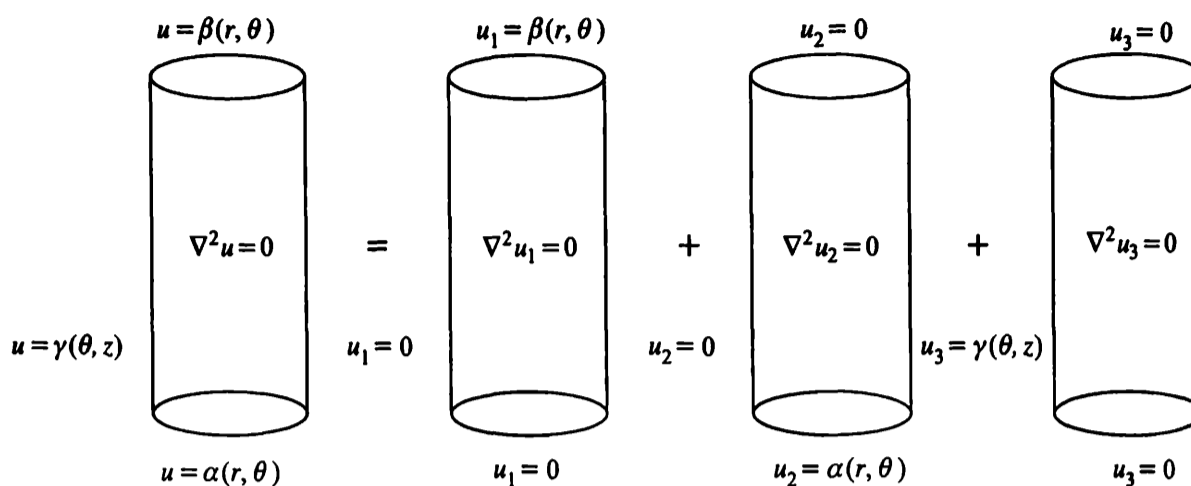


Figura 7.9.1: Ecuación de Laplace en un cilindro circular.

Podemos separar inmediatamente la dependencia en z obteniendo

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dz^2} = \lambda. \quad (7.9.5)$$

¿Esperamos oscilaciones en la variable z ? En la Figura 7.9.1 vemos que deberíamos esperar oscilaciones en dicha variable para el problema de u_3 , pero no necesariamente para los problemas de u_1 o de u_2 . Quizás pudiera ser $\lambda < 0$ para el problema de u_3 , pero no para los problemas de u_1 ni de u_2 . Por tanto, no especificamos λ en este momento. Podemos separar también las partes que dependen de las variables r y θ si multiplicamos (7.9.4) por r^2 [y utilizamos (7.9.5)]:

$$\frac{r}{f} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \lambda r^2 = -\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d\theta^2} = \mu. \quad (7.9.6)$$

Hemos introducido una segunda constante de separación μ , y esperamos anticipadamente que $\mu > 0$ a causa de que pensamos que habrá oscilaciones en la variable θ para los tres problemas. En efecto, las condiciones de contorno periódicas en la variable θ nos dicen que debe ser

$$\mu = m^2, \quad (7.9.7)$$

y que $g(\theta)$ puede ser o bien $\sin m\theta$ o bien $\cos m\theta$, donde m es un entero no negativo, $m = 0, 1, 2, \dots$. Así pues, será apropiado usar una serie de Fourier en θ para los tres problemas.

En resumen, la dependencia en el ángulo θ se obtiene a partir de las funciones $\sin m\theta$ y $\cos m\theta$, y las ecuaciones diferenciales restantes son

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = \lambda h, \quad (7.9.8)$$

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + (\lambda r^2 - m^2) f = 0. \quad (7.9.9)$$

Estas dos ecuaciones diferenciales contienen sólo un parámetro sin especificar, λ , y sólo una de ellas se convertirá en un problema de autovalores. Tal problema de autovalores necesita dos condiciones de contorno homogéneas. Tendremos resultados diferentes para cada uno de los problemas de u_1 , u_2 y u_3 . Para el problema de u_3 tenemos dos condiciones de contorno homogéneas en la variable z , y por tanto (7.9.8) será un problema de autovalores [y (7.9.9) tendrá soluciones no oscilatorias]. Sin embargo, para los problemas de u_1 y de u_2 no tenemos condiciones de contorno homogéneas en la variable z . En su lugar, deberíamos tener dos condiciones homogéneas en la variable r . Una de éstas es en $r = a$. La otra debe ser una condición singular en $r = 0$, que tiene lugar debido a la naturaleza singular de las coordenadas polares (o cilíndricas) en $r = 0$ y la naturaleza singular de (7.9.9) en $r = 0$:

$$|f(0)| < \infty. \quad (7.9.10)$$

Así pues, encontraremos que para los problemas de u_1 y de u_2 , (7.9.9) será el problema de autovalores. La solución de (7.9.9) oscilará, mientras que la solución de (7.9.8) no lo hará. A continuación, vamos a describir en detalle los tres problemas.

7.9.3. Temperatura cero sobre la superficie lateral y sobre la tapa superior o inferior

El problema matemático para u_1 es

$\nabla^2 u_1 = 0,$	(7.9.11)
$u_1(r, \theta, 0) = 0,$	(7.9.12)
$u_1(r, \theta, H) = \beta(r, \theta),$	(7.9.13)
$u_1(a, \theta, z) = 0.$	(7.9.14)

La temperatura es nula en la tapa inferior. Por separación de variables, ignorando momentáneamente la condición (7.9.13), pongamos $u_1 = f(r)g(\theta)h(z)$. Sabemos que la parte que depende de θ es igual a $\sin m\theta$ y $\cos m\theta$ (para $m \geq 0$ entero). La ecuación dependiente de z , (7.9.8), satisface sólo una condición homogénea, $h(0) = 0$. La ecuación que depende de r dará lugar a un problema de contorno que nos permitirá determinar la constante de separación λ . Las dos condiciones de contorno homogéneas son

$$f(a) = 0, \quad (7.9.15)$$

$$|f(0)| < \infty. \quad (7.9.16)$$

El problema de autovalores, (7.9.9) con (7.9.15) y (7.9.16), es uno de los que ya fue analizado en la Sección 7.8. Allí, probamos que $\lambda > 0$ (usando directamente el cociente de Rayleigh). Además, probamos que la solución general de (7.9.9) es una combinación lineal de funciones de Bessel de orden m con argumento $\sqrt{\lambda}r$:

$$f(r) = c_1 J_m(\sqrt{\lambda}r) + c_2 Y_m(\sqrt{\lambda}r) = c_1 J_m(\sqrt{\lambda}r), \quad (7.9.17)$$

ya que hemos simplificado usando la condición singular (7.9.16). La condición homogénea, (7.9.15), determina ahora λ :

$$J_m(\sqrt{\lambda}a) = 0. \quad (7.9.18)$$

De nuevo, $\sqrt{\lambda}a$ debe ser un cero de la m -ésima función de Bessel, y usaremos la notación λ_{mn} para indicar el número infinito de autovalores para cada m . La autofunción $J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r)$ oscila en r .

Puesto que $\lambda > 0$, la solución de (7.9.8) que satisface $h(0) = 0$ es proporcional a

$$h(z) = \sinh \sqrt{\lambda}z. \quad (7.9.19)$$

No hay oscilaciones en la dirección z . Por tanto, hay dos familias doblemente infinitas de soluciones producto:

$$\sinh \sqrt{\lambda_{mn}}z J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \left\{ \begin{array}{l} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{array} \right\}, \quad (7.9.20)$$

que son oscilatorias en las variables r y θ , pero no en z . El principio de superposición indica que deberíamos considerar

$$u(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sinh \sqrt{\lambda_{mn}}z J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sinh \sqrt{\lambda_{mn}}z J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin m\theta. \quad (7.9.21)$$

La condición de contorno no homogénea, (7.9.13), es decir, $u_1(r, \theta, H) = \beta(r, \theta)$, determina los coeficientes A_{mn} y B_{mn} . Nuestra solución involucra una serie de Fourier en la variable θ y una serie de Fourier-Bessel en la variable r . Por tanto, podemos obtener A_{mn} y B_{mn} usando las dos fórmulas de ortogonalidad unidimensionales. De forma alternativa, y más sencilla, podemos calcular los coeficientes usando la ortogonalidad bidimensional de $J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \cos m\theta$ y $J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin m\theta$ (véase la Sección 7.8). Omitimos los detalles.

Podemos obtener de modo similar u_2 . Dejamos como ejercicio la solución de este problema.

7.9.4. Temperatura nula sobre las tapas superior e inferior

Surge un problema matemático algo diferente cuando consideramos la situación en la que tanto la tapa inferior como la superior se mantienen a temperatura nula. El problema para u_3 es

$$\nabla^2 u_3 = 0, \quad (7.9.22)$$

$$u_3(r, \theta, 0) = 0, \quad (7.9.23)$$

$$u_3(r, \theta, H) = 0, \quad (7.9.24)$$

$$u_3(a, \theta, z) = \gamma(\theta, z). \quad (7.9.25)$$

En este caso, podemos usar también el método de separación de variables. La periodicidad implica de nuevo que la parte que depende de la variable θ estará relacionada con una serie de Fourier (esto es, $\sin m\theta$ y $\cos m\theta$). Sin embargo, en contraposición a lo que ocurrió en la Sección 7.9.3, la ecuación en la variable z tiene dos condiciones de contorno homogéneas:

$$\frac{d^2 h}{dz^2} = \lambda h, \quad (7.9.26)$$

$$h(0) = 0, \quad (7.9.27)$$

$$h(H) = 0. \quad (7.9.28)$$

Obtenemos así el problema de autovalores de Sturm-Liouville más simple (en una forma algo diferente). Para que $h(z)$ pueda oscilar y satisfacer (7.9.27) y (7.9.28), la constante de separación λ debe ser negativa. En efecto, deberíamos recordar que se tiene

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.9.29)$$

$$h(z) = \text{sen} \frac{n\pi z}{H}. \quad (7.9.30)$$

Las condiciones de contorno en las tapas superior e inferior implican que debemos usar una serie de Fourier de senos ordinaria en la variable z .

Así pues, tenemos oscilaciones en las variables z y θ . La solución que depende de r no debería ser oscilatoria, debe verificar (7.9.9), lo que usando (7.9.29) nos conduce a

$$\boxed{r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + \left(- \left(\frac{n\pi}{H} \right)^2 r^2 - m^2 \right) f = 0.} \quad (7.9.31)$$

Tendremos una condición homogénea singular en $r = 0$,

$$|f(0)| < \infty, \quad (7.9.32)$$

pero no hay condición homogénea en $r = a$.

La Ecuación (7.9.31) parece análoga a la ecuación diferencial de Bessel, pero tiene el signo cambiado delante del término en r^2 . Esto tiene como consecuencia que no puede convertirse en la ecuación de Bessel usando una transformación real. Si hacemos

$$s = i \left(\frac{n\pi}{H} \right) r, \quad (7.9.33)$$

donde $i = \sqrt{-1}$, entonces (7.9.31) da lugar a

$$s \frac{d}{ds} \left(s \frac{df}{ds} \right) + (s^2 - m^2) f = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$s^2 \frac{d^2 f}{ds^2} + s \frac{df}{ds} + (s^2 - m^2) f = 0.$$

Ésta es exactamente la ecuación de Bessel, con lo que

$$f = c_1 J_m(s) + c_2 Y(s) = c_1 J_m \left(i \frac{n\pi}{H} r \right) + c_2 Y_m \left(i \frac{n\pi}{H} r \right). \quad (7.9.34)$$

Por tanto, la solución de (7.9.31) puede representarse en términos de funciones de Bessel de argumento imaginario, pero esto no es muy útil, puesto que las funciones de Bessel no suelen estar tabuladas de esta forma.

Alternativamente, introduzcamos una transformación real que elimina la dependencia $n\pi/H$ de la ecuación diferencial:

$$w = \frac{n\pi}{H} r.$$

Entonces, (7.9.31) se transforma en

$$\boxed{w^2 \frac{d^2 f}{dw^2} + w \frac{df}{dw} + (-w^2 - m^2) f = 0.} \quad (7.9.35)$$

Aquí aparece de nuevo un signo menos que impide que ésta pueda ser una ecuación diferencial de Bessel. La Ecuación (7.9.35) es una modificación de la ecuación de Bessel y sus soluciones, *que están tabuladas*, se conocen como **funciones de Bessel modificadas**.

La Ecuación (7.9.35) tiene en $w = 0$ la misma clase de singularidad que la ecuación de Bessel. Por tanto, como en el caso de esta última, podremos determinar el comportamiento singular por el método de Frobenius⁹. Así, podemos afirmar que *existe una solución bien definida en $w = 0$* . Esta función se llama **función de Bessel modificada de orden m de primera especie**, y se denota por $I_m(w)$. Existe otra solución independiente que es *singular en el origen* y se llama **función de Bessel modificada de orden m de segunda especie**. Esta segunda función se denota por $K_m(w)$. Ambas funciones, $I_m(w)$ y $K_m(w)$, se encuentran también tabuladas. Necesitaremos muy poca información adicional sobre las funciones $I_m(w)$ y $K_m(w)$. La solución general de (7.9.31) es, por tanto,

$$f = c_1 K_m \left(\frac{n\pi}{H} r \right) + c_2 I_m \left(\frac{n\pi}{H} r \right). \tag{7.9.36}$$

Puesto que K_m es singular en $r = 0$ e I_m no lo es, se sigue que $c_1 = 0$ y que $f(r)$ es proporcional a $I_m(n\pi r/H)$. Observemos aquí simplemente que tanto $I_m(w)$ como $K_m(w)$ son no oscilatorias y que no se anulan para $w > 0$. El lector encontrará en la Sección 7.9.5 una discusión de éstas y de otras propiedades de estas funciones.

Existen, por tanto, dos familias doblemente infinitas de soluciones producto:

$$I_m \left(\frac{n\pi}{H} r \right) \text{sen} \frac{n\pi z}{H} \text{cos} m\theta \quad \text{y} \quad I_m \left(\frac{n\pi}{H} r \right) \text{sen} \frac{n\pi z}{H} \text{sen} m\theta. \tag{7.9.37}$$

Estas soluciones son oscilatorias en las variables z y θ , pero no lo son en r . El principio de superposición nos dice que

$$u_3(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} I_m \left(\frac{n\pi}{H} r \right) \text{sen} \frac{n\pi z}{H} \text{cos} m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} I_m \left(\frac{n\pi}{H} r \right) \text{sen} \frac{n\pi z}{H} \text{sen} m\theta. \tag{7.9.38}$$

Los coeficientes E_{mn} y F_{mn} se determinan [si $I_m(n\pi a/H) \neq 0$] a partir de la ecuación no homogénea (7.9.25), o bien iterando los resultados de ortogonalidad unidimensional o por medio de una aplicación de la ortogonalidad bidimensional. En la sección siguiente discutiremos propiedades adicionales de las funciones $I_m(n\pi a/H)$, incluyendo el hecho de que no tienen ceros positivos.

De este modo, hemos determinado la solución de la ecuación de Laplace dentro de un cilindro circular dada cualquier distribución de temperaturas sobre la frontera.

⁹Aquí es más fácil usar la transformación compleja (7.9.33). Así, la representación en serie para las funciones de Bessel es válida para argumentos complejos, lo que evita cálculos adicionales.

7.9.5. Funciones de Bessel modificadas

La ecuación diferencial que define las funciones de Bessel modificadas es

$$w^2 \frac{d^2 f}{dw^2} + w \frac{df}{dw} + (-w^2 - m^2) f = 0. \quad (7.9.39)$$

Hemos denotado por $K_m(w)$ e $I_m(w)$ las dos soluciones independientes. El comportamiento en el entorno del punto singular $w = 0$ se determina por medio de las raíces de la ecuación indicial, $\pm m$. Este comportamiento se corresponde con el de las soluciones aproximadas cerca de $w = 0$ de las formas $w^{\pm m}$ (para $m \neq 0$) y w^0 y $w^0 \ln w$ (para $m = 0$). Podemos elegir las dos soluciones independientes de manera que una se comporte bien en $w = 0$ y la otra sea singular.

Obtenemos una mejor comprensión de estas funciones analizando su comportamiento cuando $w \rightarrow \infty$. Grosso modo, podemos reescribir (7.9.39) para w grande en la forma

$$\frac{d^2 f}{dw^2} \approx -\frac{1}{w} \frac{df}{dw} + f. \quad (7.9.40)$$

Podemos pensar en esta ecuación como la expresión de la ley de Newton para una partícula sobre la que actúan ciertas fuerzas: el término $-(1/w) df/dw$ representa una débil fuerza de amortiguamiento que tiende a anularse cuando $w \rightarrow \infty$. Deberíamos esperar que cuando $w \rightarrow \infty$

$$\frac{d^2 f}{dw^2} \approx f,$$

lo que sugiere que la solución debería ser una combinación lineal de un término exponencial creciente e^w y otro término exponencial que decae e^{-w} . De hecho, el débil amortiguamiento produce sus efectos (al igual que ocurrió para las funciones de Bessel ordinarias). Enunciemos ahora (sin prueba) un resultado más avanzado que consiste en que, asintóticamente para w grande, las soluciones de (7.9.39) se comportan aproximadamente como $e^{\pm w}/w^{1/2}$. Por tanto, $I_m(w)$ y $K_m(w)$ son combinaciones lineales de estas dos últimas funciones, una de las cuales crece exponencialmente y la otra decae también exponencialmente.

Existe sólo una combinación lineal independiente que decae cuando $w \rightarrow \infty$. En cambio, existen muchas combinaciones que crecen cuando $w \rightarrow \infty$. Definimos $K_m(w)$ como una solución que decae cuando $w \rightarrow \infty$. Debe ser proporcional a $e^{-w}/w^{1/2}$ cuando $w \rightarrow \infty$, y se define *unívocamente* por

$$K_m(w) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-w}}{w^{1/2}}, \quad (7.9.41)$$

es decir, especificando la constante de proporcionalidad. Si $w \rightarrow 0$ el comportamiento de $K_m(w)$ será el de alguna combinación lineal de dos comportamientos

asintóticos diferentes (por ejemplo, w^m y w^{-m} para $m \neq 0$). En general, se compondrá de ambas y por tanto será singular en $w = 0$. En tratados más avanzados se demuestra que

$$K_m(w) \sim \begin{cases} \ln w & m = 0, \\ \frac{1}{2}(m-1)! \left(\frac{1}{2}w\right)^{-m} & m \neq 0, \end{cases} \quad (7.9.42)$$

cuando $w \rightarrow 0$. Las propiedades más importantes de esta función consisten en que $K_m(w)$ decae exponencialmente cuando $w \rightarrow \infty$, pero es singular en $w = 0$.

Puesto que $K_m(w)$ es singular en $w = 0$, nos gustaría definir una segunda solución $I_m(w)$ no singular en $w = 0$. Se define $I_m(w)$ unívocamente de forma que se cumpla que

$$I_m(w) \sim \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{2}w\right)^m, \quad (7.9.43)$$

cuando $w \rightarrow 0$. Si $w \rightarrow \infty$, el comportamiento de $I_m(w)$ será como el de una combinación lineal de dos comportamientos asíntóticos diferentes ($e^{\pm w}/w^{1/2}$). En general, se compondrá de ambas y, por tanto, es de esperar que crezca exponencialmente cuando $w \rightarrow \infty$. En textos más avanzados se demuestra que

$$I_m(w) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi w}} e^w, \quad (7.9.44)$$

cuando $w \rightarrow \infty$. Las propiedades más importantes de esta función consisten en que $I_m(w)$ se comporta bien en $w = 0$, pero crece exponencialmente cuando $w \rightarrow \infty$.

Esbozamos algunas funciones de Bessel modificadas en la Figura 7.9.2. Obsérvese que, aunque no lo hemos probado, tanto $I_m(w)$ como $K_m(w)$ son estrictamente positivas para $w > 0$.

EJERCICIOS 7.9

7.9.1. Resolver la ecuación de Laplace dentro de un cilindro circular, sujeta a las condiciones de contorno:

$$(a) \quad u(r, \theta, 0) = \alpha(r, \theta), \quad u(r, \theta, H) = 0, \quad u(a, \theta, z) = 0.$$

$$*(b) \quad u(r, \theta, 0) = \alpha(r) \operatorname{sen} 7\theta, \quad u(r, \theta, H) = 0, \quad u(a, \theta, z) = 0.$$

$$(c) \quad u(r, \theta, 0) = 0, \quad u(r, \theta, H) = \beta(r) \cos 3\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, z) = 0.$$

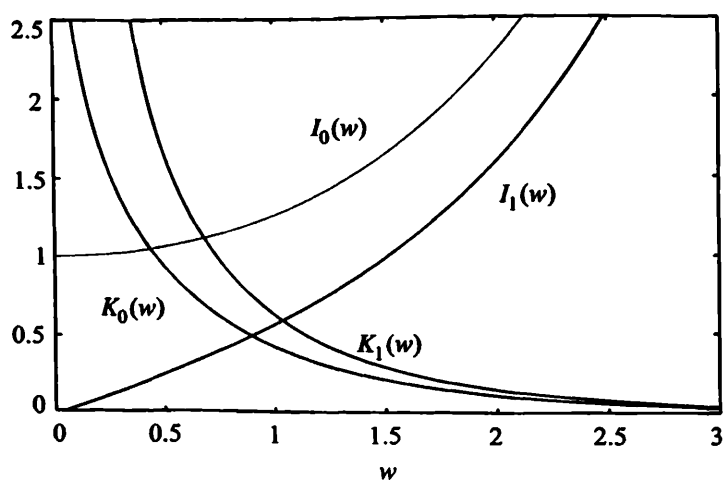


Figura 7.9.2: Varias funciones de Bessel modificadas.

$$(d) \frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, 0) = \alpha(r) \operatorname{sen} 3\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, H) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, z) = 0.$$

$$(e) \frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, 0) = \alpha(r, \theta), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, H) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, z) = 0.$$

¿Bajo qué condición existe solución?

7.9.2. Resolver la ecuación de Laplace dentro de un cilindro semicircular sujeta a las condiciones de contorno:

$$(a) \quad u(r, \theta, 0) = 0, \quad u(r, \theta, H) = \alpha(r, \theta), \quad u(r, 0, z) = 0,$$

$$u(r, \pi, z) = 0, \quad u(a, \theta, z) = 0.$$

$$*(b) \quad u(r, \theta, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, H) = 0, \quad u(r, 0, z) = 0,$$

$$u(r, \pi, z) = 0, \quad u(a, \theta, z) = \beta(\theta, z).$$

$$(c) \quad \frac{\partial}{\partial z} u(r, \theta, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} u(r, \theta, H) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0, z) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi, z) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, z) = \beta(\theta, z).$$

¿Bajo qué condiciones existe solución?

$$(d) \quad u(r, \theta, 0) = 0, \quad u(r, 0, z) = 0, \quad u(a, \theta, z) = 0,$$

$$u(r, \theta, H) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi, z) = 0.$$

7.9.3. Resolver la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u$$

dentro de un cilindro cuya sección es un cuarto de círculo ($0 < \theta < \pi/2$, con radio a y altura H) sujeta a la condición inicial

$$u(r, \theta, z, 0) = f(r, \theta, z).$$

Explicar brevemente cuál se espera que sea la distribución de temperaturas límite cuando $t \rightarrow \infty$. Considérense las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & u(r, \theta, 0) = 0, & u(r, \theta, H) = 0, & u(r, 0, z) = 0, \\ & u(r, \pi/2, z) = 0, & u(a, \theta, z) = 0. \\ \text{* (b)} \quad & \frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, 0) = 0, & \frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, H) = 0, & \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0, z) = 0, \\ & \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi/2, z) = 0, & \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, z) = 0. \\ \text{(c)} \quad & u(r, \theta, 0) = 0, & u(r, \theta, H) = 0, & \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, 0, z) = 0, \\ & u(r, \pi/2, z) = 0, & \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, z) = 0. \end{aligned}$$

7.9.4. Resolver la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u$$

dentro de un cilindro (de radio a y altura H) sujeta a la condición inicial,

$$u(r, \theta, z, 0) = f(r, z),$$

independiente de θ , si las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} \text{* (a)} \quad & u(r, \theta, 0, t) = 0, & u(r, \theta, H, t) = 0, & u(a, \theta, z, t) = 0. \\ \text{(b)} \quad & \frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, 0, t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial z}(r, \theta, H, t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, z, t) = 0. \\ \text{(c)} \quad & u(r, \theta, 0, t) = 0, & u(r, \theta, H, t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta, z, t) = 0. \end{aligned}$$

7.9.5. Determinar las tres ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas por separación de variables a partir de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas,

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

7.10. Problemas esféricos y polinomios de Legendre

7.10.1. Introducción

Los problemas con simetría esférica son de gran interés en muchas aplicaciones. En los ejercicios consideraremos la ecuación del calor tridimensional dentro de una esfera. Aquí, tomaremos en consideración la ecuación de ondas tridimensional que describe las vibraciones de la tierra:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u, \quad (7.10.1)$$

donde u es un desplazamiento local. En geofísica, la respuesta real de la tierra a fuentes puntuales es de un interés particular debido a los terremotos y las pruebas nucleares. Sin embargo, las vibraciones continuas de la tierra son más complicadas que la Ecuación (7.10.1). Las ondas compresivas, llamadas ondas P (primarias), son más pequeñas que las ondas expansivas, llamadas ondas S (secundarias), que a su vez llegan después debido a que se propagan a menor velocidad. Existen también ondas superficiales periódicas y largas (L) que son las más destructivas en terremotos intensos porque su energía está confinada a una delgada región cercana a la superficie. Los sismogramas reales son más complicados a causa de la dispersión de las ondas que se produce debido a que el interior de la tierra no es uniforme. Se suele usar la medición de las vibraciones para determinar la estructura interior de la tierra, lo que se necesita no sólo en sismología sino también en la prospección de minerales tales como el petróleo. Todos estos desplazamientos son soluciones de ecuaciones de ondas. Los modelos matemáticos más simples son más válidos para las ondas largas destructivas, puesto que las variaciones en la tierra son en promedio ondas largas. Para más detalles, véase el libro de Aki y Richards, *Quantitative Seismology* [1980]. Usaremos coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) , donde ϕ es el ángulo desde el polo (la colatitud) y θ es el ángulo usual en coordenadas cilíndricas (la longitud). Suponemos que la condición de contorno es $u(a, \theta, \phi, t) = 0$, y que el desplazamiento inicial y la distribución de velocidades están dados en todo el sólido:

$$u(r, \theta, \phi, 0) = F(r, \theta, \phi), \quad (7.10.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, \phi, 0) = G(r, \theta, \phi). \quad (7.10.3)$$

Trataremos los problemas con condiciones de contorno no homogéneas en el capítulo siguiente.

7.10.2. Separación de variables y problemas unidimensionales de autovalores

Usemos el método de separación de variables. Como antes, introducimos primero soluciones producto de dos funciones que dependen una sólo de las variables espaciales y otra sólo del tiempo:

$$u(r, \theta, \phi, t) = w(r, \theta, \phi)h(t). \quad (7.10.4)$$

Hemos separado ya anteriormente el espacio del tiempo, así que sabemos que

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h, \quad (7.10.5)$$

$$\nabla^2 w + \lambda w = 0, \quad (7.10.6)$$

donde la primera constante de separación λ satisface el problema multidimensional de autovalores (7.10.6) sujeto a la condición de anularse sobre toda la frontera del dominio, es decir, la esfera. Las frecuencias de vibración en el interior de la esfera, es decir en la bola, vienen dadas por $c\sqrt{\lambda}$.

Usando la expresión del laplaciano en coordenadas esféricas (1.5.22), tenemos

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \lambda w = 0. \quad (7.10.7)$$

Busquemos ahora soluciones producto de la forma

$$w(r, \theta, \phi) = f(r)q(\theta)g(\phi). \quad (7.10.8)$$

Observemos, para simplificar los cálculos, que, puesto que los coeficientes en (7.10.7) no dependen de θ , es fácil ver que las autofunciones en la variable θ son $\cos m\theta$ y $\sin m\theta$, como corresponde a las condiciones de contorno periódicas asociadas con la serie de Fourier usual en θ sobre el intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Podemos reemplazar en este caso el término $\partial^2 w / \partial \theta^2$ en (7.10.7) por $-m^2 w$. Sustituyendo (7.10.8) en (7.10.7), multiplicando por ρ^2 , dividiendo por $f(r)g(\phi)$ e introduciendo la tercera constante de separación μ (contando a $-m^2$ como la segunda), obtenemos:

$$\frac{1}{f} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) + \lambda \rho^2 = -\frac{1}{g \sin \phi} \frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dg}{d\phi} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \phi} = \mu. \quad (7.10.9)$$

Las dos ecuaciones diferenciales ordinarias que son parte fundamental de los problemas de autovalores en las variables ϕ y ρ son:

$$\boxed{\frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) + (\lambda \rho^2 - \mu) f = 0,} \quad (7.10.10)$$

$$\boxed{\frac{d}{d\phi} \left(\sin \phi \frac{dg}{d\phi} \right) + \left(\mu \sin \phi - \frac{m^2}{\sin \phi} \right) g = 0.} \quad (7.10.11)$$

Discutiremos brevemente las condiciones de contorno homogéneas asociadas con (7.10.10) y (7.10.11). Resolvamos (7.10.11) primero porque no depende de los autovalores λ de (7.10.10).

La Ecuación (7.10.11) es una ecuación diferencial de Sturm-Liouville (para cada m) en la coordenada angular ϕ con autovalor μ y peso no negativo $\sin \phi$. Esta Ecuación (7.10.11) está definida desde $\phi = 0$ (el polo norte) hasta $\phi = \pi$ (el polo sur). Puesto que $\sin \phi = 0$ en ambos extremos, vemos que (7.10.11) no es un problema regular de Sturm-Liouville. No hay una condición física de contorno en los puntos extremos singulares. En su lugar, imponemos que la solución debe estar acotada en ambos extremos: $|g(0)| < \infty$ y $|g(\pi)| < \infty$. También se tienen las propiedades usuales de los autovalores y las autofunciones. En particular, existe un conjunto infinito de autofunciones (para cada m fijo) asociadas a los distintos autovalores μ_{nm} , y estas autofunciones formarán un conjunto ortogonal respecto del peso $\sin \phi$.

La Ecuación (7.10.10) es una ecuación diferencial de Sturm-Liouville (para cada m y n) en la coordenada radial ρ con autovalor λ y peso ρ^2 . Una condición de contorno homogénea es $f(a) = 0$. Por otro lado, (7.10.10) es un problema singular de Sturm-Liouville a causa del cero que tiene el coeficiente delante de $df/d\rho$ en $\rho = 0$. Las coordenadas esféricas son singulares en $\rho = 0$ y las soluciones de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville deben estar acotadas en ese punto: $|f(0)| < \infty$. Sin embargo, también se tiene que para este problema singular existe un conjunto infinito de autofunciones (para cada m y n fijos) asociadas a los distintos autovalores λ_{knm} , y que estas autofunciones forman un conjunto ortogonal con respecto al peso ρ^2 .

7.10.3. Funciones de Legendre asociadas y polinomios de Legendre

Un cambio de variable (nada obvio) nos permite simplificar el análisis de la ecuación diferencial que define las autofunciones ortogonales en el ángulo ϕ :

$$\boxed{x = \cos \phi.} \quad (7.10.12)$$

Como ϕ varía entre 0 y π , ésta es una transformación uno-uno en la que x varía desde 1 hasta -1 . Probaremos que ambos extremos siguen siendo puntos singulares. Las derivadas se transforman de acuerdo con la regla de la cadena, $\frac{d}{d\phi} = \frac{dx}{d\phi} \frac{d}{dx} = -\sin \phi \frac{d}{dx}$, y de este modo (7.10.11) se convierte, tras dividir por $\sin \phi$ y recordar que $\sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi = 1 - x^2$, en:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dg}{dx} \right] + \left(\mu - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) g = 0.} \quad (7.10.13)$$

Ésta es también una ecuación de Sturm-Liouville, y las autofunciones serán ortogonales en la variable x respecto del peso 1. Este último corresponde al peso $\sin \phi$ con respecto a ϕ , ya que $dx = -\sin \phi d\phi$. La Ecuación (7.10.13) tiene puntos singulares en $x = \pm 1$, de los que, de hecho, probaremos que son puntos singulares regulares

(véase la Sección 7.8.4). Es útil comprender el comportamiento local cerca de cada punto singular. Para ello, usaremos la correspondiente ecuación equidimensional (de Euler). Analicemos la Ecuación (7.10.13) cerca de $x = 1$ (por simetría, el comportamiento local cerca de $x = -1$ debe ser el mismo). Podemos aproximar el inoportuno coeficiente $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$ por $-2(x - 1)$ cerca de $x = 1$ con lo que podemos aproximar también (7.10.13) cerca de $x = 1$ por

$$-2 \frac{d}{dx} \left[(x - 1) \frac{dg}{dx} \right] + \frac{m^2}{2(x - 1)} g \approx 0, \quad (7.10.14)$$

puesto que sólo es significativo el término singular que multiplica a g . La Ecuación (7.10.14) es una ecuación equidimensional (o de Euler), cuyas soluciones exactas son fáciles de obtener sustituyendo g por $(x - 1)^p$, obteniéndose $p^2 = m^2/4$, es decir, $p = \pm m/2$. Si $m \neq 0$, concluimos que una de las soluciones independientes está acotada cerca de $x = 1$ [y puede aproximarse por $(x - 1)^{m/2}$] mientras que la segunda solución independiente no está acotada [y podemos aproximarla por $(x - 1)^{-m/2}$].

Puesto que queremos que nuestra solución esté acotada en $x = 1$, sólo podemos usar la solución que está acotada en $x = 1$. Cuando computamos esta solución (por ejemplo numéricamente) en $x = -1$, vemos que su comportamiento debe ser una combinación lineal de los dos comportamientos locales cerca de $x = -1$. Normalmente, la solución que está acotada en $x = 1$ no lo estará en $x = -1$, y sólo en ciertos valores muy especiales de μ_{mn} (que hemos llamado autovalores) estará acotada la solución de (7.10.13) en ambos puntos $x = \pm 1$. Para simplificar significativamente nuestra presentación, no explicaremos el misterioso y elegante resultado de que los únicos valores de μ para los que la solución está acotada en $x = \pm 1$ son

$$\mu = n(n + 1), \quad (7.10.15)$$

donde n es un entero con algunas restricciones que mencionaremos. Es importante reseñar que los autovalores no dependen del importante parámetro m . La Ecuación (7.10.13) es una ecuación diferencial lineal cuyas dos soluciones independientes se llaman **funciones de Legendre asociadas (armónicos esféricos)** de primera especie, $P_n^m(x)$, y de segunda especie, $Q_n^m(x)$. La primera familia está acotada en ambos extremos $x = \pm 1$ para n entero, por lo que las autofunciones vienen dadas por $g(x) = P_n^m(x)$.

Caso $m = 0$: polinomios de Legendre. El valor $m = 0$ corresponde a soluciones de la ecuación en derivadas parciales que no dependen del ángulo cilíndrico θ . En este caso, la ecuación diferencial (7.10.13) se convierte en

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dg}{dx} \right] + n(n + 1)g = 0, \quad (7.10.16)$$

dado que puede probarse que los autovalores satisfacen (7.10.15). Usando métodos de desarrollo en serie puede demostrarse que existen soluciones que son series de Taylor elementales en torno de $x = 0$, que estas series son finitas sólo si $\mu = n(n+1)$ y, por tanto, que están acotadas en $x = \pm 1$ en ese caso. Puede probarse también (no fácilmente) que si $\mu \neq n(n+1)$ entonces la solución de la ecuación diferencial no está acotada en alguno de los extremos ± 1 . Estas importantísimas soluciones acotadas se llaman polinomios de Legendre y no son difíciles de calcular:

$$\begin{aligned} n = 0: & \quad P_0(x) = 1, \\ n = 1: & \quad P_1(x) = x = \cos \phi, \\ n = 2: & \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\phi + 1). \end{aligned} \tag{7.10.17}$$

Hemos elegido estos polinomios de forma que tomen el valor 1 en $x = 1$ (es decir, en $\phi = 0$, el polo norte). Puede demostrarse que los polinomios de Legendre satisfacen la **fórmula de Rodrigues**

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \tag{7.10.18}$$

Puesto que son ortogonales respecto del peso 1, también pueden ser obtenidos usando el proceso de Gram-Schmidt (véase el apéndice de la Sección 7.5). En la Figura 7.10.1 representamos gráficamente en las variables x y ϕ las primeras autofunciones (polinomios de Legendre). Puede probarse también que los polinomios de Legendre forman un conjunto completo de polinomios y, por tanto, que no existen autovalores distintos de $\mu = n(n+1)$.

Caso $m > 0$: las funciones de Legendre asociadas. Es un hecho notable que los autovalores del caso $m > 0$ sean básicamente los mismos que los del caso $m = 0$ que vienen dados por (7.10.15). Es incluso más notable que las autofunciones del caso $m > 0$ (que hemos llamado **funciones de Legendre asociadas**) puedan relacionarse con las autofunciones del caso $m = 0$ (polinomios de Legendre):

$$g(x) = P_n^m(x) = (x^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \tag{7.10.19}$$

donde hemos denotado por $P_n(x)$ el polinomio de Legendre de grado n . La derivada m -ésima será cero si $n < m$. Por tanto, las autofunciones existen sólo para $n \geq m$, y así los autovalores dependen sólo indirectamente de m . Los infinitos autovalores son

$$\mu = n(n+1), \tag{7.10.20}$$

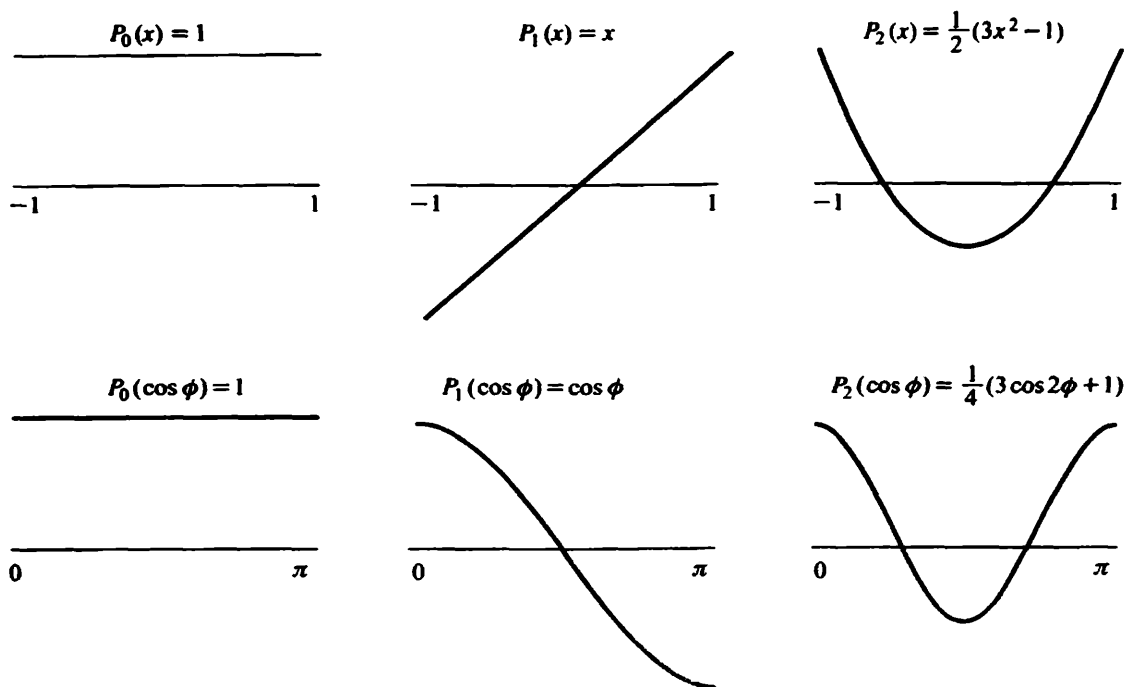


Figura 7.10.1: Polinomios de Legendre.

con la restricción de que $n \geq m$. Estas fórmulas son también válidas cuando $m = 0$; las funciones de Legendre asociadas coinciden con los polinomios de Legendre si $m = 0$, es decir, $P_n^0(x) = P_n(x)$.

7.10.4. Problemas radiales de autovalores

La ecuación diferencial radial de Sturm-Liouville (7.10.10) con $\mu = n(n+1)$,

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) + (\lambda\rho^2 - n(n+1)) f = 0, \quad (7.10.21)$$

tiene la restricción $n \geq m$ para m fijo. Las condiciones de contorno consisten en que $f(a) = 0$ y que la solución debería estar acotada en $\rho = 0$. La Ecuación (7.10.21) es casi la ecuación diferencial de Bessel. Podemos eliminar el parámetro λ considerando a $\sqrt{\lambda}\rho$ como la nueva variable independiente. Sin embargo, el resultado que se obtiene no es como el de la ecuación de Bessel. Es fácil probar (véanse los ejercicios) que si $Z_p(x)$ resuelve la ecuación diferencial de Bessel (7.7.25) de orden p , entonces las funciones $f(\rho) = \rho^{-1/2} Z_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\rho)$, que se llaman **funciones de Bessel esféricas**, satisfacen (7.10.21). Puesto que las autofunciones radiales deben estar acotadas en $\rho = 0$, tenemos que

$$f(\rho) = \rho^{-1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\rho), \quad (7.10.22)$$

para $n \geq m$ (si recordamos el comportamiento de las funciones de Bessel en el origen (7.7.33), podemos comprobar que estas soluciones están efectivamente acotadas en el origen; de hecho, se anulan en el origen salvo si $n = 0$). Los autovalores λ se determinan aplicando la condición de contorno homogénea en $\rho = a$:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}a) = 0. \quad (7.10.23)$$

Así pues, los autovalores se determinan por medio de los ceros de las funciones de Bessel de orden $n + \frac{1}{2}$. Existe un número infinito de autovalores para cada n y m . Obsérvese que las frecuencias de vibración son las mismas para todos los valores de $m \leq n$.

Las funciones de Bessel esféricas pueden relacionarse con las funciones trigonométricas:

$$x^{-1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(x) = x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\sin x}{x} \right). \quad (7.10.24)$$

7.10.5. Soluciones producto, modos de vibración y el problema de valor inicial

Las soluciones producto para la ecuación de ondas en tres dimensiones son de la forma

$$u(r, \theta, \phi, t) = \cos c\sqrt{\lambda}t \sin c\sqrt{\lambda}t \rho^{-1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda}\rho) \cos m\theta \sin m\theta P_n^m(\cos \phi)$$

donde las frecuencias de vibración se determinan por medio de la Ecuación (7.10.23). Las partes angulares $Y_n^m \equiv \cos m\theta \sin m\theta P_n^m(\cos \phi)$, se llaman **armónicos esféricos** de primera especie. Los problemas de valor inicial se resuelven usando la superposición de estos infinitos modos, sumando sobre m y n y las infinitas autofunciones radiales que se caracterizan por medio de los ceros de las funciones de Bessel. Los pesos de las tres propiedades de ortogonalidad unidimensionales se corresponden con $d\theta$, $\sin \phi d\phi$ y $\rho^2 d\rho$, lo que equivale a la ortogonalidad tridimensional con peso 1, puesto que el elemento diferencial de volumen en coordenadas esféricas es $dV = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$. Podemos deducir esto usando el jacobiano J de la transformación original, puesto que $dx dy dz = J d\rho d\theta d\phi$, y además

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi.$$

Las integrales de normalización para las funciones de Legendre asociadas pueden encontrarse en textos de referencia como Abramowitz y Stegun [1965]:

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 dx = (n + \frac{1}{2})^{-1} (n + m)! / (n - m)! \quad (7.10.25)$$

Ejemplo. Para el modo puramente radial $n = 0$ (y por tanto $m = 0$ sólo), se tiene, usando (7.10.24), que las frecuencias de vibración satisfacen $\text{sen}(\sqrt{\lambda}a) = 0$, con lo que

$$\text{frecuencia circular} = c\sqrt{\lambda} = \frac{j\pi c}{a},$$

donde, por ejemplo, a es el radio de la tierra. El modo fundamental $j = 1$ tiene frecuencia circular $\frac{\pi c}{a}$ hercios (ciclos por segundo), o una frecuencia de $\frac{c}{2a}$ por segundo, o un periodo de $\frac{2a}{c}$ segundos. Para la tierra podemos tomar $a = 6000$ km y $c = 5$ km/s, lo que da un periodo de $\frac{12000}{5} = 2400$ segundos o, lo que es lo mismo, de 40 minutos.

7.10.6. Ecuación de Laplace dentro de una cavidad esférica

Un problema interesante en electrostática, es resolver la ecuación de Laplace en el interior de una esfera cuando el potencial u está especificado sobre la frontera $\rho = a$:

$$\nabla^2 u = 0, \quad (7.10.26)$$

$$u(a, \theta, \phi) = F(\theta, \phi). \quad (7.10.27)$$

Este problema corresponde a determinar el potencial eléctrico dada la distribución del potencial sobre el conductor esférico. Podemos usar los cálculos anteriores en los que usamos separación de variables. Las ecuaciones en las variables θ y ϕ y sus soluciones serán las mismas, una serie de Fourier en θ que involucra $\cos m\theta$ y $\text{sen } m\theta$ y una serie de Fourier generalizada en ϕ que involucra las funciones de Bessel asociadas $P_n^m(\cos \phi)$. Sin embargo, debemos insistir en que $\lambda = 0$, con lo que la ecuación radial (7.10.21) será diferente y no será un problema de autovalores:

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{df}{d\rho} \right) - n(n+1)f = 0. \quad (7.10.28)$$

En este caso, (7.10.28) es una ecuación equidimensional y puede resolverse exactamente mediante la sustitución $f = \rho^r$ obteniendo $r(r+1) - n(n+1) = 0$, que es una ecuación cuadrática con dos raíces diferentes, $r = n$ y $r = -n-1$, puesto que n es un entero. Como el potencial debe estar acotado en el centro $\rho = 0$, rechazamos la solución no acotada ρ^{-n-1} . Las soluciones producto para la ecuación de Laplace son

$$\rho^n \cos m\theta \text{ sen } m\theta P_n^m(\cos \phi), \quad (7.10.29)$$

con lo que la solución de la ecuación de Laplace es de la forma:

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} [\rho^n A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \operatorname{sen} m\theta P_n^m(\cos \phi)]. \quad (7.10.30)$$

La condición de contorno no homogénea implica que

$$F(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} [a^n A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \operatorname{sen} m\theta P_n^m(\cos \phi)]. \quad (7.10.31)$$

Por ortogonalidad, por ejemplo, tenemos que

$$a^n B_{mn} = \frac{\iint F(\theta, \phi) \operatorname{sen} m\theta P_n^m(\cos \phi) \operatorname{sen} \phi d\phi d\theta}{\iint \operatorname{sen}^2 m\theta [P_n^m(\cos \phi)]^2 \operatorname{sen} \phi d\phi d\theta}. \quad (7.10.32)$$

Se tiene una expresión similar para A_{mn} .

Ejemplo. En electrostática, es interesante determinar el potencial eléctrico dentro de una esfera conductora si las semiesferas están a diferentes potenciales constantes. Esto puede hacerse experimentalmente separando dos semiesferas por medio de un anillo aislado insignificante y pequeño. Para nuestra conveniencia, supongamos que la semiesfera superior está a un potencial $+V$, mientras que la inferior lo está a un potencial $-V$. La condición de contorno en $\rho = a$ tiene simetría cilíndrica (azimutal); no existe dependencia del ángulo θ . Podemos resolver la ecuación de Laplace bajo estas circunstancias más sencillas, o podemos usar la solución general obtenida anteriormente. Seguiremos el segundo procedimiento. Puesto que no hay dependencia del ángulo θ , todos los términos de la serie de Fourier en θ serán cero en (7.10.30) excepto el término $m = 0$. Por tanto, la solución de la ecuación de Laplace con simetría cilíndrica puede escribirse como una serie que involucra a los polinomios de Legendre:

$$u(r, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^n P_n(\cos \phi). \quad (7.10.33)$$

La condición de contorno se convierte en

$$\left. \begin{array}{l} V \text{ para } 0 < \phi < \pi/2 \text{ (} 0 < x < 1 \text{)} \\ -V \text{ para } \pi/2 < \phi < \pi \text{ (} -1 < x < 0 \text{)} \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n P_n(\cos \phi). \quad (7.10.34)$$

Por tanto, usando la ortogonalidad (en $x = \cos \phi$) respecto del peso 1:

$$A_n a^n = \frac{\int_{-1}^0 -V P_n(x) dx + \int_0^1 V P_n(x) dx}{\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx} \quad (7.10.35)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par,} \\ 2 \int_0^1 V P_n(x) dx \left(\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx \right)^{-1} & \text{para } n \text{ impar,} \end{cases}$$

puesto que $P_n(x)$ es par para n par e impar para n impar, y el potencial sobre la superficie de la esfera es una función impar de x . Usando la integral de normalización (7.10.25) para el denominador y la fórmula de Rodrigues para los polinomios de Legendre, (7.10.18), puede probarse que

$$u(r, \phi) = V \left[\frac{3}{2} \frac{\rho}{a} P_1(\cos \phi) - \frac{7}{8} \left(\frac{\rho}{a} \right)^3 P_3(\cos \phi) + \frac{11}{16} \left(\frac{\rho}{a} \right)^5 P_5(\cos \phi) + \dots \right]. \quad (7.10.36)$$

Para una discusión más detallada, véase el libro de Jackson, *Electrodynamics* [1975].

EJERCICIOS 7.10

7.10.1. Resolver el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$ dentro de una esfera de radio a sujeta a la condición de contorno $u(a, \theta, \phi, t) = 0$ y a las condiciones iniciales:

- $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho, \theta, \phi)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0) = 0$.
- $u(\rho, \theta, \phi, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0) = G(\rho, \theta, \phi)$.
- $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho, \phi)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0) = 0$.
- $u(\rho, \theta, \phi, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0) = G(\rho, \phi)$.
- $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho, \phi) \cos 3\theta$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0) = 0$.
- $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho) \sin 2\theta$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0) = 0$.
- $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0) = 0$.
- $u(\rho, \theta, \phi, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \theta, \phi, 0) = G(\rho)$.

7.10.2. Resolver el problema de valores iniciales para la ecuación del calor $\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u$ dentro de una esfera de radio a sujeta a la condición de contorno $u(a, \theta, \phi, t) = 0$ y a las condiciones iniciales:

- $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho, \theta, \phi)$.
- $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho, \phi)$.
- $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho, \phi) \cos \theta$.
- $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho)$.

7.10.3. Resolver el problema de valores iniciales para la ecuación del calor $\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u$ dentro de una esfera de radio a sujeta a la condición de contorno $\frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \theta, \phi, t) = 0$ y a las condiciones iniciales:

- (a) $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho, \theta, \phi)$.
- (b) $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho, \phi)$.
- (c) $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho, \phi) \operatorname{sen} 3\theta$.
- (d) $u(\rho, \theta, \phi, 0) = F(\rho)$.

7.10.4. Usando el cociente de Rayleigh unidimensional, probar que $\mu \geq 0$ (si $m \geq 0$) en la Ecuación (7.10.11). ¿Bajo qué condiciones se tiene $\mu = 0$?

7.10.5. Usando el cociente de Rayleigh unidimensional, probar que $\mu \geq 0$ (si $m \geq 0$) en la Ecuación (7.10.13). ¿Bajo qué condiciones se tiene $\mu = 0$?

7.10.6. Usando el cociente de Rayleigh unidimensional, probar que $\lambda \geq 0$ (si $n \geq 0$) en la Ecuación (7.10.6) con la condición de contorno $f(a) = 0$. ¿Puede ser $\lambda = 0$?

7.10.7. Usando el cociente de Rayleigh tridimensional, probar que $\lambda \geq 0$ en la Ecuación (7.10.11) con $u(a, \theta, \phi, t) = 0$. ¿Puede ser $\lambda = 0$?

7.10.8. En este ejercicio vamos a estudiar ecuaciones diferenciales relacionadas con la ecuación de Bessel. Probar que la ecuación

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + x(1 - 2a - 2bx) \frac{df}{dx} + [a^2 - p^2 + (2a - 1)bx + (d^2 + b^2)x^2]f = 0, \quad (7.10.37)$$

tiene soluciones de la forma $x^a e^{bx} Z_p(dx)$, donde $Z_p(x)$ satisface la ecuación diferencial de Bessel (7.7.25). Comparando (7.10.21) y (7.10.37), tenemos que $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$, $\frac{1}{4} - p^2 = -n(n+1)$ y $d^2 = \lambda$. Encontramos así que $p = (n + \frac{1}{2})$.

7.10.9. Resolver la ecuación de Laplace dentro de una esfera $\rho < a$ sujeta a la siguiente condición de contorno sobre la esfera:

- (a) $u(a, \theta, \phi) = F(\phi) \cos 4\theta$.
- (b) $u(a, \theta, \phi) = F(\phi)$.
- (c) $\frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \theta, \phi) = F(\phi) \cos 4\theta$.
- (d) $\frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \theta, \phi) = F(\phi)$ con $\int_0^\pi F(\phi) \operatorname{sen} \phi d\phi = 0$.
- (e) $\frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \theta, \phi) = F(\theta, \phi)$ con $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\theta, \phi) \operatorname{sen} \phi d\theta d\phi = 0$.

7.10.10. Resolver la ecuación de Laplace en el exterior de una esfera $\rho > a$ sujeta al potencial dado sobre la esfera por:

- (a) $u(a, \theta, \phi) = F(\theta, \phi)$.

(b) $u(a, \theta, \phi) = F(\phi)$, con simetría cilíndrica (azimutal).

(c) $u(a, \theta, \phi) = V$ en la semiesfera superior y $-V$ en la semiesfera inferior (no simplificar ni evaluar integrales definidas).

- 7.10.11.** Resolver la ecuación de Laplace dentro del sector de la esfera $\rho < a$ con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ sujeta a las condiciones $u(\rho, 0, \phi) = 0$ y $u(\rho, \frac{\pi}{2}, \phi) = 0$ y al potencial dado sobre la esfera por $u(a, \theta, \phi) = F(\theta, \phi)$.
- 7.10.12.** Resolver la ecuación de Laplace dentro de la semiesfera $\rho < a, z > 0$ sujeta a las condiciones $u = 0$ en $z = 0$ y al potencial dado sobre la semiesfera por $u(a, \theta, \phi) = F(\theta, \phi)$. *Indicación:* usar simetría para resolver un problema diferente, una esfera con el potencial antisimétrico sobre la semiesfera inferior.
- 7.10.13.** Demostrar que la fórmula de Rodrigues proporciona los tres primeros polinomios de Legendre, correspondientes a $n = 0, n = 1$ y $n = 2$. Recuérdense las fórmulas de estos polinomios, dadas en (7.10.17).
- 7.10.14.** Demostrar que los polinomios que da la fórmula de Rodrigues satisfacen la ecuación diferencial para los polinomios de Legendre.
- 7.10.15.** Obtener (7.10.36) usando (7.10.35), (7.10.18) y (7.10.25).

Capítulo 8

Problemas no homogéneos

8.1. Introducción

En los capítulos anteriores hemos desarrollado un único método para resolver ecuaciones en derivadas parciales: el método de separación de variables. Recordemos que para poder aplicar este método la ecuación en derivadas parciales (que suponemos tiene n variables independientes) debe ser lineal y homogénea. Además, hemos de ser capaces de formular el problema mediante condiciones de contorno lineales y homogéneas para $n - 1$ de las variables. Sin embargo, algunos de los problemas físicos más importantes no tienen condiciones homogéneas.

8.2. Flujo de calor con fuentes y condiciones de contorno no homogéneas

Condiciones de contorno independientes del tiempo. Consideremos, como ejemplo de problema no homogéneo, el del flujo de calor (sin fuentes) en una varilla uniforme de longitud L con temperatura fija en el extremo de la izquierda a A° y en el de la derecha a B° . Si la condición inicial está prescrita, el problema matemático para la temperatura $u(x, t)$ consiste en resolver

$$\text{EDP : } \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \quad (8.2.1)$$

$$\text{CC1 : } \boxed{u(0, t) = A,} \quad (8.2.2)$$

$$\text{CC2 : } \boxed{u(L, t) = B,} \quad (8.2.3)$$

$$\text{CI: } \boxed{u(x, 0) = f(x)}. \quad (8.2.4)$$

No podemos usar directamente el método de separación de variables puesto que, incluso en este sencillo ejemplo, las condiciones de contorno no son homogéneas.

Temperatura de equilibrio. Para analizar este problema, obtengamos en primer lugar una distribución de temperaturas de equilibrio, $u_E(x)$. Si es que existe, esta distribución de temperaturas debe satisfacer la ecuación del calor estacionaria (independiente del tiempo),

$$\boxed{\frac{d^2 u_E}{dx^2} = 0}, \quad (8.2.5)$$

así como las condiciones de contorno dadas, que también son independientes del tiempo,

$$u_E(0) = A, \quad (8.2.6)$$

$$u_E(L) = B. \quad (8.2.7)$$

Recordemos que a la hora de definir la distribución de temperaturas en equilibrio, ignoramos las condiciones iniciales. Como ya vimos en la Sección 1.4, (8.2.5) implica que la distribución de temperaturas es lineal, y que la única función lineal que satisface (8.2.2) y (8.2.3) puede determinarse de forma geométrica o algebraica:

$$\boxed{u_E(x) = A + \frac{B - A}{L}x}. \quad (8.2.8)$$

Representamos gráficamente esta función en la Figura 8.2.1. Generalmente, $u_E(x)$ *no* será la solución dependiente del tiempo buscada, puesto que sólo satisface las condiciones iniciales (8.2.4) si $f(x) = A + [(B - A)/L]x$.

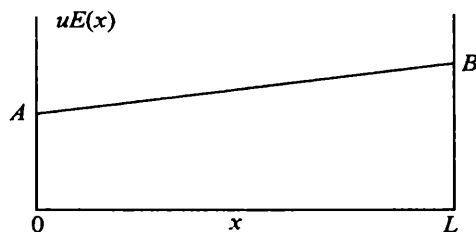


Figura 8.2.1: Distribución de temperaturas en el equilibrio.

Desplazamiento del equilibrio. Con objeto de estudiar condiciones iniciales más generales, consideremos el desplazamiento de temperaturas desde la tempe-

ratura de equilibrio,

$$v(x, t) \equiv u(x, t) - u_E(x). \quad (8.2.9)$$

En lugar de resolver el problema para $u(x, t)$, determinaremos $v(x, t)$. Puesto que $\partial v/\partial t = \partial u/\partial t$ y $\partial^2 v/\partial x^2 = \partial^2 u/\partial x^2$ (obsérvese que $u_E(x)$ es lineal en la variable x), se sigue que $v(x, t)$ también satisface la ecuación del calor,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (8.2.10)$$

Además, tanto $u(x, t)$ como $u_E(x)$ son iguales a A en $x = 0$ e iguales a B en $x = L$, y por tanto su diferencia es cero en $x = 0$ y en $x = L$,

$$v(0, t) = 0, \quad (8.2.11)$$

$$v(L, t) = 0. \quad (8.2.12)$$

Inicialmente, $v(x, t)$ es igual a la diferencia entre la temperatura inicial dada y la temperatura de equilibrio,

$$v(x, 0) = f(x) - u_E(x). \quad (8.2.13)$$

Así pues, afortunadamente, el problema matemático para $v(x, t)$ consiste en una ecuación en derivadas parciales con condiciones de contorno homogéneas. Por tanto, podemos determinar $v(x, t)$ por medio del método de separación de variables. De hecho, ya nos hemos encontrado antes con este problema varias veces y sabemos ya que se tiene

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad (8.2.14)$$

donde las condiciones iniciales implican que

$$f(x) - u_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (8.2.15)$$

Por tanto, los coeficientes a_n coinciden con los coeficientes de la serie de Fourier de senos de $f(x) - u_E(x)$:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L [f(x) - u_E(x)] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (8.2.16)$$

A partir de (8.2.9), obtenemos ahora fácilmente la temperatura deseada, $u(x, t) = u_E(x) + v(x, t)$. Así,

$$u(x, t) = u_E(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad (8.2.17)$$

donde los coeficientes a_n están dados por (8.2.16) y $u_E(x)$ viene dada por (8.2.8). Cuando $t \rightarrow \infty$, $u(x, t) \rightarrow u_E(x)$ independientemente de las condiciones iniciales. **La temperatura se aproxima a su distribución de equilibrio cualquiera que sea la condición inicial.**

Términos estacionarios no homogéneos. El método previo también funciona si existen fuentes estacionarias de energía térmica:

$$\text{EDP : } \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x), \quad (8.2.18)$$

$$\text{CC : } \begin{cases} u(0, t) = A, \\ u(L, t) = B, \end{cases} \quad (8.2.19)$$

$$\text{CI : } u(x, 0) = f(x). \quad (8.2.20)$$

Si existe una solución de equilibrio (véase el Ejercicio 1.4.6 para un ejemplo algo diferente en el que *no* existe una solución de equilibrio), entonces la determinaremos y consideraremos de nuevo el desplazamiento desde el equilibrio,

$$v(x, t) = u(x, t) - u_E(x).$$

Se puede probar que $v(x, t)$ satisface la ecuación en derivadas parciales homogénea (8.2.10) con las condiciones de contorno homogéneas (8.2.11) y (8.2.12). Por tanto, de nuevo $u(x, t) \rightarrow u_E(x)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Términos temporales no homogéneos. Desafortunadamente, los problemas no homogéneos no son siempre tan fáciles de resolver como los anteriores. Con objeto de aclarar la situación, consideremos de nuevo el flujo de calor en una varilla uniforme de longitud L . Sin embargo, vamos a realizar dos cambios sustanciales. Introduzcamos primero fuentes de calor dependientes del tiempo distribuidas de un modo prescrito a lo largo de la varilla. Así pues, la temperatura resolverá la siguiente ecuación en derivadas parciales no homogénea:

$$\text{EDP : } \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t). \quad (8.2.21)$$

Aquí, las fuentes de energía térmica $Q(x, t)$ varían tanto en el espacio como en el tiempo. Además, permitiremos que la temperatura en los extremos varíe en el

tiempo. Esto nos conduce a unas condiciones de contorno lineales no homogéneas que dependen del tiempo,

$$\text{CC : } \boxed{\begin{aligned} u(0, t) &= A(t), \\ u(L, t) &= B(t), \end{aligned}} \quad (8.2.22)$$

en lugar de las condiciones independientes del tiempo (8.2.2) y (8.2.3). Finalmente, la distribución inicial de temperaturas está prescrita de nuevo:

$$\text{CI : } \boxed{u(x, 0) = f(x).} \quad (8.2.23)$$

El problema matemático que se define por medio de (8.2.21) - (8.2.23) consiste en una ecuación en derivadas parciales no homogénea con condiciones de contorno también no homogéneas.

Condiciones de contorno homogéneas asociadas. Desgraciadamente *no podemos* reducir siempre este problema a una ecuación en derivadas parciales homogénea con condiciones de contorno homogéneas, como hicimos en el primer ejemplo de esta sección. Sin embargo, encontraremos que es bastante útil observar que siempre podemos transformar nuestro problema en otro con condiciones de contorno homogéneas, aunque en general la ecuación en derivadas parciales seguirá siendo no homogénea. Consideraremos también *cualquier distribución de temperaturas* $r(x, t)$ (cuanto más simple mejor) con la única propiedad de que satisfaga las condiciones de contorno no homogéneas dadas. En nuestro ejemplo, esto significa únicamente que

$$\begin{aligned} r(0, t) &= A(t), \\ r(L, t) &= B(t). \end{aligned}$$

Generalmente, no es difícil encontrar muchos candidatos para $r(x, t)$. La elección más simple quizás sea

$$r(x, t) = A(t) + \frac{x}{L}[B(t) - A(t)], \quad (8.2.24)$$

aunque existen otras posibilidades¹. Empleemos de nuevo la diferencia entre la solución deseada $u(x, t)$ y la función elegida $r(x, t)$ (ahora *no necesariamente* una solución de equilibrio):

$$v(x, t) \equiv u(x, t) - r(x, t). \quad (8.2.25)$$

¹Otras elecciones de $r(x, t)$ proporcionan soluciones equivalentes del problema no homogéneo original.

Puesto que tanto $u(x, t)$ como $r(x, t)$ satisfacen las mismas condiciones de contorno lineales (aunque no homogéneas) en ambos extremos $x = 0$ y $x = L$, se sigue que $v(x, t)$ satisface las condiciones de contorno homogéneas *asociadas*:

$$v(0, t) = 0, \quad (8.2.26)$$

$$v(L, t) = 0. \quad (8.2.27)$$

La ecuación en derivadas parciales satisfecha por $v(x, t)$ se obtiene sustituyendo

$$u(x, t) = v(x, t) + r(x, t)$$

en la ecuación del calor con fuentes, (8.2.21). Por tanto,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left[Q(x, t) - \frac{\partial r}{\partial t} + k \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right] \equiv k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{Q}. \quad (8.2.28)$$

En general, la ecuación en derivadas parciales que debe satisfacer $v(x, t)$ es del mismo tipo que la de $u(x, t)$, pero con un término no homogéneo diferente, puesto que $r(x, t)$ no satisface generalmente la ecuación del calor homogénea. También resulta usualmente alterada la condición inicial:

$$v(x, 0) = f(x) - r(x, 0) = f(x) - A(0) - \frac{x}{L}[B(0) - A(0)] \equiv g(x). \quad (8.2.29)$$

Puede verse que, en general, sólo conseguimos hacer homogéneas las condiciones de contorno. En la Sección 8.3 desarrollaremos un método para analizar problemas no homogéneos con condiciones de contorno homogéneas.

EJERCICIOS 8.2

8.2.1. Resolver la ecuación del calor con fuentes independientes del tiempo y condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x), \\ u(x, 0) &= f(x), \end{aligned}$$

si existe una solución de equilibrio. Analizar los límites cuando $t \rightarrow \infty$. Si no existe equilibrio, explicar por qué y reducir el problema a uno con condiciones de contorno homogéneas (pero sin resolverlo). Supóngase que

- | | | | |
|-------|--|---|---|
| * (a) | $Q(x) = 0,$ | $u(0, t) = A,$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = B.$ |
| (b) | $Q(x) = 0,$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0,$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = B \neq 0.$ |
| (c) | $Q(x) = 0,$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = A \neq 0,$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = A.$ |
| * (d) | $Q(x) = k,$ | $u(0, t) = A,$ | $u(L, t) = B.$ |
| (e) | $Q(x) = k,$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0,$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$ |
| (f) | $Q(x) = \text{sen } \frac{2\pi x}{L},$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0,$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$ |

8.2.2. Considérese la ecuación del calor con fuentes dependientes del tiempo y condiciones de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t),$$

$$u(x, 0) = f(x).$$

Reducir el problema a uno con condiciones de contorno homogéneas si

* (a)	$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = A(t)$	y	$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = B(t).$
(b)	$u(0, t) = A(t)$	y	$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = B(t).$
* (c)	$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = A(t)$	y	$u(L, t) = B(t).$
(d)	$u(0, t) = 0$	y	$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + h(u(L, t) - B(t)) = 0.$
(e)	$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$	y	$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + h(u(L, t) - B(t)) = 0.$

8.2.3. Resolver la ecuación del calor bidimensional con fuentes radiales independientes del tiempo, condiciones de contorno y condiciones iniciales (dentro de un círculo):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + Q(r),$$

con

$$u(r, 0) = f(r) \quad \text{y} \quad u(a, t) = T.$$

8.2.4. Resolver la ecuación del calor bidimensional con condiciones de contorno independientes del tiempo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

sujeta a las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) &= 0, \\ u(L, y, t) &= 0, & u(x, H, t) &= g(x), \end{aligned}$$

y la condición inicial

$$u(x, y, 0) = f(x, y).$$

Analizar el límite cuando $t \rightarrow \infty$.

8.2.5. Resolver el problema de valores iniciales para la ecuación del calor bidimensional dentro de un círculo (de radio a) con condiciones de contorno independientes del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \nabla^2 u, \\ u(a, \theta, t) &= g(\theta), \\ u(r, \theta, 0) &= f(r, \theta). \end{aligned}$$

8.2.6. Resolver la ecuación de ondas con fuentes independientes del tiempo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) &= g(x),\end{aligned}$$

si existe una solución de “equilibrio”. Analizar el comportamiento para t grande. Si no existe equilibrio, explicar por qué y reducir el problema a uno con condiciones de contorno homogéneas. Supóngase que

$$* (a) \quad Q(x) = 0, \quad u(0, t) = A, \quad u(L, t) = B.$$

$$(b) \quad Q(x) = 1, \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

$$(c) \quad Q(x) = 1, \quad u(0, t) = A, \quad u(L, t) = B.$$

Indicación: sumar los problemas de los apartados (a) y (b).

$$* (d) \quad Q(x) = \sin \frac{\pi x}{L}, \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

8.3. Método de desarrollo en autofunciones con condiciones de contorno homogéneas (diferenciación de series de autofunciones)

En la Sección 8.2 hemos mostrado cómo obtener un problema con condiciones de contorno homogéneas, incluso si el problema original tiene condiciones de contorno no homogéneas. Es por ello que a continuación vamos a investigar ecuaciones en derivadas parciales no homogéneas con condiciones de contorno homogéneas. Por ejemplo, consideremos el problema

$$\text{EDP : } \boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{Q}(x, t),} \quad (8.3.1)$$

$$\text{CC : } \boxed{\begin{aligned} v(0, t) &= 0, \\ v(L, t) &= 0, \end{aligned}} \quad (8.3.2)$$

$$\text{CI : } \boxed{v(x, 0) = g(x).} \quad (8.3.3)$$

Resolveremos este problema por el **método de desarrollo en autofunciones**. Consideremos las autofunciones del problema homogéneo asociado, esto es,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0.\end{aligned} \quad (8.3.4)$$

Las autofunciones de este problema homogéneo asociado satisfacen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi &= 0, \\ \phi(0) &= 0, \\ \phi(L) &= 0. \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

Sabemos ya que los autovalores son $\lambda_n = (n\pi/L)^2, n = 1, 2, \dots$ y las autofunciones correspondientes son $\phi_n(x) = \sin n\pi x/L$. Sin embargo, las autofunciones serán distintas para otros problemas. No queremos resaltar el método del desarrollo en autofunciones sólo para este ejemplo, por lo que hablando con mayor generalidad, supondremos que las autofunciones (del problema homogéneo asociado) se conocen y las designaremos por $\phi_n(x)$. Las autofunciones satisfacen un problema de autovalores de Sturm-Liouville y, por tanto, forman un sistema completo (toda función suave a trozos puede desarrollarse en serie de estas autofunciones). **El método del desarrollo en autofunciones, que emplearemos para resolver el problema no homogéneo (8.3.1) con condiciones de contorno homogéneas, (8.3.2), consiste en desarrollar la solución desconocida $v(x, t)$ en serie de las autofunciones asociadas:**

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x). \quad (8.3.6)$$

Para cada t , $v(x, t)$ es una función de x y, por tanto, $v(x, t)$ tendrá una serie de Fourier generalizada. En nuestro ejemplo, $\phi_n(x) = \sin n\pi x/L$, y esta serie es una serie de Fourier de senos ordinaria. Sin embargo, los coeficientes de Fourier generalizados varían con t y son, por tanto, funciones del tiempo, $a_n(t)$. A primera vista, el desarrollo (8.3.6) puede parecer análogo al que se tiene al separar variables en problemas homogéneos. Sin embargo, (8.3.6) es sustancialmente diferente. Aquí, $a_n(t)$ no son las soluciones temporales separadas $e^{-k(n\pi/L)^2 t}$. Al contrario, $a_n(t)$ son exactamente los coeficientes de Fourier de $v(x, t)$. Determinaremos $a_n(t)$ y probaremos que generalmente $a_n(t)$ no es proporcional a $e^{-k(n\pi/L)^2 t}$.

La Ecuación (8.3.6) satisface automáticamente las condiciones de contorno homogéneas, ya que tanto $v(x, t)$ como $\phi_n(x)$ satisfacen las mismas condiciones de contorno homogéneas. La condición inicial se satisface si

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \phi_n(x).$$

Gracias a la ortogonalidad de las autofunciones [con peso 1 en este problema debido al coeficiente constante en (8.3.5)], podemos determinar los valores iniciales de los coeficientes de Fourier generalizados:

$$a_n(0) = \frac{\int_0^L g(x) \phi_n(x) dx}{\int_0^L \phi_n^2(x) dx}. \quad (8.3.7)$$

Todo lo que queda es determinar $a_n(t)$ de modo que (8.3.6) resuelva la ecuación en derivadas parciales no homogénea (8.3.1). Mostraremos de dos formas distintas que $a_n(t)$ debe satisfacer una ecuación diferencial ordinaria de primer orden si queremos que (8.3.6) satisfaga (8.3.1).

Un primer método² para calcular $a_n(t)$ consiste en realizar una sustitución directa. Esto es fácil de hacer pero requiere el cálculo de $\partial v/\partial t$ y de $\partial^2 v/\partial x^2$. Pero la diferenciación de $v(x, t)$ puede ser una operación delicada, ya que $v(x, t)$ es una serie infinita. Simplemente afirmamos aquí que con cierto grado de generalidad, si v y $\partial v/\partial x$ son continuas y si $v(x, t)$ **verifica las mismas condiciones homogéneas que $\phi_n(x)$, entonces se puede justificar que podemos derivar la serie término a término.** Recordemos que ya hemos probado esta afirmación en la Sección 3.4, cuando hicimos una investigación más detallada de las propiedades de diferenciación término a término en el caso de series de Fourier de senos y cosenos. Para el caso general omitiremos la demostración. Sin embargo, resaltemos que obtendremos la misma solución en la Sección 8.4 por un método alternativo, lo que sirve para justificar la técnica algo más simple que hemos usado en la presente sección. Procedamos, por tanto, a derivar término a término $v(x, t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n(t)}{dt} \phi_n(x), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{d^2 \phi_n(x)}{dx^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \lambda_n \phi_n(x),\end{aligned}$$

puesto que $\phi_n(x)$ verifica $d^2 \phi_n/dx^2 + \lambda_n \phi_n = 0$. Sustituyendo estos resultados en (8.3.1) obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{da_n}{dt} + \lambda_n k a_n \right] \phi_n(x) = \bar{Q}(x, t). \quad (8.3.8)$$

Así pues, el miembro izquierdo de esta ecuación es la serie de Fourier generalizada de $\bar{Q}(x, t)$. Gracias a la ortogonalidad de las autofunciones $\phi_n(x)$, obtenemos que $a_n(t)$ debe satisfacer una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{da_n}{dt} + \lambda_n k a_n = \frac{\int_0^L \bar{Q}(x, t) \phi_n(x) dx}{\int_0^L \phi_n^2(x) dx} \equiv \bar{q}_n(t). \quad (8.3.9)$$

El miembro derecho es una función conocida del tiempo (y de n), concretamente el coeficiente de Fourier n -ésimo de $\bar{Q}(x, t)$:

$$\bar{Q}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{q}_n(t) \phi_n(x).$$

La Ecuación (8.3.9) requiere una condición inicial, y efectivamente $a_n(0)$ es igual al coeficiente de Fourier generalizado de la condición inicial [véase (8.3.7)].

²Discutiremos un segundo método en la Sección 8.4.

La Ecuación (8.3.9) es una ecuación lineal no homogénea de primer orden. El método más sencillo de resolverla³ probablemente sea (a menos que $\bar{q}_n(t)$ sea particularmente sencilla) multiplicarla por el factor integrante $e^{\lambda_n kt}$. Si procedemos de esta forma, tenemos que

$$e^{\lambda_n kt} \left(\frac{da_n}{dt} + \lambda_n k a_n \right) = \frac{d}{dt} (a_n e^{\lambda_n kt}) = \bar{q}_n e^{\lambda_n kt}.$$

Integrando desde 0 hasta t obtenemos que

$$a_n(t) e^{\lambda_n kt} - a_n(0) = \int_0^t \bar{q}_n(\tau) e^{\lambda_n k\tau} d\tau.$$

Despejando $a_n(t)$ llegamos a que

$$a_n(t) = a_n(0) e^{-\lambda_n kt} + e^{-\lambda_n kt} \int_0^t \bar{q}_n(\tau) e^{\lambda_n k\tau} d\tau. \quad (8.3.10)$$

Obsérvese que $a_n(t)$ consiste en una constante $a_n(0)$ multiplicada por la solución de la ecuación homogénea $e^{-\lambda_n kt}$ más una solución particular. Esto completa el método de desarrollo en autofunciones. La solución de nuestra ecuación en derivadas parciales no homogénea con condiciones de contorno homogéneas es

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x),$$

donde $\phi_n(x) = \sin n\pi x/L$, $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $a_n(t)$ viene dada por (8.3.10), $\bar{q}_n(\tau)$ por (8.3.9) y $a_n(0)$ está dada por (8.3.7). La solución es, por tanto, bastante complicada.

Observemos, a modo de comprobación, que si el problema hubiera sido homogéneo, es decir, si $Q(x, t) = 0$, entonces la solución que hemos obtenido se simplifica para dar

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x),$$

donde

$$a_n(t) = a_n(0) e^{-\lambda_n kt}$$

y los coeficientes $a_n(0)$ están dados por (8.3.7), lo que es exactamente la solución obtenida anteriormente por separación de variables.

Ejemplo. Como un ejemplo elemental, supongamos que para $0 < x < \pi$ (esto es, $L = \pi$), se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{sen } 3x e^{-t}, \quad \text{sujeta a} \quad \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(\pi, t) &= 1, \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

³Otro método es el de variación de los parámetros.

Para hacer homogéneas las condiciones de contorno, introducimos el desplazamiento a partir del equilibrio, $v(x, t) = u(x, t) - x/\pi$, que debe verificar

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \text{sen } 3x e^{-t}, \quad \text{sujeta a } \begin{cases} v(0, t) = 0, \\ v(\pi, t) = 1, \\ v(x, 0) = f(x) - \frac{x}{\pi}. \end{cases}$$

Las autofunciones son $\text{sen } n\pi x/L = \text{sen } nx$ (puesto que $L = \pi$), con lo que

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \text{sen } nx. \quad (8.3.11)$$

Si sustituimos esta serie de autofunciones en la ecuación en derivadas parciales, obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{da_n}{dt} + n^2 a_n \right) \text{sen } nx = \text{sen } 3x e^{-t}.$$

Por tanto, los coeficientes desconocidos de la serie de Fourier de senos satisfacen

$$\frac{da_n}{dt} + n^2 a_n = \begin{cases} 0 & n \neq 3, \\ e^{-t} & n = 3. \end{cases}$$

La solución de esta ecuación diferencial no requiere la fórmula (8.3.10):

$$a_n(t) = \begin{cases} a_n(0)e^{-n^2 t} & n \neq 3, \\ \frac{1}{8}e^{-t} + [a_3(0) - \frac{1}{8}]e^{-9t} & n = 3, \end{cases} \quad (8.3.12)$$

donde

$$a_n(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[f(x) - \frac{x}{\pi} \right] \text{sen } nx \, dx. \quad (8.3.13)$$

La solución del problema no homogéneo original viene dada por $u(x, t) = v(x, t) + x/\pi$, donde v verifica (8.3.11) y $a_n(t)$ se determina mediante (8.3.12) y (8.3.13).

EJERCICIOS 8.3

8.3.1. Resolver el problema de valores iniciales para la ecuación del calor con fuente que depende también del tiempo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \end{aligned}$$

sujeta a las siguientes condiciones de contorno:

- | | |
|---|---|
| (a) $u(0, t) = 0,$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$ |
| (b) $u(0, t) = 0,$ | $u(L, t) + 2\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$ |
| * (c) $u(0, t) = A(t),$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$ |
| (d) $u(0, t) = A \neq 0,$ | $u(L, t) = 0.$ |
| (e) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = A(t),$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = B(t).$ |
| * (f) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0,$ | $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$ |

(g) Particularizar el apartado (f) en el caso en que $Q(x, t) = Q(x)$ (independiente de t) con $\int_0^L Q(x) dx \neq 0$. Probar que en este caso no existen soluciones independientes del tiempo. ¿Qué le ocurre a las soluciones de nuestro problema cuando $t \rightarrow \infty$? Explicar brevemente.

8.3.2. Considérese la ecuación del calor con una fuente estacionaria

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x),$$

sujeta a las condiciones inicial y de contorno descritas en esta sección:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(x, 0) = f(x).$$

Obtener la solución por el método del desarrollo en autofunciones. Probar que la solución se aproxima a una solución estacionaria.

***8.3.3.** Resolver el problema de valor inicial

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + qu + f(x, t),$$

donde c, ρ, K_0 y q son sólo funciones de x , sujeto a las condiciones

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(x, 0) = g(x).$$

Supóngase que las autofunciones son conocidas. *Indicación:* considérese el operador $L \equiv \frac{d}{dx} \left(K_0 \frac{d}{dx} \right) + q$.

8.3.4. Considérese la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[K_0(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (K_0 > 0, \sigma > 0),$$

con las condiciones de contorno e iniciales:

$$u(x, 0) = g(x), \quad u(0, t) = A \quad \text{y} \quad u(L, t) = B.$$

***(a)** Encontrar una solución independiente del tiempo, $u_0(x)$.

(b) Probar que $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = f(x)$ independientemente de las condiciones iniciales [demostrar que $f(x) = u_0(x)$].

***8.3.5.** Resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u + f(r, t)$$

dentro del círculo ($r < a$), con $u = 0$ en $r = a$ e inicialmente $u = 0$.

8.3.6. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{sen } 5x e^{-2t},$$

sujeta a $u(0, t) = 1$, $u(\pi, t) = 0$ y $u(x, 0) = 0$.

***8.3.7.** Resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

sujeta a $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = t$ y $u(x, 0) = 0$.

8.4. Método de desarrollo en autofunciones mediante la fórmula de Green (con o sin condiciones homogéneas de contorno)

En esta sección vamos a reconsiderar problemas que pueden tener condiciones de contorno no homogéneas y usaremos de nuevo el método de desarrollo en autofunciones. Sea, por ejemplo, el problema

$$\text{EDP : } \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \quad (8.4.1)$$

$$\text{CC : } \begin{aligned} u(0, t) &= A(t), \\ u(L, t) &= B(t), \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

$$\text{CI : } u(x, 0) = f(x). \quad (8.4.3)$$

Sabemos que las autofunciones del problema homogéneo asociado,

$$\frac{d^2 \phi_n}{dx^2} + \lambda_n \phi_n = 0, \quad (8.4.4)$$

$$\phi_n(0) = 0, \quad (8.4.5)$$

$$\phi_n(L) = 0, \quad (8.4.6)$$

son $\phi_n(x) = \text{sen } n\pi x/L$ y que corresponden a los autovalores $\lambda_n = (n\pi/L)^2$. Además, cualquier función suave a trozos puede desarrollarse en términos de estas autofunciones. Por tanto, incluso aunque $u(x, t)$ satisfaga condiciones de contorno no homogéneas, todavía es cierto que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x). \quad (8.4.7)$$

En realidad, la igualdad (8.4.7) no puede ser válida en los extremos $x = 0$ y $x = L$ ya que las autofunciones $\phi_n(x)$ satisfacen las condiciones de contorno homogéneas, mientras que $u(x, t)$ no. Aún así, seguimos usando el símbolo $=$, pero entendiendo que la notación \sim sería más apropiada. Es difícil determinar $b_n(t)$ por sustitución de (8.4.7) en (8.4.1), ya que ahora no podemos derivar con respecto a x término a término, puesto que $u(x, t)$ y $\phi_n(x)$ no satisfacen las mismas condiciones homogéneas

de contorno $[\partial^2 u / \partial x^2 \neq \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) d^2 \phi_n / dx^2]$. Sin embargo, la derivación término a término con respecto a la variable temporal es todavía válida:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt} \phi_n(x). \tag{8.4.8}$$

Determinemos ahora la ecuación diferencial ordinaria que debe satisfacer $b_n(t)$. Al contrario que en la Sección 8.3, obtendremos esta ecuación *sin* calcular las derivadas espaciales de una serie infinita de autofunciones. A partir de (8.4.8) se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt} \phi_n(x) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t),$$

con lo que

$$\frac{db_n}{dt} = \frac{\int_0^L \left[k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t) \right] \phi_n(x) dx}{\int_0^L \phi_n^2 dx}. \tag{8.4.9}$$

La Ecuación (8.4.9) es necesaria para que la ecuación en derivadas parciales pueda ser satisfecha. Por otro lado, ya notamos la importancia de la serie de Fourier generalizada de $Q(x, t)$:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x), \text{ donde } q_n(t) = \frac{\int_0^L Q(x, t) \phi_n(x) dx}{\int_0^L \phi_n^2 dx}.$$

Por tanto, podemos simplificar (8.4.9) escribiendo:

$$\frac{db_n}{dt} = q_n(t) + \frac{\int_0^L k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \phi_n(x) dx}{\int_0^L \phi_n^2 dx}. \tag{8.4.10}$$

Mostraremos cómo evaluar la integral en (8.4.10) en términos de $b_n(t)$, y esto nos conducirá a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Si integramos $\int_0^L \partial^2 u / \partial x^2 \phi_n(x) dx$ por partes dos veces, deberíamos obtener sin duda el resultado deseado. Sin embargo, esto supone un esfuerzo considerable. Hay un camino mejor, puesto que ya hemos realizado en un contexto más general la integración por partes que necesitamos. Quizás la notación de operadores, $L \equiv \partial^2 / \partial x^2$, nos pueda ayudar a recordar el resultado que necesitamos. En efecto, escribiendo $L = \partial^2 / \partial x^2$,

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \phi_n(x) dx = \int_0^L \phi_n L(u) dx,$$

podemos simplificar la expresión obtenida empleando la fórmula de Green (que dedujimos por integración repetida en el Capítulo 5). Recordemos la **fórmula de Green**:

$$\int_0^L [uL(v) - vL(u)] dx = p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_0^L, \quad (8.4.11)$$

donde L es cualquier operador de Sturm-Liouville ($L \equiv (d/dx)(pd/dx) + q$). En nuestro contexto actual, $L = \partial^2/\partial x^2$ (esto es, $p = 1$ y $q = 0$). Observemos que podemos usar la notación de derivadas parciales en el segundo miembro, ya que $\partial/\partial x = d/dx$ cuando t está fija. Por tanto,

$$\int_0^L \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_0^L. \quad (8.4.12)$$

Hagamos ahora $v = \phi_n(x)$ y recordemos que, a menudo, u y ϕ_n satisfacen las mismas condiciones de contorno homogéneas, con lo que el lado derecho de (8.4.12) se anula. En nuestro caso, $\phi_n(x) = \sin n\pi x/L$ satisface condiciones de contorno homogéneas, pero $u(x, t)$ no [$u(0, t) = A(t)$ y $u(L, t) = B(t)$]. Sin embargo, usando que $d\phi_n/dx = (n\pi/L) \cos n\pi x/L$, el miembro derecho de (8.4.12) se simplifica, dando $(n\pi/L)[B(t)(-1)^n - A(t)]$. Además, $\int_0^L u d^2\phi_n/dx^2 dx = -\lambda_n \int_0^L u \phi_n dx$, ya que $d^2\phi_n/dx^2 + \lambda_n\phi_n = 0$. Por tanto, (8.4.12) se convierte en

$$\int_0^L \phi_n \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = -\lambda_n \int_0^L u \phi_n dx - \frac{n\pi}{L} [B(t)(-1)^n - A(t)].$$

Puesto que los $b_n(t)$ son los coeficientes de Fourier generalizados de $u(x, t)$, sabemos que

$$b_n(t) = \frac{\int_0^L u \phi_n dx}{\int_0^L \phi_n^2 dx}.$$

Así, finalmente, (8.4.10) se reduce a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para $b_n(t)$:

$$\frac{db_n}{dt} + k\lambda_n b_n = q_n(t) + \frac{k(n\pi/L)[A(t) - (-1)^n B(t)]}{\int_0^L \phi_n^2(x) dx}. \quad (8.4.13)$$

Los términos no homogéneos surgen de dos modos: $q_n(t)$ se debe a los términos de fuente en la EDP, mientras que el término que involucra a $A(t)$ y $B(t)$ es el resultado de las condiciones de contorno no homogéneas en los extremos $x = 0$

y $x = L$. Podemos resolver la Ecuación (8.4.13) introduciendo de nuevo el factor integrante $e^{k\lambda_n t}$. La condición inicial que necesitamos que verifique $b_n(t)$ se sigue de la condición inicial dada, $u(x, 0) = f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0)\phi_n(x),$$

$$b_n(0) = \frac{\int_0^L f(x)\phi_n(x) dx}{\int_0^L \phi_n^2 dx}.$$

Es interesante observar que la ecuación diferencial de los coeficientes $b_n(t)$ para problemas con condiciones de contorno no homogéneas es bastante similar a la que obtuvimos en la sección anterior para el caso de condiciones de contorno homogéneas: sólo se ha modificado el término no homogéneo.

Si las condiciones de contorno son homogéneas, $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$, entonces (8.4.13) se reduce a

$$\frac{db_n}{dt} + k\lambda_n b_n = q_n(t),$$

la ecuación diferencial obtenida en la sección precedente. Por tanto, el uso de la fórmula de Green proporciona un procedimiento alternativo de obtener el desarrollo en autofunciones: puede usarse incluso si las condiciones de contorno son homogéneas. De hecho, es este procedimiento el que permite justificar la derivación término a término de la serie infinita de autofunciones que usamos en la Sección 8.3.

Así pues, tenemos ahora dos procedimientos para resolver ecuaciones en derivadas parciales no homogéneas con condiciones de contorno no homogéneas. Restando cualquier función que sólo verifique las condiciones no homogéneas de contorno, podemos resolver un problema asociado con condiciones de contorno homogéneas por el método de desarrollo en autofunciones. Alternativamente, podemos resolver directamente el problema original que tiene condiciones de contorno no homogéneas por el método de desarrollo en autofunciones. En ambos casos necesitamos el desarrollo en autofunciones de cierta función $w(x, t)$:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x).$$

Si $w(x, t)$ satisface las mismas condiciones de contorno homogéneas que $\phi_n(x)$, entonces afirmamos que esta serie convergerá de modo razonablemente rápido. Sin embargo, si $w(x, t)$ satisface condiciones de contorno no homogéneas, entonces, no sólo la serie no satisfará las condiciones de contorno (en $x = 0$ y $x = L$), sino que la serie convergerá más lentamente en todas partes. Por tanto, *la ventaja de reducir un problema a condiciones homogéneas de contorno es que la serie correspondiente converge más rápido.*

EJERCICIOS 8.4

8.4.1. Resolver el problema de valores iniciales para la ecuación del calor con fuentes dependientes del tiempo

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x),\end{aligned}$$

sujeta a las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad u(0, t) &= A(t), & \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= B(t). \\ * \text{(b)} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= A(t), & \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= B(t).\end{aligned}$$

Realizar este problema, sin hacer una reducción a condiciones de contorno homogéneas.

8.4.2. Usar el método de desarrollo en autofunciones para resolver, sin reducir a condiciones de contorno homogéneas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \left. \begin{array}{l} u(0, t) = A \\ u(L, t) = B \end{array} \right\} \text{constantes.}\end{aligned}$$

8.4.3. Considérese el problema

$$\begin{aligned}c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[K_0(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + q(x)u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= g(x), \quad \begin{array}{l} u(0, t) = \alpha(t), \\ u(L, t) = \beta(t), \end{array}\end{aligned}$$

y supóngase que las autofunciones $\phi_n(x)$ del problema homogéneo asociado son conocidas.

- Resolverlo sin reducir a un problema con condiciones de contorno homogéneas.
- Resolverlo reduciendo primero a un problema con condiciones de contorno homogéneas.

8.4.4. Rehacer el problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \begin{array}{l} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = 0, \end{array}\end{aligned}$$

y supóngase que la solución $u(x, t)$ tiene la suavidad apropiada para que pueda ser representada por medio de una serie de Fourier de cosenos,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Obtener dc_n/dt y demostrar que c_n satisface una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de primer orden, pero que parte de los términos no homogéneos no son conocidos. Dar una breve conclusión filosófica.

8.5. Vibraciones forzadas y resonancia

El método de desarrollo en autofunciones puede ser también aplicado a ecuaciones en derivadas parciales no homogéneas con más de dos variables independientes. Un ejemplo interesante es el de una membrana vibrante con forma arbitraria. En nuestros análisis previos de membranas, las vibraciones estaban causadas por las condiciones iniciales, pero otro mecanismo que puede poner a una membrana en movimiento es una fuerza externa. La ecuación en derivadas parciales no homogénea que describe a una membrana vibrante es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u + Q(x, y, t), \quad (8.5.1)$$

donde $Q(x, y, t)$ representa una fuerza externa que depende tanto del tiempo como de las variables espaciales. Para que el problema fuera completamente general, debería haber alguna condición de contorno a lo largo del borde de la membrana. Sin embargo, es más usual que una membrana vibrante esté fija en el borde (con desplazamiento vertical nulo). Por tanto, aquí usaremos esta condición de contorno homogénea,

$$u = 0, \quad (8.5.2)$$

sobre toda la frontera. También estarán especificadas tanto la posición inicial como la velocidad inicial:

$$u(x, y, 0) = \alpha(x, y), \quad (8.5.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \beta(x, y). \quad (8.5.4)$$

A la hora de usar el método de desarrollo en autofunciones, debemos suponer que “conocemos” las autofunciones del problema homogéneo asociado. El problema de autovalores asociado se obtiene aplicando el método de separación de variables a (8.5.1) con $Q(x, y, t) = 0$, donde la condición de contorno es (8.5.2):

$$\nabla^2 \phi = -\lambda \phi, \quad (8.5.5)$$

con $\phi = 0$ sobre toda la frontera. Sabemos que estas autofunciones forman un conjunto completo y que son ortogonales (en un sentido bidimensional) con peso 1. También hemos probado que $\lambda > 0$. Sin embargo, las autofunciones específicas del problema dependen de la forma geométrica de la región. Sólo podemos obtener fórmulas explícitas para ciertas geometrías relativamente simples. Recordemos que para un rectángulo ($0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq H$) los autovalores son $\lambda_{nm} = (n\pi/L)^2 + (m\pi/H)^2$ y las autofunciones correspondientes son $\phi_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{H}$, donde $n = 1, 2, 3, \dots$ y $m = 1, 2, 3, \dots$. Recordemos también que para un círculo de radio a , hemos probado que los autovalores son $\lambda_{mn} = (z_{mn}/a)^2$, donde z_{mn} son los n -ésimos ceros de la función de Bessel de orden m , $J_m(z_{mn}) = 0$, y que las autofunciones correspondientes son tanto $J_m(z_{mn}r/a) \sin m\theta$ como $J_m(z_{mn}r/a) \cos m\theta$, donde $n = 1, 2, 3, \dots$ y $m = 0, 1, 2, 3, \dots$.

En general, designaremos las autofunciones del problema homogéneo asociado por $\phi_i(x, y)$. Cualquier función (suave a trozos), incluyendo la solución para nuestra membrana vibrante forzada, puede representarse como una serie infinita de estas autofunciones. Por tanto,

$$u(x, y, t) = \sum_i A_i(t) \phi_i(x, y). \quad (8.5.6)$$

Aquí, el sumatorio \sum_i representa una suma sobre *todas* las autofunciones. En el caso de membranas incluirá una suma doble si somos capaces de separar variables en $\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0$.

Diferenciación término a término. Obtendremos una ecuación diferencial ordinaria para los coeficientes $A_i(t)$. Tal ecuación diferencial puede deducirse de dos modos: por sustitución directa (usando la diferenciación de series infinitas de autofunciones) y mediante el uso de la fórmula de Green multidimensional. En cualquier caso, necesitamos suponer que no hay dificultades con la diferenciación término a término de (8.5.6) con respecto a t . Así pues,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_i \frac{d^2 A_i}{dt^2} \phi_i(x, y). \quad (8.5.7)$$

La derivación término a término en las variables espaciales está permitida porque tanto u como ϕ_i verifican las mismas condiciones de contorno homogéneas:

$$\nabla^2 u = \sum_i A_i(t) \nabla^2 \phi_i(x, y). \quad (8.5.8)$$

Esto no sería válido si fuera $u \neq 0$ sobre la frontera. Puesto que $\nabla^2 \phi_i = -\lambda_i \phi_i$, se sigue que (8.5.1) se convierte en

$$\sum_i \left(\frac{d^2 A_i}{dt^2} + c^2 \lambda_i A_i \right) \phi_i = Q(x, y, t). \quad (8.5.9)$$

Si desarrollamos $Q(x, y, t)$ en términos de estas mismas autofunciones,

$$Q(x, y, t) = \sum_i q_i(t) \phi_i(x, y), \quad \text{donde} \quad q_i(t) = \frac{\iint Q \phi_i \, dx \, dy}{\iint \phi_i^2 \, dx \, dy}, \quad (8.5.10)$$

por tanto,

$$\boxed{\frac{d^2 A_i}{dt^2} + c^2 \lambda_i A_i = q_i(t)}. \quad (8.5.11)$$

Así pues, A_i verifica una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de segundo orden.

Fórmula de Green. Una forma alternativa de deducir (8.5.11) consiste en usar la fórmula de Green. Empezamos la deducción determinando $d^2 A_i / dt^2$ directamente a partir de (8.5.7), usando únicamente la ortogonalidad bidimensional de $\phi_i(x, y)$ (con peso 1):

$$\frac{d^2 A_i}{dt^2} = \frac{\iint \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \phi_i \, dx \, dy}{\iint \phi_i^2 \, dx \, dy}. \quad (8.5.12)$$

A continuación, eliminamos $\partial^2 u / \partial t^2$ usando la ecuación en derivadas parciales (8.5.1):

$$\frac{d^2 A_i}{dt^2} = \frac{\iint (c^2 \nabla^2 u + Q) \phi_i \, dx \, dy}{\iint \phi_i^2 \, dx \, dy}. \quad (8.5.13)$$

Si descomponemos la integral del segundo miembro en suma de dos integrales y reconocemos en la segunda de ellas los coeficientes de Fourier generalizados de Q [véase (8.5.10)], tenemos que

$$\frac{d^2 A_i}{dt^2} = q_i(t) + \frac{\iint c^2 \nabla^2 u \phi_i \, dx \, dy}{\iint \phi_i^2 \, dx \, dy}. \quad (8.5.14)$$

En este momento es adecuado usar la versión bidimensional de la fórmula de Green:

$$\iint (\phi_i \nabla^2 u - u \nabla^2 \phi_i) \, dx \, dy = \oint (\phi_i \nabla u - u \nabla \phi_i) \cdot \hat{n} \, ds, \quad (8.5.15)$$

donde ds representa la diferencial de longitud de arco a lo largo de la frontera y \hat{n} es el vector normal unitario exterior. En nuestro caso, u y ϕ_i satisfacen condiciones

homogéneas de contorno, y por tanto el término de frontera que aparece en (8.5.15) se anula:

$$\iint (\phi_i \nabla^2 u - u \nabla^2 \phi_i) dx dy = 0. \quad (8.5.16)$$

La Ecuación (8.5.16) es quizás más fácil de recordar en la forma

$$\iint [uL(v) - vL(u)] dx dy = 0,$$

donde $L = \nabla^2$. Si la membrana no tuviera condiciones homogéneas de contorno, entonces deberíamos usar (8.5.15) en lugar de (8.5.16), como hicimos en la Sección 8.4. La ventaja de usar la fórmula de Green es que también podemos resolver el problema aunque las condiciones de contorno sean no homogéneas. En nuestro caso, usando (8.5.16),

$$\iint \phi_i \nabla^2 u dx dy = \iint u \nabla^2 \phi_i dx dy = -\lambda_i \iint u \phi_i dx dy = -\lambda_i A_i(t) \iint \phi_i^2 dx dy,$$

puesto que $\nabla^2 \phi_i + \lambda_i \phi_i = 0$ y ya que $A_i(t)$ es el coeficiente de Fourier generalizado de $u(x, y, t)$:

$$A_i(t) = \frac{\iint u \phi_i dx dy}{\iint \phi_i^2 dx dy}. \quad (8.5.17)$$

Consecuentemente, deducimos a partir de (8.5.14) que

$$\boxed{\frac{d^2 A_i}{dt^2} + c^2 \lambda_i A_i = q_i,} \quad (8.5.18)$$

esto es, la misma ecuación diferencial ordinaria de segundo orden que ya obtuvimos antes [véase (8.5.11)], lo que justifica la diferenciación término a término que se realizó allí.

Variación de los parámetros. Para poder resolver (8.5.18) necesitaremos algunos resultados acerca de ecuaciones diferenciales ordinarias. La Ecuación (8.5.18) es una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes (puesto que $\lambda_i c^2$ es constante). La solución general de esta ecuación consiste en una solución particular más una combinación lineal de soluciones homogéneas. En este problema, las soluciones homogéneas son $\sin c\sqrt{\lambda_i}t$ y $\cos c\sqrt{\lambda_i}t$ ya que $\lambda_i > 0$. Por otro lado, siempre podemos obtener una solución particular usando el método de variación de los parámetros. Sin embargo, conviene observar que el método de los coeficientes indeterminados es generalmente más fácil y es el que debemos usar si $q_i(t)$ es un polinomio, una exponencial, un seno o un coseno (o un producto y/o suma de funciones de este tipo). Si usamos el método de

variación de los parámetros (véase la Sección 9.3.2), puede probarse que la solución general de (8.5.18) es

$$A_i(t) = c_1 \cos c\sqrt{\lambda_i}t + c_2 \operatorname{sen} c\sqrt{\lambda_i}t + \int_0^t q_i(\tau) \frac{\operatorname{sen} c\sqrt{\lambda_i}(t - \tau)}{c\sqrt{\lambda_i}} d\tau. \quad (8.5.19)$$

Usando ahora esta ecuación, podemos verificar fácilmente las condiciones iniciales:

$$A_i(0) = c_1, \quad (8.5.20)$$

$$\frac{dA_i}{dt}(0) = c_2 c\sqrt{\lambda_i}. \quad (8.5.21)$$

A partir de las condiciones iniciales (8.5.3) y (8.5.4), se sigue que

$$A_i(0) = \frac{\iint \alpha(x, y) \phi_i(x, y) dx dy}{\iint \phi_i^2 dx dy}, \quad (8.5.22)$$

$$\frac{dA_i}{dt}(0) = \frac{\iint \beta(x, y) \phi_i(x, y) dx dy}{\iint \phi_i^2 dx dy}. \quad (8.5.23)$$

Así pues, en general, la solución para el caso de una membrana vibrante forzada es

$$u(x, y, t) = \sum_i A_i(t) \phi_i(x, y),$$

donde ϕ_i está dada por (8.5.5) y $A_i(t)$ se determina por medio de (8.5.19) - (8.5.23).

Si no hay fuerzas externas, $Q(x, y, t) = 0$ (es decir, $q_i(t) = 0$), entonces $A_i(t) = c_1 \cos c\sqrt{\lambda_i}t + c_2 \operatorname{sen} c\sqrt{\lambda_i}t$, y la solución en esta situación es entonces

$$u(x, y, t) = \sum_i (a_i \cos c\sqrt{\lambda_i}t + b_i \operatorname{sen} c\sqrt{\lambda_i}t) \phi_i(x, y),$$

esto es, exactamente la misma solución que obtuvimos por separación de variables. Las frecuencias naturales de oscilación de la membrana son $c\sqrt{\lambda_i}$.

Forzamiento periódico. Hemos terminado de completar el análisis de las vibraciones de una membrana de forma arbitraria con fuerzas externas también arbitrarias. Podríamos fácilmente particularizar este resultado al caso de membranas rectangulares y circulares, pero en lugar de hacer esto continuaremos estudiando una membrana con forma arbitraria. Supongamos que la función que representa a las fuerzas externas es puramente oscilatoria en el tiempo, concretamente

$$Q(x, y, t) = \bar{Q}(x, y) \cos \omega t; \quad (8.5.24)$$

esto es, la frecuencia de forzamiento es ω y no especificamos la dependencia en las variables espaciales, $\bar{Q}(x, y)$. También necesitaremos el desarrollo en autofunciones de la función de forzamiento. A partir de (8.5.10) se sigue que

$$q_i(t) = \gamma_i \cos \omega t, \quad (8.5.25)$$

donde γ_i son constantes,

$$\gamma_i = \frac{\iint \bar{Q}(x, y) \phi_i(x, y) dx dy}{\iint \phi_i^2 dx dy}.$$

De (8.5.18) se deduce que los coeficientes de Fourier generalizados verifican la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden,

$$\frac{d^2 A_i}{dt^2} + c^2 \lambda_i A_i = \gamma_i \cos \omega t. \quad (8.5.26)$$

Como el miembro derecho de (8.5.26) es simple, es más sencillo obtener una solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados [en lugar de usar la forma general (8.5.19)]. Las soluciones homogéneas son de nuevo una combinación lineal de $\sin c\sqrt{\lambda_i}t$ y de $\cos c\sqrt{\lambda_i}t$, lo que representa a las frecuencias naturales $c\sqrt{\lambda_i}$ de la membrana. La membrana está siendo forzada con frecuencia ω .

La solución de (8.5.26) no es difícil. Deberíamos preguntarnos si existe una *solución particular* de la forma⁴

$$A_i(t) = B_i \cos \omega t. \quad (8.5.27)$$

Sustituyendo (8.5.27) en (8.5.26) obtenemos que

$$B_i(c^2 \lambda_i - \omega^2) = \gamma_i, \quad \text{es decir,} \quad B_i = \frac{\gamma_i}{c^2 \lambda_i - \omega^2},$$

pero esta división sólo es válida si $\omega^2 \neq c^2 \lambda_i$. El significado físico de este resultado es que *si la frecuencia de forzamiento ω es diferente de una frecuencia natural*, entonces tenemos la solución particular

$$A_i(t) = \frac{\gamma_i \cos \omega t}{c^2 \lambda_i - \omega^2}, \quad (8.5.28)$$

y la solución general es

$$A_i(t) = \frac{\gamma_i \cos \omega t}{c^2 \lambda_i - \omega^2} + c_1 \cos c\sqrt{\lambda_i}t + c_2 \sin c\sqrt{\lambda_i}t. \quad (8.5.29)$$

El coeficiente $A_i(t)$ representa la amplitud del modo $\phi_i(x, y)$. Cada modo se compone de una vibración en su frecuencia natural $c\sqrt{\lambda_i}$, y de una vibración con frecuencia

⁴Si apareciera en (8.5.26) un término que incluyera la primera derivada, lo que representaría una fuerza de rozamiento, entonces deberíamos incluir en la solución particular tanto a $\cos \omega t$ como a $\sin \omega t$.

de forzamiento ω . Cuanto más cercanas estén estas dos frecuencias (para un modo dado) mayor será la amplitud del modo.

Resonancia. Sin embargo, si la frecuencia de forzamiento ω coincide con una de las frecuencias naturales $c\sqrt{\lambda_i}$, entonces tiene lugar un fenómeno conocido como **resonancia**. Matemáticamente, si $\omega^2 = c^2\lambda_i$, entonces para esos modos (esto es, sólo aquellos $\phi_i(x, y)$ tales que $\omega^2 = c^2\lambda_i$), (8.5.27) no es la solución apropiada, puesto que el miembro derecho de (8.5.26) es una solución homogénea. En cambio, la solución no es periódica en el tiempo ya que la amplitud de las oscilaciones crece proporcionalmente a t . Con unos pocos cálculos se obtiene que una solución particular de (8.5.26) es

$$A_i(t) = \frac{\gamma_i}{2\omega} t \operatorname{sen} \omega t, \quad (8.5.30)$$

y, por tanto, la solución general es

$$A_i(t) = \frac{\gamma_i}{2\omega} t \operatorname{sen} \omega t + c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t, \quad (8.5.31)$$

donde $\omega = c\sqrt{\lambda_i}$, para cualquier modo que resuene. Si hay resonancia, los modos naturales correspondientes a la frecuencia de forzamiento crecen en el tiempo y no están acotados. En cambio, los otros modos de oscilación permanecen acotados y, después de un rato, los modos resonantes dominarán. Por tanto, la estructura espacial de una solución se deberá primariamente a las autofunciones de los modos resonantes. Los otros modos no estarán excitados significativamente.

Presentamos ahora una breve deducción de (8.5.30), que evita algunos cálculos tediosos. Si $\omega^2 \neq c^2\lambda_i$, obtenemos la solución general (8.5.28) de forma relativamente fácil. Desafortunadamente, no podemos tomar el límite cuando $\omega \rightarrow c\sqrt{\lambda_i}$ puesto que, entonces, la amplitud tiende a hacerse infinita. Sin embargo, usando (8.5.29) vemos que

$$A_i(t) = \frac{\gamma_i}{c^2\lambda_i - \omega^2} (\cos \omega t - \cos c\sqrt{\lambda_i}t) \quad (8.5.32)$$

es también una solución permisible⁵ si $\omega^2 \neq c^2\lambda_i$. Esta solución sí puede tener límite cuando $\omega \rightarrow c\sqrt{\lambda_i}$, puesto que $A_i(t)$ es entonces de la forma 0/0 cuando $\omega \rightarrow c\sqrt{\lambda_i}$. Calculemos el límite de (8.5.32) cuando $\omega \rightarrow c\sqrt{\lambda_i}$, usando la regla de l'Hopital tenemos

$$A_i(t) = \lim_{\omega \rightarrow c\sqrt{\lambda_i}} \frac{\gamma_i (\cos \omega t - \cos c\sqrt{\lambda_i}t)}{c^2\lambda_i - \omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow c\sqrt{\lambda_i}} \frac{-\gamma_i t \operatorname{sen} \omega t}{-2\omega},$$

con lo que se verifica (8.5.30).

El desplazamiento del modo resonante no puede crecer indefinidamente como sugiere (8.5.31). Las matemáticas son correctas, pero deberíamos modificar algunas suposiciones físicas. Quizás sería apropiado incluir una fuerza de rozamiento que limite el crecimiento, como se muestra en un ejercicio. Alternativamente, quizás el

⁵Esta solución se corresponde con las condiciones iniciales $A_i(0) = 0$ y $dA_i/dt = 0$.

modo crezca hasta una amplitud tan grande que la hipótesis de linealidad, que se necesita para obtener una deducción física de la ecuación de ondas bidimensional, ya no sea válida; es decir, que podría ser necesaria una ecuación en derivadas parciales diferente para modelizar los desplazamientos suficientemente grandes. Quizás el crecimiento de amplitud debido a la resonancia produzca la rotura de la membrana (pero esto no puede ocurrir hasta después de que la hipótesis de linealidad haya sido violada).

Obsérvese que hemos demostrado el resultado para cualquier geometría. La introducción de los detalles para las geometrías rectangular y circular no nos habría dejado ver con claridad los fenómenos físicos y matemáticos básicos involucrados.

La resonancia de una membrana vibrante es matemáticamente similar a la resonancia de sistemas masa-resorte (también sin fricción). De hecho, nos encontraremos con el fenómeno de la resonancia en cualquier sistema mecánico cuando una frecuencia de forzamiento coincida con una de las frecuencias naturales. El fenómeno de la resonancia ha sido el causante de desastres como el del vergonzoso hundimiento del Puente de Tacoma y varios accidentes de aviación.

EJERCICIOS 8.5

8.5.1. Demostrar, por sustitución, que

$$y(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(\bar{t}) \operatorname{sen} \omega_0(t - \bar{t}) d\bar{t}$$

es una solución particular de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = f(t).$$

¿Cuál es la solución general? ¿Qué solución satisface las condiciones iniciales $y(0) = y_0$ y $\frac{dy}{dt}(0) = v_0$?

8.5.2. Considérese una cuerda vibrante con un forzamiento que depende del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \\ u(0, t) &= 0, & u(x, 0) &= f(x), \\ u(L, t) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Resolver el problema de valores iniciales.

*(b) Resolver el problema de valores iniciales si $Q(x, t) = g(x) \cos \omega t$. ¿Para qué valores de ω hay resonancia?

8.5.3. Considérese una cuerda vibrante con rozamiento y con un forzamiento periódico en el tiempo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial u}{\partial t} + g(x) \cos \omega t,$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & u(x, 0) &= f(x), \\ u(L, t) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

- (a) Resolver este problema de valor inicial si β es moderadamente pequeño ($0 < \beta < 2c\pi/L$).
- (b) Comparar esta solución con el Ejercicio 8.5.2(b).

8.5.4. Resolver el problema de valores iniciales para una cuerda vibrante con forzamiento que depende del tiempo.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

sujeta a las siguientes condiciones de contorno. No reducir al caso de condiciones de contorno homogéneas:

- (a) $u(0, t) = A(t), \quad u(L, t) = B(t).$
- (b) $u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$
- (c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = A(t), \quad u(L, t) = 0.$

8.5.5. Resolver el problema de valor inicial para una membrana con forzamiento que depende del tiempo y con borde fijo ($u = 0$),

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \nabla^2 u + Q(x, y, t), \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0, \end{aligned}$$

si la membrana es

- (a) Un rectángulo ($0 < x < L, 0 < y < H$).
- (b) Un círculo ($r < a$).
- * (c) Un semicírculo ($0 < \theta < \pi, r < a$).
- (d) Un anillo circular ($a < r < b$).

8.5.6. Considérese el desplazamiento $u(r, \theta, t)$ de una membrana forzada semicircular de radio α (Figura 8.5.1) que satisface la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + g(r, \theta, t),$$

con las condiciones de contorno homogéneas:

$$u(r, 0, t) = 0, \quad u(r, \pi, t) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial r}(\alpha, \theta, t) = 0.$$

y las condiciones iniciales

$$u(r, \theta, 0) = H(r, \theta) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = 0.$$

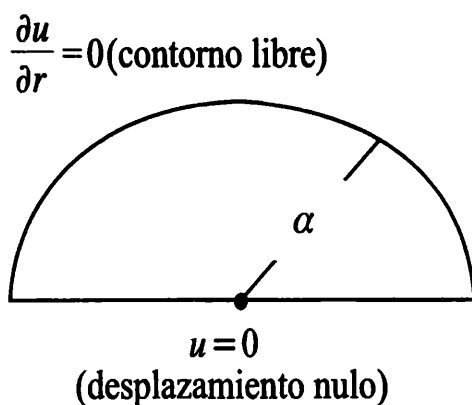


Figura 8.5.1: Membrana semicircular.

- *(a) Supóngase que $u(r, \theta, t) = \sum \sum a(t)\phi(r, \theta)$, donde $\phi(r, \theta)$ son las autofunciones del problema homogéneo asociado. ¿Qué condiciones iniciales verifica $a(t)$? ¿Qué ecuación diferencial satisface $a(t)$?
- (b) ¿Cuáles son las autofunciones?
- (c) Calcular $u(r, \theta, t)$. *Indicación: véase el Ejercicio 8.5.1.*

8.6. Ecuación de Poisson

Hasta ahora hemos aplicado el método de desarrollo en autofunciones a problemas de valores en la frontera no homogéneos y que dependen del tiempo (con o sin condiciones de contorno homogéneas). En todos los casos, el método de desarrollo en autofunciones,

$$u = \sum_i a_i(t)\phi_i,$$

condujo a un *problema de valores iniciales* para los coeficientes $a_i(t)$, donde ϕ_i son las autofunciones homogéneas asociadas que satisfacen, por ejemplo,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla^2\phi + \lambda\phi = 0.$$

Los problemas no homogéneos independientes del tiempo deben ser resueltos de un modo ligeramente diferente. Consideremos la distribución de temperaturas en equilibrio con fuentes independientes del tiempo, que satisfacen la **Ecuación de Poisson**,

$$\boxed{\nabla^2 u = Q}, \tag{8.6.1}$$

donde Q está asociada a las fuentes de energía térmica. No especificamos por ahora la región geométrica. Sin embargo, supondremos que la temperatura está especificada sobre la frontera,

$$u = \alpha,$$

donde α está dada y generalmente *no* es constante. Este problema es no homogéneo por dos motivos: debido a la función de forzamiento Q y a la condición de contorno α . Podemos descomponer la temperatura de equilibrio en dos partes, $u = u_1 + u_2$, de modo que u_1 sea debida al forzamiento y u_2 se deba a la condición de contorno:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_1 &= Q, & \nabla^2 u_2 &= 0, \\ u_1 &= 0 \text{ sobre la frontera,} & u_2 &= \alpha \text{ sobre la frontera.} \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $u = u_1 + u_2$ satisface la ecuación de Poisson y la condición de contorno no homogénea. El problema cuya solución es u_2 es una ecuación de Laplace (con condiciones no homogéneas de contorno) y, como sabemos, puede resolverse para geometrías sencillas por el método de separación de variables (recuérdese que vimos en las Secciones 2.5.1 y 7.9.1 cómo introducir las condiciones de contorno homogéneas).

Por tanto, lo primero que vamos a hacer en esta sección es centrar nuestra atención en la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u_1 = Q,$$

con condiciones de contorno *homogéneas* ($u_1 = 0$ sobre toda la frontera). En vista de las secciones anteriores deberíamos esperar resolver este problema por el método del desarrollo en autofunciones, puesto que u_1 satisface condiciones de contorno homogéneas. Podemos analizar el problema de dos formas algo diferentes: (1) podemos desarrollar la solución en autofunciones del problema homogéneo asociado, que se obtiene por separación de variables en la ecuación $\nabla^2 u_1 = 0$ (como hicimos para los problemas que dependen del tiempo), o (2) podemos desarrollar la solución en las autofunciones

$$\nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0.$$

Los dos métodos son diferentes (pero están relacionados).

Autofunciones unidimensionales. Para concretar, consideremos la ecuación de Poisson bidimensional en un rectángulo con condiciones de contorno nulas:

$$\boxed{\nabla^2 u_1 = Q,} \quad (8.6.2)$$

como se ilustra en la Figura 8.6.1. Describiremos primero el uso de las autofunciones unidimensionales. El problema homogéneo asociado, $\nabla^2 u_1 = 0$, que es la ecuación de Laplace, puede separarse (en coordenadas rectangulares).

Debemos recordar que la solución oscila en una dirección y es una combinación de exponenciales en la otra dirección. Por tanto, las autofunciones del problema homogéneo asociado (que son necesarias para poder usar el método del desarrollo en autofunciones) podrían ser autofunciones en la variable x o autofunciones en la variable y . Puesto que tenemos dos condiciones homogéneas de contorno en *ambas*

$$\begin{array}{c}
 u_1 = 0 \\
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \begin{array}{c}
 u_1 = 0 \\
 \nabla^2 u_1 = Q \\
 u_1 = 0
 \end{array} \\
 \hline
 \end{array} \\
 u_1 = 0
 \end{array}$$

Figura 8.6.1: Ecuación de Poisson en un rectángulo.

direcciones, podemos usar *o bien* las autofunciones que dependen de x *o bien* las que dependen de y . Para concretar usaremos las autofunciones que dependen de x , que son $\text{sen } n\pi x/L$ puesto que $u_1 = 0$ en $x = 0$ y en $x = L$. El método del desarrollo en autofunciones consiste en desarrollar $u_1(x, y)$ en serie de estas autofunciones:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y) \text{sen } \frac{n\pi x}{L}, \quad (8.6.3)$$

donde los coeficientes $b_n(y)$ de la serie de Fourier de senos (8.6.3) son funciones de y . Diferenciando (8.6.3) dos veces con respecto a y , y sustituyendo en la ecuación de Poisson, (8.6.2), obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 b_n}{dy^2} \text{sen } \frac{n\pi x}{L} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = Q. \quad (8.6.4)$$

Aquí, $\partial^2 u_1 / \partial x^2$ puede determinarse de dos modos relacionados (como ya mostramos para los problemas no homogéneos que dependen del tiempo): el más directo, que consiste en diferenciar término a término con respecto a x la serie (8.6.3) y el que consiste en usar la fórmula de Green. De cualquier modo, obtenemos a partir de (8.6.4) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^2 b_n}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 b_n \right] \text{sen } \frac{n\pi x}{L} = Q, \quad (8.6.5)$$

puesto que ambas, u_1 y $\text{sen } n\pi x/L$, verifican las mismas condiciones homogéneas de contorno. Por tanto, los coeficientes de la serie de Fourier de senos satisfacen la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\frac{d^2 b_n}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 b_n = \frac{2}{L} \int_0^L Q(x, y) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx \equiv q_n(y), \quad (8.6.6)$$

donde el miembro de la derecha es el coeficiente de la serie de Fourier de senos de Q ,

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L}. \quad (8.6.7)$$

Necesitamos dos condiciones para resolver (8.6.6). Hasta ahora tenemos que se satisface la ecuación de Poisson y la condición de contorno en $x = 0$ y $x = L$. Las condiciones de contorno en $y = 0$ (para todo x), $u_1 = 0$, y en $y = H$ (para todo x), $u_1 = 0$, implican que

$$b_n(0) = 0 \quad \text{y} \quad b_n(H) = 0. \quad (8.6.8)$$

Por tanto, los coeficientes desconocidos en el método del desarrollo en autofunciones [véase (8.6.6)] resuelven por sí mismos un *problema no homogéneo de valores en la frontera*. Comparemos este resultado con el de los problemas de ecuaciones en derivadas parciales no homogéneos que dependen del tiempo, en los que los coeficientes satisfacían problemas de valores iniciales unidimensionales. Los problemas de valores en la frontera unidimensionales son más difíciles de satisfacer que los problemas de valores iniciales. Más tarde, discutiremos problemas de valores en la frontera para ecuaciones diferenciales ordinarias. Encontraremos distintos modos de resolver (8.6.6) sujeta a la condiciones de contorno (8.6.8). Una forma de la solución es la que podemos obtener usando el método de variación de los parámetros (véase la Sección 9.3.2), es decir

$$b_n(y) = \operatorname{senh} \frac{n\pi(H-y)}{L} \int_0^y q_n(\xi) \operatorname{senh} \frac{n\pi\xi}{L} d\xi + \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{L} \int_y^H q_n(\xi) \operatorname{senh} \frac{n\pi(H-\xi)}{L} d\xi. \quad (8.6.9)$$

Por tanto, podemos resolver la ecuación de Poisson (con condiciones de contorno homogéneas) usando las autofunciones homogéneas asociadas que dependen de x . Los problemas con condiciones de contorno no homogéneas se pueden resolver del mismo modo introduciendo las modificaciones necesarias para usar la fórmula de Green con condiciones no homogéneas. En el Ejercicio 8.6.1 se pide resolver el mismo problema usando las autofunciones homogéneas asociadas que dependen de la variable y .

Autofunciones bidimensionales. Una forma algo diferente de resolver la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 u_1 = Q, \quad (8.6.10)$$

sobre un rectángulo con condiciones de contorno nulas es considerar las autofunciones bidimensionales asociadas:

$$\nabla^2 \phi = -\lambda \phi,$$

con $\phi = 0$ sobre la frontera. Sabemos que, para un rectángulo, esto implica una

serie de senos en x , así como también una serie de senos en y :

$$\begin{aligned}\phi_{nm} &= \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}, \\ \lambda_{nm} &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2.\end{aligned}$$

El método de desarrollo en autofunciones consiste en desarrollar la solución u_1 en términos de estas autofunciones bidimensionales

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H}. \quad (8.6.11)$$

Aquí, los coeficientes b_{nm} son constantes (no una función de otra variable) puesto que u_1 sólo depende de x e y . La sustitución de (8.6.11) en la ecuación de Poisson (8.6.10) nos conduce a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} -b_{nm} \lambda_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} = Q,$$

puesto que $\nabla^2 \phi_{nm} = -\lambda_{nm} \phi_{nm}$. El laplaciano puede evaluarse derivando término a término, puesto que ambas, u_1 y ϕ_{nm} , satisfacen las mismas condiciones homogéneas de contorno. Las autofunciones ϕ_{nm} son ortogonales (en sentido bidimensional) con peso 1. Por tanto,

$$-b_{nm} \lambda_{nm} = \frac{\int_0^H \int_0^L Q \operatorname{sen}(n\pi x/L) \operatorname{sen}(m\pi y/H) dx dy}{\int_0^H \int_0^L \operatorname{sen}^2(n\pi x/L) \operatorname{sen}^2(m\pi y/H) dx dy}, \quad (8.6.12)$$

lo que permite determinar los coeficientes b_{nm} . Podemos reconocer en el numerador del miembro derecho de (8.6.12) los coeficientes de Fourier generalizados de Q . Para despejar b_{nm} basta dividir ahora por λ_{nm} , lo que no presenta dificultad ya que $\lambda_{nm} > 0$ (esto puede verse explícitamente o usando el cociente de Rayleigh). Así pues, es más fácil obtener la solución usando el desarrollo en términos de las autofunciones bidimensionales que usando las unidimensionales. Sin embargo, conviene tener en cuenta que las series doblemente infinitas como (8.6.11) pueden converger bastante lentamente, con lo que puede ser preferible usar métodos numéricos excepto en los casos sencillos. En el Ejercicio 8.6.2, mostramos que los coeficientes de la serie de Fourier de senos en la variable y de $b_n(y)$ [véase (8.6.3)] coinciden con b_{nm} [véase (8.6.11)]. Esto prueba la equivalencia entre las dos estrategias de usar el desarrollo en autofunciones en una o dos dimensiones.

Condiciones de contorno no homogéneas en dominios generales. Las autofunciones bidimensionales pueden también usarse directamente para resolver la ecuación de Poisson sujeta a condiciones de contorno no homogéneas. Además,

no es más difícil indicar cuál es la solución para geometrías bastante generales. Supongamos que

$$\boxed{\nabla^2 u = Q,} \quad (8.6.13)$$

con $u = \alpha$ sobre la frontera. Consideremos las autofunciones ϕ_i de $\nabla^2 \phi = -\lambda \phi$ con $\phi = 0$ sobre la frontera. Representemos u en términos de estas autofunciones:

$$\boxed{u = \sum_i b_i \phi_i.} \quad (8.6.14)$$

Sin embargo, ahora *ya no* es cierto que

$$\nabla^2 u = \sum_i b_i \nabla^2 \phi_i,$$

puesto que u no satisface condiciones homogéneas de contorno. En cambio, a partir de (8.6.14) deducimos que

$$b_i = \frac{\iint u \phi_i \, dx \, dy}{\iint \phi_i^2 \, dx \, dy} = -\frac{1}{\lambda_i} \frac{\iint u \nabla^2 \phi_i \, dx \, dy}{\iint \phi_i^2 \, dx \, dy}, \quad (8.6.15)$$

ya que $\nabla^2 \phi_i = -\lambda_i \phi_i$. Podemos evaluar el numerador usando la fórmula de Green bidimensional.

$$\iint (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) \, dx \, dy = \oint (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \hat{n} \, ds. \quad (8.6.16)$$

Haciendo $v = \phi_i$, vemos que

$$\iint u \nabla^2 \phi_i \, dx \, dy = \iint \phi_i \nabla^2 u \, dx \, dy + \oint (u \nabla \phi_i - \phi_i \nabla u) \cdot \hat{n} \, ds.$$

Sin embargo, $\nabla^2 u = Q$ y, sobre la frontera, $\phi_i = 0$ y $u = \alpha$. Por tanto,

$$\boxed{b_i = -\frac{1}{\lambda_i} \frac{\iint \phi_i Q \, dx \, dy + \oint \alpha \nabla \phi_i \cdot \hat{n} \, ds}{\iint \phi_i^2 \, dx \, dy}.} \quad (8.6.17)$$

Ésta es la expresión general que buscamos para los coeficientes b_i , puesto que estamos suponiendo que λ_i , ϕ_i , α y Q son conocidos. Observemos, de nuevo, que la división por λ_i no presenta dificultad, ya que se tiene que $\lambda_i > 0$ a partir del cociente de Rayleigh. Véase la Sección 9.4, para estudiar problemas en los que $\lambda_i = 0$.

Si u también satisface condiciones de contorno homogéneas, es decir, si $\alpha = 0$, entonces (8.6.17) se convierte en

$$b_i = -\frac{1}{\lambda_i} \frac{\iint \phi_i Q \, dx \, dy}{\iint \phi_i^2 \, dx \, dy},$$

lo que concuerda con (8.6.12) en el caso de una región rectangular. Esto muestra que (8.6.11) puede ser derivada término a término si u y ϕ satisfacen las mismas condiciones homogéneas de contorno.

EJERCICIOS 8.6

8.6.1. Resolver la ecuación

$$\nabla^2 u = Q(x, y)$$

sobre un rectángulo ($0 < x < L$, $0 < y < H$), sujeta a

$$(a) \quad u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \\ u(L, y) = 0, \quad u(x, H) = 0.$$

Úsese una serie de Fourier de senos en la variable y .

$$*(b) \quad u(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \\ u(L, y) = 1, \quad u(x, H) = 0.$$

No reducir a condiciones homogéneas de contorno.

(c) Resolver el apartado (b) reduciéndolo primero al caso de condiciones homogéneas de contorno.

$$*(d) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H) = 0.$$

¿En qué situaciones existen soluciones?

$$(e) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, H) = 0.$$

8.6.2. La solución de (8.6.6),

$$\frac{d^2 b_n}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n = q_n(y),$$

sujeta a las condiciones $b_n(0) = 0$ y $b_n(H) = 0$ está dada por (8.6.9).

- Resolver este problema de forma alternativa escribiendo $b_n(y)$ como una serie de Fourier de senos.
- Demostrar que la serie obtenida es equivalente a (8.6.9).
- Demostrar que esta serie es equivalente a la respuesta obtenida por medio de un desarrollo en las autofunciones bidimensionales (8.6.11).

8.6.3. Resolver (usando autofunciones bidimensionales) la ecuación $\nabla^2 u = Q(r, \theta)$ dentro de un círculo de radio a , sujeta a las condiciones de contorno siguientes. ¿En qué casos existe solución?

$$\begin{array}{ll} * \text{ (a) } u(a, \theta) = 0, & \text{(b) } \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = 0, \\ \text{(c) } u(a, \theta) = f(\theta), & \text{(d) } \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) = g(\theta). \end{array}$$

8.6.4. Resolver el Ejercicio 8.6.3 usando autofunciones unidimensionales.

8.6.5. Considérese la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = Q(x, y)$$

dentro de una región sin especificar, con $u = 0$ sobre la frontera. Supongamos que son conocidas las autofunciones $\nabla^2 \phi = -\lambda \phi$, sujetas a la condición $\phi = 0$ sobre la frontera. Encontrar $u(x, y)$.

***8.6.6.** Resolver el siguiente ejemplo de ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = e^{2y} \operatorname{sen} x,$$

sujeta a las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{array}{ll} u(0, y) = 0, & u(x, 0) = 0, \\ u(\pi, y) = 0, & u(x, L) = f(x). \end{array}$$

8.6.7. Resolver la ecuación

$$\nabla^2 u = Q(x, y, z)$$

dentro de una caja rectangular ($0 < x < L$, $0 < y < H$, $0 < z < W$), sujeta a la condición $u = 0$ sobre los seis lados.

8.6.8. Resolver la ecuación

$$\nabla^2 u = Q(r, \theta, z)$$

dentro de un cilindro circular ($0 < r < a$, $0 < \theta < 2\pi$, $0 < z < H$), sujeta a la condición $u = 0$ sobre la frontera.

8.6.9. Considérese la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = Q(x, y)$$

sobre un rectángulo ($0 < x < L$, $0 < y < H$), con la condición $\nabla u \cdot \hat{n} = 0$ sobre la frontera.

(a) Demostrar que existe una solución sólo si $\iint Q(x, y) dx dy = 0$. Explíquense brevemente los motivos usando un razonamiento físico.

(b) Resolver el problema usando el método de desarrollo en autofunciones. Comparar con el apartado (a). *Indicación:* $\lambda = 0$ es un autovalor.

- (c) Si $\iint Q \, dx \, dy = 0$, determinar la constante arbitraria que aparece en la solución del apartado (b) considerando el problema dependiente del tiempo $\frac{\partial u}{\partial t} = k(\nabla^2 u - Q)$, sujeto a la condición inicial $u(x, y, 0) = g(x, y)$.

8.6.10. Rehacer el Ejercicio 8.6.9 para el caso de una región bidimensional arbitraria.

Capítulo 9

Funciones de Green para problemas independientes del tiempo

9.1. Introducción

Las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales lineales son no nulas gracias a las condiciones iniciales, condiciones de contorno no homogéneas y términos de forzamiento. Si la ecuación en derivadas parciales es homogénea y existe un conjunto de condiciones de contorno homogéneas, entonces generalmente intentaremos resolver el problema por separación de variables. En el Capítulo 8 introdujimos el método del desarrollo en autofunciones para obtener soluciones en los casos en que había términos de forzamiento (y/o condiciones de contorno no homogéneas).

En este capítulo consideraremos primordialmente problemas sin condiciones iniciales (ecuaciones diferenciales ordinarias y la ecuación de Laplace sin fuentes) y mostraremos que existe una función asociada a cada problema que se llama función de Green y que puede usarse para describir la influencia tanto de las condiciones de contorno no homogéneas como de los términos de forzamiento. Veremos las propiedades de estas funciones de Green y mostraremos métodos directos para obtenerlas. Los problemas que dependen del tiempo y con condiciones iniciales, tales como las ecuaciones de ondas y del calor, son más difíciles. Usaremos estos problemas como motivación, pero el estudio detallado de sus funciones de Green no se realizará hasta el Capítulo 11.

9.2. Ecuación del calor unidimensional

Comencemos analizando de nuevo la ecuación del calor unidimensional sin fuentes y con condiciones de contorno homogéneas:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},} \quad (9.2.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (9.2.2)$$

$$u(L, t) = 0, \quad (9.2.3)$$

$$u(x, 0) = g(x). \quad (9.2.4)$$

En el Capítulo 2 obtuvimos, usando el método de separación de variables, que

$$\boxed{u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t},} \quad (9.2.5)$$

donde, por la condición inicial, los a_n son los coeficientes de la serie de Fourier de senos de $g(x)$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (9.2.6)$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.} \quad (9.2.7)$$

Examinemos con más detenimiento esta solución (9.2.5) con objeto de investigar los efectos de la condición inicial $g(x)$. Sustituyamos los coeficientes (9.2.7) de la serie de Fourier de senos (introduciendo una variable de integración muda, x_0) en (9.2.5):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_0^L g(x_0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} dx_0 \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

Si intercambiamos el orden de las operaciones de sumación infinita y de integración, obtenemos

$$u(x, t) = \int_0^L g(x_0) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right) dx_0. \quad (9.2.8)$$

Definimos la cantidad entre paréntesis como la **función de influencia** para la condición inicial. Esta función expresa el hecho de que la temperatura en la posición x en tiempo t depende de la temperatura inicial en x_0 , ya que para obtener la temperatura $u(x, t)$ debemos sumar (integrar) las influencias de todas las posiciones iniciales posibles.

Antes de obtener consecuencias adicionales de este resultado, es útil realizar un análisis similar de una ecuación del calor más general que incluye fuentes, pero que todavía tiene condiciones de contorno homogéneas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \quad (9.2.9)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (9.2.10)$$

$$u(L, t) = 0, \quad (9.2.11)$$

$$u(x, 0) = g(x). \quad (9.2.12)$$

Este problema no homogéneo es adecuado para utilizar el método del desarrollo en autofunciones,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (9.2.13)$$

Podemos derivar término a término esta serie de Fourier de senos, ya que tanto $\operatorname{sen} n\pi x/L$ como $u(x, t)$ verifican las mismas condiciones de contorno homogéneas. Por tanto, $a_n(t)$ es solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{da_n}{dt} + k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 a_n = q_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L Q(x, t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (9.2.14)$$

donde $q_n(t)$ son los coeficientes de la serie de Fourier de senos de $Q(x, t)$,

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (9.2.15)$$

Usando ahora el factor integrante $e^{k(n\pi/L)^2 t}$, vemos que la solución de (9.2.14) es

$$a_n(t) = a_n(0)e^{-k(n\pi/L)^2 t} + e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^t q_n(t_0)e^{k(n\pi/L)^2 t_0} dt_0. \quad (9.2.16)$$

donde $a_n(0)$ son los coeficientes de la serie de Fourier de senos de la condición inicial, $u(x, 0) = g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (9.2.17)$$

$$a_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (9.2.18)$$

Sustituyendo estos coeficientes de Fourier en (9.2.16), obtenemos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{L} \int_0^L g(x_0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} dx_0 \right) e^{-k(n\pi/L)^2 t} + e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^t \left(\frac{2}{L} \int_0^L Q(x_0, t_0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} dx_0 \right) e^{k(n\pi/L)^2 t_0} dt_0 \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Tras intercambiar el orden en que realizamos la suma infinita y la integración, queda

$$u(x, t) = \int_0^L g(x_0) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right) dx_0 + \int_0^L \int_0^t Q(x_0, t_0) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 (t-t_0)} \right) dt_0 dx_0.$$

Si introducimos ahora la **función de Green**, $G(x, t; x_0, t_0)$,

$$G(x, t; x_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 (t-t_0)}, \quad (9.2.19)$$

la expresión anterior se puede escribir como

$$u(x, t) = \int_0^L g(x_0) G(x, t; x_0, 0) dx_0 + \int_0^L \int_0^t Q(x_0, t_0) G(x, t; x_0, t_0) dt_0 dx_0. \quad (9.2.20)$$

La función de Green en $t_0 = 0$, $G(x, t; x_0, 0)$, refleja la influencia de la temperatura inicial en x_0 sobre la temperatura en la posición x y el tiempo t . Además, $G(x, t; x_0, t_0)$ muestra la influencia de la temperatura en la posición x y el tiempo t del término de forzamiento $Q(x_0, t_0)$ en la posición x_0 y el tiempo t_0 . Observemos que, en lugar de depender del tiempo fuente t_0 y del tiempo de respuesta t , de forma independiente, la función de Green depende sólo del **tiempo transcurrido** $t - t_0$:

$$G(x, t; x_0, t_0) = G(x, t - t_0; x_0, 0).$$

Esto es así porque los coeficientes de la ecuación del calor son constantes en el tiempo; las leyes de la física termal no cambian al pasar el tiempo. La función de Green decae exponencialmente con el tiempo transcurrido $(t - t_0)$ [véase (9.2.19)]. Esto significa, por ejemplo, que la influencia de la fuente en el tiempo t_0 disminuye rápidamente. Sólo las fuentes más recientes de energía térmica son importantes en el tiempo t .

La Ecuación (9.2.19) constituye una representación extremadamente útil de la función de Green si el tiempo t es grande. Sin embargo, para t pequeño, la serie converge más lentamente. En el Capítulo 11 obtendremos una representación alternativa de la función de Green que será útil para t pequeño.

Observemos que en (9.2.20) integramos sobre todas las posiciones x_0 . La solución es el resultado de sumar las influencias de todas las fuentes y temperaturas iniciales. También integramos las fuentes sobre todos los tiempos *pasados*, $0 < t_0 < t$. Este hecho es parte del **principio de causalidad**: la temperatura en tiempo t se debe sólo a las fuentes térmicas que actuaban *antes* del tiempo t . Ninguna fuente futura de energía calorífica puede influir en la temperatura actual.

Entre otras, investigaremos las siguientes cuestiones para éste y otros problemas:

1. ¿Existen métodos más directos de obtener la función de Green?
2. ¿Existen expresiones más sencillas para ella?, es decir, ¿podemos simplificar (9.2.19)?
3. ¿Se puede explicar la relación entre la influencia de la condición inicial y la influencia de los términos de forzamiento?
4. ¿Podremos estudiar fácilmente el caso de condiciones de contorno no homogéneas mediante el uso de la función de Green?

EJERCICIOS 9.2

9.2.1. Considérese el problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \\ u(x, 0) &= g(x).\end{aligned}$$

En los siguientes apartados, con las condiciones de contorno prescritas y los métodos indicados en cada uno de ellos, obtener una fórmula de representación similar a (9.2.20), identificando la función de Green adecuada.

- (a) Usar la fórmula de Green en lugar de la diferenciación término a término en la variable espacial, si

$$u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(L, t) = 0.$$

- (b) Modificar el apartado (a) si

$$u(0, t) = A(t) \quad \text{y} \quad u(L, t) = B(t).$$

No se debe reducir a un problema con condiciones de contorno homogéneas.

(c) Aplicar cualquier método si las condiciones son

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$$

*(d) Usar la fórmula de Green en lugar de la diferenciación término a término si

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = A(t) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = B(t).$$

9.2.2. Resolver por el método de desarrollo en autofunciones la ecuación

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q(x, t),$$

sujeta a las condiciones $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$ y $u(x, 0) = g(x)$, si $c\rho$ y K_0 son funciones de x . Supóngase que las autofunciones son conocidas. Obtener una fórmula de representación similar a (9.2.20) identificando la función de Green.

***9.2.3.** Resolver por el método de desarrollo en autofunciones el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \\ u(0, t) = 0 & \quad u(x, 0) = f(x), \\ u(L, t) = 0 & \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \end{aligned}$$

Definir funciones (del modo más sencillo posible) tales que exista una relación similar a (9.2.20). La fórmula obtenida debe ser algo diferente debido a las dos condiciones iniciales. *Indicación:* véase el Ejercicio 8.5.1.

9.2.4. Modificar el Ejercicio 9.2.3 (usando la fórmula de Green si es necesario) si las condiciones de contorno se sustituyen por:

- (a) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$.
- (b) $u(0, t) = A(t)$ y $u(L, t) = 0$.
- (c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = B(t)$.

9.3. Función de Green para problemas de contorno en ecuaciones diferenciales

9.3.1. Ecuación del calor estacionaria unidimensional

Introducción. No es tarea fácil investigar las funciones de Green para la ecuación del calor dependiente del tiempo. En su lugar, investigaremos primero un

problema más simple, ya que la mayoría de las técnicas que discutiremos serán también válidas para problemas más difíciles.

Estudiaremos la ecuación del calor estacionaria con condiciones de contorno homogéneas cuando el término de fuente $Q(x, t) = Q(x)$ no depende del tiempo:

$$0 = k \frac{d^2 u}{dx^2} + Q(x).$$

Es preferible escribir esta ecuación en la forma

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)}, \tag{9.3.1}$$

donde $f(x) = -Q(x)/k$. Las condiciones de contorno que vamos a considerar son

$$\boxed{u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(L) = 0}. \tag{9.3.2}$$

Resolveremos a continuación este problema de muchas maneras distintas con el objetivo de que ello nos sugiera métodos para abordar otros problemas más difíciles.

Límite de problemas dependientes del tiempo. Una forma de resolver (9.3.1) (no la más obvia ni la más fácil) consiste en analizar la solución (9.2.20), obtenida en la sección precedente, del problema dependiente del tiempo, en el caso especial de una fuente estacionaria:

$$u(x, t) = \int_0^L g(x_0) G(x, t; x_0, 0) dx_0 + \int_0^L -kf(x_0) \left(\int_0^t G(x, t; x_0, t_0) dt_0 \right) dx_0, \tag{9.3.3}$$

donde

$$G(x, t; x_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)}. \tag{9.3.4}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, $G(x, t; x_0, 0) \rightarrow 0$, de forma que el efecto de la condición inicial $u(x, 0) = g(x)$ tiende a anularse. Sin embargo, incluso aunque $G(x, t; x_0, t_0) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, la fuente estacionaria es todavía importante para t grande, puesto que

$$\int_0^t e^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)} dt_0 = \frac{e^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)}}{k(n\pi/L)^2} \Big|_{t_0=0}^t = \frac{1 - e^{-k(n\pi/L)^2 t}}{k(n\pi/L)^2}.$$

Por tanto, cuando $t \rightarrow \infty$,

$$u(x, t) \rightarrow \boxed{u(x) = \int_0^L f(x_0) G(x, x_0) dx_0}, \tag{9.3.5}$$

donde

$$G(x, x_0) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \frac{\text{sen } n\pi x_0/L \text{ sen } n\pi x/L}{(n\pi/L)^2}. \quad (9.3.6)$$

Así pues, hemos obtenido la distribución de temperatura estacionaria $u(x)$ tomando el límite cuando $t \rightarrow \infty$ del problema dependiente del tiempo con una fuente estacionaria $Q(x) = -kf(x)$. La función $G(x, x_0)$ representa la **función de influencia** o **función de Green** para el problema estacionario. Destaquemos que se verifica la propiedad de simetría

$$G(x, x_0) = G(x_0, x),$$

que discutiremos más adelante.

9.3.2. El método de variación de los parámetros

Existe una forma más directa de obtener la solución del problema (9.3.1) - (9.3.2). Consideremos un problema no homogéneo más general

$$L(u) = f(x), \quad (9.3.7)$$

definido para $a < x < b$ y sujeto a dos condiciones de contorno homogéneas (del tipo estándar que se discutió en el Capítulo 5), donde L es el operador de Sturm-Liouville:

$$L \equiv \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q. \quad (9.3.8)$$

En el caso de la sencilla ecuación del calor estacionaria de la subsección precedente, $p = 1$ y $q = 0$, con lo que $L = d^2/dx^2$.

Podemos siempre resolver ecuaciones diferenciales lineales ordinarias y no homogéneas usando el **método de variación de los parámetros** si se conocen dos soluciones¹ del problema homogéneo, $u_1(x)$ y $u_2(x)$. Repasemos brevemente esta técnica: en el método de variación de los parámetros buscamos una solución particular de (9.3.7) que tenga la forma

$$u = v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2, \quad (9.3.9)$$

donde v_1 y v_2 son funciones de x que debemos determinar. La ecuación diferencial original tiene una función desconocida, con lo que el grado de libertad extra nos permite suponer que du/dx se puede obtener como si v_1 y v_2 fueran constantes:

$$\frac{du}{dx} = v_1 \frac{du_1}{dx} + v_2 \frac{du_2}{dx}.$$

¹En realidad, sólo es necesario encontrar una solución homogénea, ya que el método de reducción del orden proporciona un procedimiento para obtener una segunda solución homogénea si se conoce una.

Pero como v_1 y v_2 no son constantes, esto puede ser cierto sólo si los otros términos, que se deben a la variación de v_1 y v_2 , se anulan:

$$\frac{dv_1}{dx}u_1 + \frac{dv_2}{dx}u_2 = 0.$$

Entonces, la ecuación diferencial $L(u) = f(x)$ se satisface si

$$\frac{dv_1}{dx}p \frac{du_1}{dx} + \frac{dv_2}{dx}p \frac{du_2}{dx} = f(x).$$

Por tanto, el método de variación de los parámetros nos proporciona un sistema de dos ecuaciones lineales para las funciones desconocidas dv_1/dx y dv_2/dx . La solución es

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{-fu_2}{p \left(u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx} \right)} = \frac{-fu_2}{c}, \quad (9.3.10)$$

$$\frac{dv_2}{dx} = \frac{fu_1}{p \left(u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx} \right)} = \frac{fu_1}{c}, \quad (9.3.11)$$

donde

$$c = p \left(u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx} \right). \quad (9.3.12)$$

Probaremos, usando el wronskiano que describiremos a continuación brevemente, que c es constante. El valor de la constante c depende de la elección de las soluciones homogéneas u_1 y u_2 . La solución particular de $L(u) = f(x)$ viene dada por $u = u_1v_1 + u_2v_2$, donde v_1 y v_2 se obtienen por integración de (9.3.10) y (9.3.11).

Wronskiano. Definimos el **wronskiano** W como

$$W = u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx}.$$

El wronskiano satisface una ecuación diferencial elemental:

$$\frac{dW}{dx} = u_1 \frac{d^2u_2}{dx^2} - u_2 \frac{d^2u_1}{dx^2} = -\frac{dp/dx}{p} \left(u_1 \frac{du_2}{dx} - u_2 \frac{du_1}{dx} \right) = -\frac{dp/dx}{p}W, \quad (9.3.13)$$

donde hemos usado las ecuaciones diferenciales que definen las soluciones homogéneas $L(u_1) = 0$ y $L(u_2) = 0$. La resolución de (9.3.13) prueba que

$$W = \frac{c}{p}, \quad \text{es decir,} \quad pW = c.$$

Ejemplo. Consideremos el problema (9.3.1) - (9.3.2):

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad \text{con} \quad u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(L) = 0,$$

que corresponde al caso general (9.3.7) con $p = 1$ y $q = 0$. Es claro que las funciones 1 y x son dos soluciones homogéneas de (9.3.1). Sin embargo, el cálculo es más fácil si escogemos $u_1(x)$ de modo que sea una solución homogénea que satisfaga además una de las condiciones de contorno $u(0) = 0$ y $u_2(x)$ de modo que sea también una solución homogénea pero que satisfaga la otra condición de contorno:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x, \\ u_2(x) &= L - x. \end{aligned}$$

Puesto que $p = 1$, tenemos que $c = -L$ a partir de (9.3.12). Integrando (9.3.10) y (9.3.11), obtenemos

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \frac{1}{L} \int_0^x f(x_0)(L - x_0) dx_0 + c_1, \\ v_2(x) &= -\frac{1}{L} \int_0^x f(x_0)x_0 dx_0 + c_2, \end{aligned}$$

los coeficientes necesarios en el método de variación de los parámetros ($u = u_1v_1 + u_2v_2$). La condición de contorno $u(0) = 0$ nos dice que $0 = c_2L$, mientras que $u(L) = 0$ implica que

$$0 = \int_0^L f(x_0)(L - x_0) dx_0 + c_1L,$$

de modo que $v_1(x) = -\frac{1}{L} \int_x^L f(x_0)(L - x_0) dx_0$. Por tanto, la solución del problema no homogéneo de valores en la frontera es

$$u(x) = -\frac{x}{L} \int_x^L f(x_0)(L - x_0) dx_0 - \frac{L - x}{L} \int_0^x f(x_0)x_0 dx_0. \quad (9.3.14)$$

Escribamos ahora (9.3.14) en la forma deseada,

$$u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x, x_0) dx_0. \quad (9.3.15)$$

Comparando (9.3.14) con (9.3.15), vemos que debemos poner

$$G(x, x_0) = \begin{cases} \frac{-x(L - x_0)}{L} & x < x_0, \\ \frac{-x_0(L - x)}{L} & x > x_0. \end{cases} \quad (9.3.16)$$

Esbozaremos e interpretaremos esta solución en la Sección 9.3.5. Podemos apreciar de nuevo la simetría:

$$G(x, x_0) = G(x_0, x).$$

Así pues, hemos obtenido dos funciones de Green, (9.3.6) y (9.3.16), para la ecuación del calor estacionaria. Parecen bastante diferentes, pero el Ejercicio 9.3.1 prueba que son la misma. En particular, (9.3.16) proporciona una función suave a trozos (en realidad es continua) y puede probarse que su serie de Fourier de senos es (9.3.6).

También puede obtenerse la solución integrando directamente (9.3.1) dos veces:

$$u = \int_0^x \left[\int_0^{x_0} f(\bar{x}) d\bar{x} \right] dx_0 + c_1x + c_2. \tag{9.3.17}$$

En el Ejercicio 9.3.2. se pide obtener (9.3.16) a partir de (9.3.17). Esto puede conseguirse intercambiando el orden de integración en (9.3.17) o integrando por partes.

9.3.3. El método del desarrollo en autofunciones para funciones de Green

En el Capítulo 8 resolvimos ecuaciones en derivadas parciales no homogéneas usando el método del desarrollo en autofunciones. Veremos ahora cómo aplicar las mismas ideas al caso general de una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de Sturm-Liouville:

$$L(u) = f(x), \tag{9.3.18}$$

sujeta a dos condiciones de contorno homogéneas. Introduzcamos un problema de autovalores asociado,

$$L(\phi) = -\lambda\sigma\phi, \tag{9.3.19}$$

sujeito a las *mismas* condiciones de contorno homogéneas, donde elegiremos el peso σ de forma arbitraria. En general, existe como mínimo una elección de $\sigma(x)$ tal que la ecuación diferencial (9.3.19) es de hecho bien conocida². Vamos a resolver (9.3.18) buscando que $u(x)$ sea una serie de Fourier generalizada de las autofunciones

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x). \tag{9.3.20}$$

Podemos derivar dos veces término a término³, puesto que ambas, $\phi_n(x)$ y $u(x)$, verifican las mismas condiciones de contorno homogéneas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n L(\phi_n) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \sigma \phi_n = f(x),$$

²Por ejemplo, si $L = d^2/dx^2$, escogemos $\sigma = 1$, con lo que obtendremos funciones trigonométricas, pero si $L = \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) - \frac{m^2}{x}$, escogemos $\sigma = x$, de modo que se obtienen funciones de Bessel.

³Se puede usar la fórmula de Green para justificar este paso (véase la Sección 8.4).

donde hemos usado (9.3.19). La ortogonalidad de las autofunciones (respecto del peso σ) implica que

$$-a_n \lambda_n = \frac{\int_a^b f(x) \phi_n dx}{\int_a^b \phi_n^2 \sigma dx}. \quad (9.3.21)$$

La solución del problema de contorno para la ecuación diferencial ordinaria no homogénea es por tanto (tras intercambiar el orden de sumación e integración)

$$u(x) = \int_a^b f(x_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x) \phi_n(x_0)}{-\lambda_n \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx} dx_0. \quad (9.3.22)$$

Así pues, para este problema, la función de Green tiene la siguiente representación en términos de las autofunciones:

$$G(x, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x) \phi_n(x_0)}{-\lambda_n \int_a^b \phi_n^2 \sigma dx}. \quad (9.3.23)$$

Obsérvese, de nuevo, la simetría de la función de Green y la aparición de los autovalores λ_n en el denominador: no existe la función de Green si uno de los autovalores es cero. Explicaremos este hecho en la Sección 9.4 pero, por ahora, supondremos que todos los λ_n son no nulos.

Ejemplo. En el caso del problema de contorno

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= f(x), \\ u(0) &= 0 \quad \text{y} \quad u(L) = 0, \end{aligned}$$

el problema de autovalores asociado es bien conocido,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{dx^2} &= -\lambda \phi, \\ \phi(0) &= 0 \quad \text{y} \quad \phi(L) = 0. \end{aligned}$$

Los autovalores son $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, y las correspondientes autofunciones son $\sin n\pi x/L$. La serie de Fourier de senos de $u(x)$ viene dada por (9.3.20). En particular,

$$u(x) = \int_0^L f(x_0) G(x, x_0) dx_0,$$

donde, a partir de (9.3.23), vemos que la serie de Fourier de senos de la función de Green es

$$G(x, x_0) = -\frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/L) \sin(n\pi x_0/L)}{(n\pi/L)^2},$$

lo que coincide con la Fórmula (9.3.6) que se obtuvo por paso al límite cuando $t \rightarrow \infty$ del problema dependiente del tiempo.

9.3.4. La “función” delta de Dirac y su relación con la función de Green

Hemos probado que

$$u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x, x_0) dx_0,$$

y hemos obtenido diferentes representaciones de la función de Green. Recordemos que la función de Green refleja la influencia de cada posición x_0 de la fuente sobre la solución en x . En esta sección encontraremos una forma más directa de determinar la función de Green.

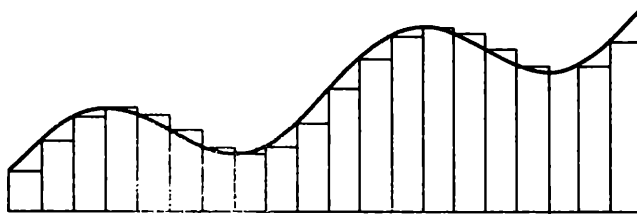


Figura 9.3.1: Representación constante a trozos de una función.

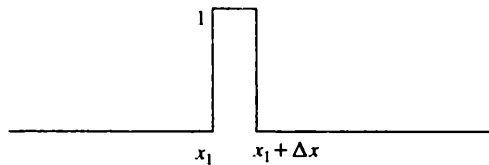


Figura 9.3.2: Pulso con altura 1.

Delta de Dirac. Nuestra fuente $f(x)$ representa una fuerza aplicada a nuestro sistema en todos los puntos. Con objeto de aislar el efecto de cada punto individual, descomponemos $f(x)$ en una combinación lineal de pulsos unidad de duración Δx (véanse las Figura 9.3.1 y 9.3.2):

$$f(x) \approx \sum_i f(x_i)(\text{pulso unidad que comienza en } x = x_i),$$

lo que recuerda la definición de integral. En esta expresión no aparece Δx , así que multiplicando y dividiendo por Δx :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) \frac{\text{pulso unidad}}{\Delta x} \Delta x. \tag{9.3.24}$$

En la Figura 9.3.3 se representa un pulso rectangular de anchura Δx y altura $1/\Delta x$ que, por tanto, tiene área unidad. En el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, este pulso se aproxima a otro infinitamente concentrado [que realmente no es una función, y que

denotamos por $\delta(x - x_i)$], que debería ser cero en todas partes, excepto ∞ en $x = x_i$, pero todavía con área unidad:

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 0 & x \neq x_i, \\ \infty & x = x_i, \end{cases} \quad (9.3.25)$$

Podemos pensar en $\delta(x - x_i)$ como una **fuerza concentrada** en el único punto $x = x_i$. De acuerdo con (9.3.24), tenemos

$$f(x) = \int f(x_i)\delta(x - x_i) dx_i. \quad (9.3.26)$$

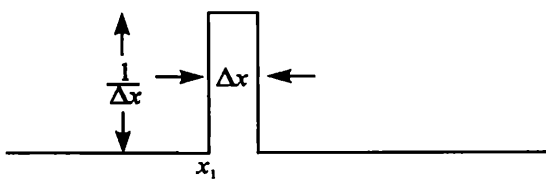


Figura 9.3.3: Pulso rectangular con área unidad.

Puesto que $\delta(x - x_i)$ no es una función, la definimos como un operador con la propiedad de que para cualquier función continua $f(x)$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_i)\delta(x - x_i) dx_i, \quad (9.3.27)$$

como sugiere (9.3.26). Llamamos a $\delta(x - x_i)$ **delta de Dirac**⁴. Está tan concentrada que, al integrarla con cualquier función continua $f(x_i)$, la “filtra” para devolver el valor de ésta en $x_i = x$. Se puede motivar la introducción de la delta de Dirac como una “función límite” de cualquier sucesión de pulsos concentrados (cuya forma no tiene por qué ser rectangular).

Otras propiedades importantes de la delta de Dirac son: que tiene área unidad,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_i) dx_i, \quad (9.3.28)$$

que es par,

$$\delta(x - x_i) = \delta(x_i - x), \quad (9.3.29)$$

lo que significa que podemos usar la definición (9.3.27) sin preocuparnos de si aparece $\delta(x - x_i)$ ó $\delta(x_i - x)$; la delta de Dirac es también la derivada de la función de salto de Heaviside, $H(x - x_i)$,

$$H(x - x_i) \equiv \begin{cases} 0 & x < x_i, \\ 1 & x > x_i, \end{cases} \quad (9.3.30)$$

⁴Se llama así en honor de Paul Dirac, un físico-matemático del siglo XX (1902-1984).

$$\delta(x - x_i) = \frac{d}{dx} H(x - x_i), \quad (9.3.31)$$

$$H(x - x_i) = \int_{-\infty}^x \delta(x_0 - x_i) dx_0. \quad (9.3.32)$$

Finalmente, tiene la siguiente propiedad de cambio de escala:

$$\delta[c(x - x_i)] = \frac{1}{|c|} \delta(x - x_i). \quad (9.3.33)$$

En los ejercicios se pide probar estas propiedades.

Función de Green. La solución del problema no homogéneo

$$L(u) = f(x), \quad (9.3.34)$$

sujeta a dos condiciones de contorno homogéneas es

$$u(x) = \int_a^b f(x_0) G(x, x_0) dx_0. \quad (9.3.35)$$

Aquí, la función de Green es la función de influencia sobre la fuente $f(x)$. A modo de ejemplo, supongamos que $f(x)$ es una fuente concentrada en $x = x_s$, es decir $f(x) = \delta(x - x_s)$. Entonces, la respuesta $u(x)$, en cada punto x , satisface

$$u(x) = \int_a^b \delta(x_0 - x_s) G(x, x_0) dx_0 = G(x, x_s),$$

gracias a (9.3.27). Este hecho nos proporciona la interpretación más importante de la **función de Green** $G(x, x_s)$: *es la respuesta en x debida a la fuente concentrada en x_s* , es decir

$$L[G(x, x_s)] = \delta(x - x_s), \quad (9.3.36)$$

donde $G(x, x_s)$ también satisfará las mismas condiciones de contorno homogéneas en $x = a$ y $x = b$.

Como comprobación, verifiquemos que (9.3.35) satisface (9.3.34). Para ello, debemos usar el operador L (en el caso más sencillo, $L = d^2/dx^2$):

$$L(u) = \int_a^b f(x_0) L[G(x, x_0)] dx_0 = \int_a^b f(x_0) \delta(x - x_0) dx_0 = f(x),$$

donde hemos usado la propiedad fundamental de la función de Green (9.3.36) y de la delta de Dirac (9.3.27).

Es frecuente pensar en (9.3.36) con dos condiciones de contorno homogéneas como una *definición independiente de la función de Green*. En este caso, podríamos querer *deducir* (9.3.35), la representación de la solución del problema no homogéneo, en términos de la función de Green, que satisface (9.3.36). El método habitual de deducir (9.3.35) involucra la fórmula de Green:

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b. \quad (9.3.37)$$

Si hacemos $v = G(x, x_0)$, entonces el miembro derecho se anula, puesto que tanto $u(x)$ como $G(x, x_0)$ verifican las mismas condiciones de contorno homogéneas. Además, a partir de las ecuaciones diferenciales respectivas (9.3.34) y (9.3.36), se sigue que

$$\int_a^b [u(x)\delta(x - x_0) - G(x, x_0)f(x)] dx = 0.$$

Por tanto, hemos deducido a partir de la definición de la delta de Dirac que

$$u(x_0) = \int_a^b f(x)G(x, x_0) dx.$$

Si intercambiamos ahora las variables x y x_0 , obtenemos (9.3.35):

$$u(x) = \int_a^b f(x_0)G(x_0, x) dx_0 = \int_a^b f(x_0)G(x, x_0) dx_0, \quad (9.3.38)$$

ya que sabemos que la función de Green es simétrica, $G(x_0, x) = G(x, x_0)$, véase (9.3.16).

Ley de reciprocidad de Maxwell. La simetría de la función de Green es una propiedad muy importante. Vamos a demostrarla ahora sin usar el desarrollo en autofunciones. Por el contrario, usaremos directamente la ecuación diferencial que define la función de Green, (9.3.36). Usemos de nuevo la fórmula de Green (9.3.37), poniendo $u = G(x, x_1)$ y $v = G(x, x_2)$. Como ambas funciones verifican las mismas condiciones homogéneas de contorno, se sigue que el miembro derecho deber ser cero. Además, $L(u) = \delta(x - x_1)$, mientras que $L(v) = \delta(x - x_2)$, con lo que

$$\int_a^b [G(x, x_1)\delta(x - x_2) - G(x, x_2)\delta(x - x_1)] dx = 0.$$

Así, de la propiedad fundamental de la delta de Dirac, se sigue que

$$\boxed{G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1)}, \quad (9.3.39)$$

lo que prueba la simetría a partir de la ecuación diferencial que define la función de Green. Esta simetría es una propiedad notable; se le llama **ley de reciprocidad de Maxwell**: la respuesta en x debida a una fuente concentrada en x_0 es la misma que la respuesta en x_0 debida a una fuente concentrada en x . Este hecho *no* es obvio físicamente.

Condiciones de salto. Veamos ahora cómo determinar la función de Green $G(x, x_s)$ a partir de (9.3.36). Para $x < x_s$, $G(x, x_s)$ debe ser una solución homogénea que verifique la condición de contorno homogénea en $x = a$ y tenemos una situación similar para $x > x_s$. Las condiciones de salto en $x = x_s$ se determinan a partir de la singularidad en la Ecuación (9.3.36). Si $G(x, x_s)$ tuviera una discontinuidad de salto en $x = x_s$, entonces dG/dx tendría una singularidad del tipo de la función delta en $x = x_s$, y d^2G/dx^2 debería ser aún más singular que el miembro derecho de (9.3.36). Por tanto, **la función de Green $G(x, x_s)$ es continua en $x = x_s$** . Sin embargo, dG/dx no es continua en $x = x_s$; tiene una discontinuidad de salto que se obtiene integrando (9.3.36) a ambos lados de $x = x_s$. Ilustraremos este método en el ejemplo siguiente y dejaremos las discusiones adicionales para los ejercicios.

Ejemplo. Consideremos la solución del problema de flujo de calor estacionario:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} &= f(x), \\ u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(L) &= 0. \end{aligned} \tag{9.3.40}$$

Hemos probado que podemos representar la solución en términos de la función de Green:

$$u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x, x_0) dx_0, \tag{9.3.41}$$

donde esta función de Green satisface el problema siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2G(x, x_0)}{dx^2} &= \delta(x - x_0), \\ G(0, x_0) = 0 \quad \text{y} \quad G(L, x_0) &= 0. \end{aligned} \tag{9.3.42}$$

Una razón para definir la función de Green por medio de la ecuación diferencial es que esto nos proporciona una forma alternativa (y con frecuencia más fácil) de calcularla. Aquí, x_0 es un parámetro que representa la posición de una fuente concentrada. Como para $x \neq x_0$ no hay fuentes, la distribución de calor estacionaria.

$G(x, x_0)$, debe ser lineal ($d^2G/dx^2 = 0$):

$$G(x, x_0) = \begin{cases} a + bx & x < x_0, \\ c + dx & x > x_0, \end{cases}$$

para ciertas constantes a, b, c y d . Aplicando la condición de contorno en $x = 0$ para $x < x_0$, tenemos $G(0, x_0) = 0$, lo que implica $a = 0$. De modo similar, $G(L, x_0) = 0$ implica que $c + dL = 0$. Así

$$G(x, x_0) = \begin{cases} bx & x < x_0, \\ d(x - L) & x > x_0. \end{cases}$$

Esbozamos este resultado preliminar en la Figura 9.3.4.

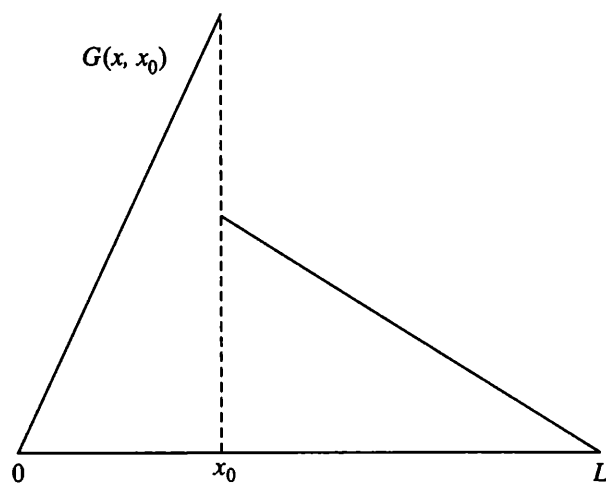


Figura 9.3.4: La función de Green antes de la aplicación de las condiciones de salto en $x = x_0$.

Las dos constantes restantes se determinan por medio de otras dos condiciones en $x = x_0$. La temperatura $G(x, x_0)$ debe ser una función continua en $x = x_0$,

$$G(x_0-, x_0) = G(x_0+, x_0), \quad (9.3.43)$$

y existe un salto en la derivada de $G(x, x_0)$, lo que se obtiene más fácilmente integrando la ecuación diferencial (9.3.42) desde $x = x_0-$ hasta $x = x_0+$:

$$\left. \frac{dG}{dx} \right|_{x=x_0+} - \left. \frac{dG}{dx} \right|_{x=x_0-} = 1. \quad (9.3.44)$$

La Ecuación (9.3.43) implica que

$$bx_0 = d(x_0 - L),$$

mientras que (9.3.44) se convierte en

$$b - d = -1.$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones, obtenemos

$$d = \frac{x_0}{L} \quad \text{y} \quad b = \frac{x_0 - L}{L},$$

y, por tanto,

$$G(x, x_0) = \begin{cases} -\frac{x}{L}(L - x_0) & x < x_0, \\ -\frac{x_0}{L}(L - x) & x > x_0, \end{cases} \quad (9.3.45)$$

lo que concuerda con (9.3.16). Esbozamos la función de Green en la Figura 9.3.5. La naturaleza negativa de esta función de Green es debida a la fuente concentrada negativa de energía térmica, $-\delta(x - x_0)$, ya que $0 = (d^2G/dx^2)(x, 0) - \delta(x - x_0)$.

La simetría de la función de Green (que se probó antes), está clara en todas las representaciones que hemos obtenido. Por ejemplo, poniendo $L = 1$,

$$G(x, x_0) = \begin{cases} -x(1 - x_0) & x < x_0, \\ -x_0(1 - x) & x > x_0, \end{cases} \quad \text{y} \quad G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right) = G\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{10}.$$

Dibujamos $G(x, \frac{1}{5})$ y $G(x, \frac{1}{2})$ en la Figura 9.3.6. Esta igualdad no puede explicarse por medio de simetrías físicas sencillas.

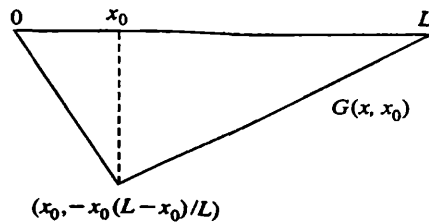


Figura 9.3.5: Función de Green.

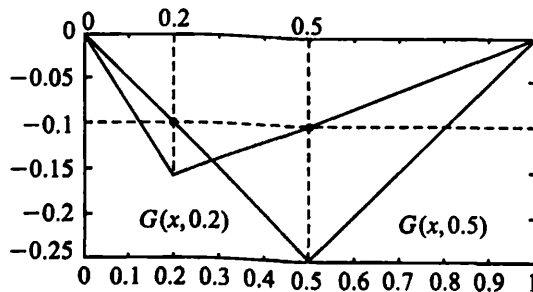


Figura 9.3.6: Ilustración de la ley de reciprocidad de Maxwell.

9.3.5. Condiciones de contorno no homogéneas

Hasta ahora hemos mostrado cómo usar las funciones de Green para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas con condiciones de contorno homogéneas. En esta subsección extenderemos estas mismas ideas con objeto de incluir también problemas con condiciones de contorno no homogéneas:

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x),} \quad (9.3.46)$$

$$\boxed{u(0) = \alpha \quad y \quad u(L) = \beta.} \quad (9.3.47)$$

Usaremos la *misma* función de Green anterior:

$$\boxed{\frac{d^2 G}{dx^2} = \delta(x - x_0),} \quad (9.3.48)$$

$$\boxed{G(0, x_0) = 0 \quad y \quad G(L, x_0) = 0;} \quad (9.3.49)$$

es decir, la función de Green siempre verifica las condiciones de contorno homogéneas asociadas.

Utilizaremos de nuevo la fórmula de Green, con $v = G(x, x_0)$, para obtener la representación de la solución de (9.3.46) - (9.3.47) que involucra a la función de Green:

$$\int_0^L \left[u(x) \frac{d^2 G(x, x_0)}{dx^2} - G(x, x_0) \frac{d^2 u}{dx^2} \right] dx = u \frac{dG(x, x_0)}{dx} - G(x, x_0) \frac{du}{dx} \Big|_0^L.$$

Ahora el miembro derecho no se anula, puesto que $u(x)$ no verifica las condiciones de contorno homogéneas. No obstante, usando solamente las fórmulas (9.3.46) - (9.3.47) que definen nuestro problema y las que definen la función de Green, (9.3.48) - (9.3.49), obtenemos

$$\int_0^L [u(x)\delta(x - x_0) - G(x, x_0)f(x)] dx = u(L) \frac{dG(x, x_0)}{dx} \Big|_{x=L} - u(0) \frac{dG(x, x_0)}{dx} \Big|_{x=0}.$$

Analicemos esto como antes. Aplicando la propiedad de la delta de Dirac, invirtiendo los papeles de x y x_0 , y usando la simetría de la función de Green, obtenemos

$$\boxed{u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x, x_0) dx_0 + \beta \frac{dG(x, x_0)}{dx_0} \Big|_{x_0=L} - \alpha \frac{dG(x, x_0)}{dx_0} \Big|_{x_0=0}.} \quad (9.3.50)$$

Ésta es una fórmula de representación de la solución de nuestro problema no homogéneo (que incluye condiciones de contorno no homogéneas) en términos de la función de Green estándar. Debemos ser cuidadosos al evaluar los términos de frontera. Hemos demostrado ya que, en nuestro problema, la función de Green es

$$G(x, x_0) = \begin{cases} -\frac{x}{L}(L - x_0) & x < x_0, \\ -\frac{x_0}{L}(L - x) & x > x_0. \end{cases}$$

La derivada de la función de Green con respecto a la posición de la fuente es, por tanto,

$$\frac{dG(x, x_0)}{dx_0} = \begin{cases} \frac{x}{L} & x < x_0, \\ -\left(1 - \frac{x}{L}\right) & x > x_0, \end{cases}$$

con lo que, evaluando en los extremos, obtenemos

$$\left. \frac{dG(x, x_0)}{dx_0} \right|_{x_0=L} = \frac{x}{L} \quad \text{y} \quad \left. \frac{dG(x, x_0)}{dx_0} \right|_{x_0=0} = -\left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Consecuentemente,

$$u(x) = \int_0^L f(x_0)G(x, x_0) dx_0 + \beta \frac{x}{L} + \alpha \left(1 - \frac{x}{L}\right). \quad (9.3.51)$$

Por tanto, la solución es la suma de una solución particular de (9.3.40) que satisface las condiciones de contorno homogéneas y que ya fue obtenida anteriormente, $\int_0^L f(x_0)G(x, x_0) dx_0$, y de una solución homogénea que satisface las dos condiciones de contorno no homogéneas exigidas, $\beta(x/L) + \alpha(1 - x/L)$.

9.3.6. Resumen

Hemos descrito tres importantes métodos de obtener funciones de Green:

1. Variación de los parámetros.
2. Método del desarrollo en autofunciones.
3. Utilización de la ecuación diferencial que define a la función de Green.

Además, las funciones de Green estacionarias pueden obtenerse por paso al límite cuando $t \rightarrow \infty$ de la solución con fuentes estacionarias. Discutiremos otro importante método adicional para obtener funciones de Green de ecuaciones en derivadas parciales en la Sección 9.5.

EJERCICIOS 9.3

9.3.1. La función de Green de (9.3.1) viene dada explícitamente por (9.3.16). El método del desarrollo en autofunciones conduce a (9.3.6). Demostrar que la serie de Fourier de senos de (9.3.16) es (9.3.6).

9.3.2. (a) Deducir (9.3.17).

(b) Integrar por partes (9.3.17) para obtener (9.3.16).

(c) Alternativamente al apartado (b), simplificar la integral doble en (9.3.17), intercambiando el orden de integración, y deducir (9.3.16).

9.3.3. Considérese la ecuación del calor con fuentes

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t),$$

sujeta a $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ y $u(x, 0) = g(x)$.

(a) Resolver por el método del desarrollo en autofunciones.

(b) Determinar la función de Green de este problema dependiente del tiempo.

(c) Si $Q(x, t) = Q(x)$, tomar el límite cuando $t \rightarrow \infty$ de la solución del apartado (b) con objeto de determinar la función de Green del problema

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), \quad \text{con } u(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}(L) = 0.$$

9.3.4. (a) Deducir (9.3.28) a partir de (9.3.27). *Indicación:* poner $f(x) = 1$.

(b) Demostrar que (9.3.32) satisface (9.3.30).

(c) Deducir (9.3.29). *Indicación:* demostrar que para cualquier función continua $f(x)$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0) \delta(x - x_0) dx_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0) \delta(x_0 - x) dx_0,$$

haciendo $x_0 - x = s$ en la integral de la derecha.

(d) Deducir (9.3.33). *Indicación:* evaluar $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta[c(x - x_0)] dx$, haciendo el cambio de variables $y = c(x - x_0)$.

9.3.5. Considérese el problema

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), \quad \text{con } u(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}(L) = 0.$$

*(a) Resolver por integración directa.

*(b) Resolver por el método de variación de los parámetros.

*(c) Determinar $G(x, x_0)$ para este problema en la fórmula de representación (9.3.15).

- (d) Resolver por el método del desarrollo en autofunciones. Demostrar que $G(x, x_0)$ viene dada por (9.3.23).

9.3.6. Considérese el problema

$$\frac{d^2 G}{dx^2} = \delta(x - x_0), \quad \text{con } G(0, x_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dG}{dx}(L, x_0) = 0.$$

- *(a) Resolver directamente.
 *(b) Ilustrar gráficamente la identidad $G(x, x_0) = G(x_0, x)$.
 (c) Comparar con el Ejercicio 9.3.5.

9.3.7. Rehacer el Ejercicio 9.3.5 cambiando la condición de contorno en $x = L$ por $\frac{du}{dx}(L) + hu(L) = 0$, $h > 0$.

9.3.8. Hacer la misma cuestión anterior para el Ejercicio 9.3.6.

9.3.9. Considérese el problema

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = f(x), \quad \text{con } u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(L) = 0.$$

Supongamos que $(n\pi/L)^2 \neq 1$ (esto es, que $L \neq n\pi$ para todo n).

- (a) Resolver por el método de variación de los parámetros.
 *(b) Determinar la función de Green que permite representar $u(x)$ mediante (9.3.15).

9.3.10. Resolver el Ejercicio 9.3.9 usando el método del desarrollo en autofunciones.

9.3.11. Considérese el problema

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + G = \delta(x - x_0), \quad \text{con } G(0, x_0) = 0 \quad \text{y} \quad G(L, x_0) = 0.$$

- *(a) Obtener esta función de Green directamente. ¿Por qué es necesario suponer que $L \neq n\pi$?
 (b) Demostrar que $G(x, x_0) = G(x_0, x)$.

9.3.12. Obtener una representación de las soluciones de los siguientes problemas en términos de la función de Green. Demostrar que las condiciones de contorno no homogéneas pueden entenderse usando soluciones homogéneas de la ecuación diferencial:

- (a) $\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$, $u(0) = A$, $\frac{du}{dx}(L) = B$ (véase el Ejercicio 9.3.6).
 (b) $\frac{d^2 u}{dx^2} + u = f(x)$, $u(0) = A$, $u(L) = B$. Supóngase que $L \neq n\pi$ (véase el Ejercicio 9.3.11).

$$(c) \frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), u(0) = A, \frac{du}{dx}(L) + hu(L) = 0 \text{ (véase el Ejercicio 9.3.8).}$$

9.3.13. Considérese la ecuación de ondas unidimensional en toda la recta, con una fuente periódica de frecuencia ω :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + g(x)e^{-i\omega t}. \quad (9.3.52)$$

(a) Demostrar que, si u verifica la ecuación de Helmholtz no homogénea

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = f(x),$$

entonces $\phi = u(x)e^{-i\omega t}$ es una solución particular de (9.3.52).

* (b) La función de Green $G(x, x_0)$ satisface

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + k^2 G = \delta(x - x_0).$$

Determinar esta función de Green de modo que la solución $\phi(x, t)$ correspondiente sea una onda que se propaga alejándose.

(c) Obtener una solución particular de (9.3.52).

9.3.14. Considérese la ecuación $L(u) = f(x)$, con $L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q$. Supongamos que existe una función de Green apropiada. Obtener la fórmula de representación de $u(x)$ en términos de la función de Green si las condiciones de contorno son no homogéneas:

$$(a) u(0) = \alpha \text{ y } u(L) = \beta.$$

$$(b) \frac{du}{dx}(0) = \alpha \text{ y } \frac{du}{dx}(L) = \beta.$$

$$(c) u(0) = \alpha \text{ y } \frac{du}{dx}(L) = \beta.$$

$$*(d) u(0) = \alpha \text{ y } \frac{du}{dx}(L) + hu(L) = \beta.$$

9.3.15. Considérese la ecuación $L(G) = \delta(x - x_0)$, con $L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q$ sujeta a las condiciones de contorno $G(0, x_0) = 0$ y $G(L, x_0) = 0$. Introducir para todo x dos soluciones homogéneas, y_1 e y_2 , tales que cada una de ellas resuelva una de las condiciones de contorno homogéneas:

$$\begin{aligned} L(y_1) &= 0, & L(y_2) &= 0, \\ y_1(0) &= 0, & y_2(L) &= 0, \\ \frac{dy_1}{dx}(0) &= 1, & \frac{dy_2}{dx}(L) &= 1. \end{aligned}$$

Incluso en el caso de que y_1 e y_2 no puedan ser obtenidas explícitamente, sí que pueden ser calculadas fácilmente de manera numérica en un ordenador, como dos *problemas de valores iniciales*. Cualquier otra solución homogénea debe ser una combinación lineal de estas dos.

* (a) Obtener $G(x, x_0)$ en términos de $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Se puede suponer que $y_1(x) \neq cy_2(x)$.

(b) ¿Qué es lo que ocurre si $y_1(x) = cy_2(x)$ para todo x y por qué?

9.3.16. Rehacer el problema (9.3.40), cuya solución ya hemos obtenido en (9.3.45). ¿Cuáles son las soluciones homogéneas, y_1 e y_2 , del Ejercicio 9.3.15 para el problema (9.3.40)? Demostrar que la expresión para $G(x, x_0)$ que se obtiene en el Ejercicio 9.3.15 se reduce a (9.3.45) en el caso del problema (9.3.40).

9.3.17. Considérese el problema

$$L(u) = f(x), \quad \text{con} \quad L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q$$

$$u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(L) = 0.$$

Introducir dos soluciones homogéneas, y_1 e y_2 , como en el Ejercicio 9.3.15.

(a) Obtener $u(x)$ usando el método de variación de los parámetros.

(b) Determinar la función de Green a partir de la expresión de la solución obtenida en el apartado (a).

(c) Comparar con el Ejercicio 9.3.15.

9.3.18. Rehacer el Ejercicio 9.3.17, obteniendo $u(x)$ por el método del desarrollo en autofunciones. Demostrar que la función de Green satisface (9.3.23).

9.3.19. (a) Si se coloca una fuente concentrada en un nodo de algún modo (autofunción), demostrar que la amplitud de la respuesta de ese modo es cero. *Indicación:* usar el resultado del método del desarrollo en autofunciones y recordar que un nodo x^* de una autofunción es un punto en el que $\phi_n(x^*) = 0$.

(b) Si las autofunciones son de la forma $\sin n\pi x/L$ y la fuente está localizada en el punto medio, $x_0 = L/2$, demostrar que la respuesta no tendrá armónicos pares.

9.3.20. Deducir el desarrollo en autofunciones de la función de Green (9.3.23) directamente a partir de la ecuación diferencial que la define (9.3.40) haciendo

$$G(x, x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

Supóngase que se puede diferenciar término a término.

***9.3.21.** Resolver el problema

$$\frac{dG}{dx} = \delta(x - x_0) \quad \text{con} \quad G(0, x_0) = 0.$$

Comprobar que $G(x, x_0)$ no es simétrica aunque $\delta(x - x_0)$ sí lo sea.

9.3.22. Resolver el problema

$$\frac{dG}{dx} + G = \delta(x - x_0) \quad \text{con} \quad G(0, x_0) = 0.$$

Comprobar que $G(x, x_0)$ tampoco es simétrica en este caso.

9.3.23. Resolver

$$\begin{aligned} \frac{d^4 G}{dx^4} &= \delta(x - x_0), \\ G(0, x_0) &= 0, \quad G(L, x_0) = 0, \\ \frac{dG}{dx}(0, x_0) &= 0, \quad \frac{d^2 G}{dx^2}(L, x_0) = 0. \end{aligned}$$

9.3.24. Usar el Ejercicio 9.3.23 para resolver el problema

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u}{dx^4} &= f(x), \\ u(0) &= 0, \quad u(L) = 0, \\ \frac{du}{dx}(0) &= 0, \quad \frac{d^2 u}{dx^2}(L) = 0. \end{aligned}$$

Indicación: puede ser útil el Ejercicio 5.5.8.

9.3.25. Usar el teorema de convolución para transformadas de Laplace para obtener soluciones particulares de

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{d^2 u}{dx^2} &= f(x) \quad (\text{véase el Ejercicio 9.3.5}). \\ \text{* (b)} \quad \frac{d^4 u}{dx^4} &= f(x) \quad (\text{véase el Ejercicio 9.3.24}). \end{aligned}$$

Apéndice de la Sección 9.3: obtención de la fórmula de Green usando la delta de Dirac

La fórmula de Green es muy importante para analizar funciones de Green. Sin embargo, nuestra deducción de la fórmula de Green requiere la integración por partes. Vamos a probar que la fórmula de Green,

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)]dx = p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b, \quad \text{donde} \quad L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q, \quad (9.3.53)$$

es válida incluso si v es una función de Green,

$$L(v) = \delta(x - x_0). \quad (9.3.54)$$

Deduzcamos (9.3.53). Calculemos para ello, en primer lugar, el miembro izquierdo de (9.3.53). Puesto que tenemos una singularidad en $x = x_0$, no tenemos garantizado que (9.3.53) sea válida. Por ello, dividimos el intervalo $[a, b]$ en tres partes:

$$\int_a^b = \int_a^{x_0^-} + \int_{x_0^-}^{x_0^+} + \int_{x_0^+}^b .$$

En los subintervalos que no incluyen a la singularidad, $a \leq x \leq x_0^-$ y $x_0^+ \leq x \leq b$, podemos usar la fórmula de Green sin problemas. Además, gracias a la propiedad de la delta de Dirac

$$\int_{x_0^-}^{x_0^+} [uL(v) - vL(u)] dx = \int_{x_0^-}^{x_0^+} [u\delta(x - x_0) - vL(u)] dx = u(x_0),$$

puesto que $\int_{x_0^-}^{x_0^+} vL(u) dx = 0$. Por tanto, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx &= p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^{x_0^-} + p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_0^+}^b + u(x_0) \\ &= p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b - p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} + u(x_0), \end{aligned} \tag{9.3.55}$$

ya que u , du/dx y v son continuas en $x = x_0$, se sigue que

$$p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = p(x_0)u(x_0) \frac{dv}{dx} \Big|_{x_0^-}^{x_0^+}$$

Por otro lado, integrando (9.3.54) vemos que $p \frac{dv}{dx} \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} = 1$. Por tanto, (9.3.53) se sigue de (9.3.55). Así pues, la fórmula de Green puede utilizarse incluso con funciones de Green.

9.4. Alternativa de Fredholm y función de Green modificada

9.4.1. Introducción

Como ya hemos visto, si $\lambda = 0$ es un autovalor, entonces no existe función de Green. Con objeto de comprender dónde está la dificultad, vamos a examinar de nuevo el problema no homogéneo:

$$L(u) = f(x), \tag{9.4.1}$$

sujeto a condiciones de contorno homogéneas. Recordemos que en la sección anterior obtuvimos por el método del desarrollo en autofunciones que

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \tag{9.4.2}$$

donde

$$-a_n \lambda_n = \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2 \sigma dx}. \quad (9.4.3)$$

Si $\lambda_n = 0$ (para algún n , que con frecuencia corresponde al menor de los autovalores), puede no existir ninguna solución del problema de contorno no homogéneo. En particular, si $\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx \neq 0$, para la autofunción asociada al autovalor $\lambda_n = 0$ no puede verificarse la Ecuación (9.4.3). Este hecho merece una explicación más detallada.

Ejemplo. Consideremos el siguiente sencillo problema de contorno no homogéneo:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = e^x, \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}(L) = 0. \quad (9.4.4)$$

Intentemos resolver (9.4.4) integrando:

$$\frac{du}{dx} = e^x + c.$$

Ahora comprobamos que no se pueden verificar simultáneamente las dos condiciones de contorno porque son contradictorias:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + c, \\ 0 &= e^L + c. \end{aligned}$$

No hay ninguna garantía de que exista *alguna* solución de un problema de contorno no homogéneo cuando $\lambda = 0$ es un autovalor del problema de autovalores asociado, en este caso, $d^2 \phi_n / dx^2 = -\lambda_n \phi_n$, con $d\phi_n / dx(0) = 0$ y $d\phi_n / dx(L) = 0$.

Observemos que en este ejemplo, desde un punto de vista físico, estamos buscando una distribución de temperaturas en el equilibrio. Puesto que existen fuentes y las condiciones de contorno son de aislamiento térmico, sabemos que sólo puede existir una temperatura de equilibrio si no hay entrada neta de energía térmica:

$$\int_0^L e^x dx = 0,$$

lo que no es cierto. Como la energía térmica está disipándose constantemente, no puede haber equilibrio ($0 = d^2 u / dx^2 - e^x$).

Autovalor nulo. Hemos visto antes que, si $\lambda = 0$ es un autovalor, puede haber dificultades al resolver

$$L(u) = f(x), \quad (9.4.5)$$

sujeta a condiciones de contorno homogéneas. Las autofunciones ϕ_n verifican

$$L(\phi_n) = -\lambda_n \sigma \phi_n,$$

con las mismas condiciones de contorno homogéneas. Por tanto, si $\lambda = 0$ es un autovalor, la autofunción asociada $\phi_h(x)$ cumple que

$$L(\phi_h) = 0, \tag{9.4.6}$$

con las mismas condiciones de contorno homogéneas. Así pues, $\phi_h(x)$ es una solución homogénea no trivial de (9.4.5). Esto es importante: **las soluciones homogéneas no triviales de (9.4.5) que verifican las mismas condiciones homogéneas de contorno son equivalentes a las autofunciones asociadas al autovalor cero.** Si no existen soluciones homogéneas no triviales (que verifiquen las mismas condiciones de contorno homogéneas), entonces $\lambda = 0$ no es un autovalor.

La noción de solución homogénea produce menos confusión que la de que pueda existir un autovalor nulo. Por ejemplo, consideremos el problema

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = e^x, \quad \text{con } u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(\pi) = 0. \tag{9.4.7}$$

¿Existen soluciones homogéneas? La respuesta es que sí, por ejemplo lo es $\phi = \text{sen } x$. Sin embargo, puede producir alguna confusión la afirmación de que $\lambda = 0$ es un autovalor (aunque es cierto). La definición de los autovalores para el problema (9.4.7) es

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \phi = -\lambda\phi, \quad \text{con } \phi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \phi(\pi) = 0.$$

Esto se escribe mejor como $d^2\phi/dx^2 + (\lambda + 1)\phi = 0$. Por tanto, $\lambda + 1 = (n\pi/L)^2 = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, y ahora está claro que $\lambda = 0$ es un autovalor (correspondiente a $n = 1$).

9.4.2. Alternativa de Fredholm

Podemos deducir varias consecuencias importantes a partir de la Ecuación (9.4.3), que fue obtenida por el método del desarrollo en autofunciones. La alternativa de Fredholm resume estos resultados para problemas no homogéneos

$$L(u) = f(x), \tag{9.4.8}$$

sujetos a condiciones de contorno homogéneas (de tipo autoadjunto). Entonces,

1. o bien $u = 0$ es la única solución homogénea (esto es, $\lambda = 0$ no es un autovalor), en cuyo caso el problema no homogéneo tiene solución única,
2. o bien existen soluciones homogéneas no triviales $\phi_h(x)$ (es decir, $\lambda = 0$ es un autovalor), en cuyo caso el problema no homogéneo no tiene soluciones o tiene un número infinito de ellas.

Describamos con más detalle qué ocurre si $\phi(x)$ es una solución homogénea no trivial. Por (9.4.3) sabemos que **existe un número infinito de soluciones si**

$$\int_a^b f(x)\phi_h(x) dx = 0, \quad (9.4.9)$$

debido a que el coeficiente a_n correspondiente es arbitrario. Estas soluciones no únicas corresponden a un múltiplo aditivo arbitrario de una solución homogénea $\phi_h(x)$. La Ecuación (9.4.9) se corresponde con el caso en que la función de forzamiento es ortogonal a la solución homogénea (con peso 1). Si

$$\int_a^b f(x)\phi_h(x) dx \neq 0,$$

entonces el problema no homogéneo (con condiciones de contorno homogéneas) no tiene soluciones. Ilustramos estos resultados en la Tabla 9.4.1.

Un enunciado diferente de la alternativa de Fredholm afirma que **existen soluciones del problema no homogéneo (9.4.8) con condiciones de contorno homogéneas, solamente si el término de forzamiento es ortogonal a todas las soluciones homogéneas**⁵. Obsérvese que si $u = 0$ es la única solución homogénea, entonces $f(x)$ es automáticamente ortogonal a ella (de un modo algo trivial), y existe una solución.

Tabla 9.4.1: Número de soluciones de $L(u) = f(x)$ sujeta a condiciones de contorno homogéneas

	$\int_a^b f(x)\phi_h(x) dx$	
	0	$\neq 0$
$\phi_h = 0$ ($\lambda \neq 0$)	1	No aplicable
$\phi_h \neq 0$ ($\lambda = 0$)	∞	0

Se puede probar parte de la alternativa de Fredholm sin usar un desarrollo en autofunciones. Si el problema no homogéneo tiene solución, entonces

$$L(u) = f(x).$$

Todas las soluciones homogéneas, $\phi_h(x)$, verifican

$$L(\phi_h) = 0.$$

⁵Aquí, el operador L es autoadjunto. En el caso de operadores no autoadjuntos, existen soluciones si el término de forzamiento es ortogonal a todas las soluciones del problema *adjunto* homogéneo correspondiente (véanse los Ejercicios 10.3.2 a 10.3.5).

Si ahora usamos la fórmula de Green con $v = \phi_h$ obtenemos

$$\int_a^b [u \cdot 0 - \phi_h f(x)] dx = 0, \quad \text{es decir,} \quad \boxed{\int_a^b f(x)\phi_h(x) dx = 0,}$$

puesto que u y ϕ_h verifican las mismas condiciones de contorno homogéneas..

Ejemplos. Consideremos tres ejemplos. En primer lugar, sea el problema

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = e^x, \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}(L) = 0. \quad (9.4.10)$$

Es claro que $u = 1$ es una solución homogénea. De acuerdo con la alternativa de Fredholm, solamente existe una solución de (9.4.10) si e^x es ortogonal a esta solución homogénea. Como $\int_0^L e^x \cdot 1 dx \neq 0$, no existen soluciones de (9.4.10).

Como un segundo ejemplo, consideremos el problema

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 2u = e^x, \quad \text{con} \quad u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(\pi) = 0.$$

Puesto que no existen soluciones no triviales del problema homogéneo correspondiente⁶, la alternativa de Fredholm implica que existe solución única. Sin embargo, si lo que queremos es calcular esa solución, debemos usar técnicas estándar de resolución de ecuaciones diferenciales no homogéneas, tales como el método de los coeficientes indeterminados, variación de los parámetros o desarrollo en autofunciones (usando las funciones $\text{sen } nx$).

Finalmente, como un ejemplo no trivial, consideremos el problema

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 u = \beta + x, \quad \text{con} \quad u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(L) = 0.$$

Como $\phi = \text{sen } \pi x/L$ es una solución del problema homogéneo, el problema no homogéneo tiene solución sólo si el miembro derecho es ortogonal a $\text{sen } \pi x/L$:

$$0 = \int_0^L (\beta + x) \text{sen } \frac{\pi x}{L} dx.$$

Podemos usar esta ecuación para determinar el único valor de β para el que existe solución:

$$\beta = \frac{-\int_0^L x \text{sen}(\pi x/L) dx}{\int_0^L \text{sen}(\pi x/L) dx} = -\frac{L}{2}.$$

Sin embargo, de nuevo en este caso ocurre que no podemos usar la alternativa de Fredholm para obtener la solución $u(x)$.

⁶Para $d^2\phi/dx^2 + \lambda\phi = 0$, con $\phi(0) = 0$ y $\phi(L) = 0$, los autovalores son $(n\pi/L)^2$. Aquí, $2 \neq n^2$.

9.4.3. Función de Green modificada

En esta sección analizaremos el problema

$$L(u) = f, \quad (9.4.11)$$

sujeto a condiciones de contorno homogéneas en el caso en el que $\lambda = 0$ es un autovalor. Si existe solución de (9.4.11), obtendremos una solución particular definiendo y construyendo de forma adecuada una función de Green modificada.

Si $\lambda = 0$ no es un autovalor, entonces existe solución única del problema de contorno no homogéneo (9.4.11), sujeto a condiciones de contorno homogéneas. En la Sección 9.3 representamos la solución usando una función de Green, $G(x, x_0)$, que satisface la ecuación

$$L[G(x, x_0)] = \delta(x - x_0), \quad (9.4.12)$$

sujeta a las mismas condiciones de contorno homogéneas.

Analicemos ahora el caso en que $\lambda = 0$ es un autovalor, es decir, existen soluciones homogéneas no triviales $\phi_h(x)$ de (9.4.11), $L(\phi_h) = 0$. Supondremos que existen soluciones de (9.4.11), esto es,

$$\int_a^b f(x)\phi_h(x) dx = 0. \quad (9.4.13)$$

Sin embargo, la función de Green definida por (9.4.12) no existe, puesto que $\delta(x - x_0)$ no es ortogonal a las soluciones del problema homogéneo para todo x_0 :

$$\int_a^b \delta(x - x_0)\phi_h(x) dx = \phi_h(x_0) \neq 0.$$

Necesitamos introducir un problema de comparación sencillo que sí tenga solución. Tenemos que $\delta(x - x_0)$ no es ortogonal a $\phi_h(x)$, porque tiene una “componente en la dirección” de $\phi_h(x)$. Sin embargo, sí que existe solución para la función

$$\delta(x - x_0) + c\phi_h(x),$$

si elegimos la constante c de modo que esta función sea ortogonal a $\phi_h(x)$:

$$0 = \int_a^b \phi_h(x) [\delta(x - x_0) + c\phi_h(x)] dx = \phi_h(x_0) + c \int_a^b \phi_h^2(x) dx.$$

Por tanto, introducimos la **función de Green modificada** $G_m(x, x_0)$ que verifica

$$L[G_m(x, x_0)] = \delta(x - x_0) - \frac{\phi_h(x)\phi_h(x_0)}{\int_a^b \phi_h^2(x) dx}, \quad (9.4.14)$$

sujeta a las mismas condiciones de contorno homogéneas.

Desgraciadamente existe un número infinito de soluciones, puesto que el miembro derecho de (9.4.14) es ortogonal a $\phi_h(x)$. En el Ejercicio 9.4.9, se muestra que podemos elegir la función de Green modificada de modo que sea simétrica

$$G_m(x, x_0) = G_m(x_0, x). \tag{9.4.15}$$

Si $g_m(x, x_0)$ es una función de Green modificada simétrica, entonces la siguiente también es una función de Green modificada simétrica:

$$G_m(x, x_0) = g_m(x, x_0) + \beta \phi_h(x_0)\phi_h(x),$$

para cualquier constante β (independiente de x y x_0). Por tanto, existe un número infinito de funciones de Green modificadas simétricas. Podemos usar una cualquiera de ellas.

Usemos ahora la fórmula de Green para deducir una fórmula de representación para $u(x)$ usando la función de Green modificada. Poniendo $u = u(x)$ y $v = G_m(x, x_0)$, la fórmula de Green nos dice que

$$\int_a^b \{u(x)L[G_m(x, x_0)] - G_m(x, x_0)L[u(x)]\} dx = 0,$$

ya que ambas, $u(x)$ y $G_m(x, x_0)$, verifican las mismas condiciones de contorno homogéneas. Las ecuaciones diferenciales que definen a ambas funciones, (9.4.11) y (9.4.14), implican que

$$\int_a^b \left\{ u(x) \left[\delta(x - x_0) - \frac{\phi_h(x)\phi_h(x_0)}{\int_a^b \phi_h^2(\bar{x}) d\bar{x}} \right] - G_m(x, x_0)f(x) \right\} dx = 0.$$

Usando ahora la propiedad fundamental de la delta de Dirac (e invirtiendo los papeles de x y x_0), obtenemos

$$u(x) = \int_a^b f(x_0)G_m(x, x_0) dx_0 + \frac{\phi_h(x)}{\int_a^b \phi_h^2(\bar{x}) d\bar{x}} \int_a^b u(x_0)\phi_h(x_0) dx_0,$$

donde hemos utilizado también la simetría de $G_m(x, x_0)$. La última expresión es un múltiplo de la solución homogénea y, por tanto, una solución particular sencilla de (9.4.11) es

$$u(x) = \int_a^b f(x_0)G_m(x, x_0) dx_0, \tag{9.4.16}$$

es decir, de la misma forma que la que obtuvimos en el caso en que $\lambda = 0$ no era autovalor, véase (9.3.35).

Ejemplo. El ejemplo más sencillo de un problema con solución homogénea no trivial es

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), \quad (9.4.17)$$

$$\frac{du}{dx}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}(L) = 0. \quad (9.4.18)$$

Cualquier constante es una solución homogénea (autofunción correspondiente al autovalor nulo). Gracias a la alternativa de Fredholm, sabemos que para que exista solución⁷, debemos tener que $\int_0^L f(x) dx = 0$. Supongamos que $f(x)$ verifica esta condición (por ejemplo, $f(x) = x - L/2$). La función de Green modificada $G_m(x, x_0)$ satisface el problema

$$\frac{d^2 G_m}{dx^2} = \delta(x - x_0) + c, \quad (9.4.19)$$

$$\frac{dG_m}{dx}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dG_m}{dx}(L) = 0, \quad (9.4.20)$$

puesto que la autofunción es una constante. Para determinar tal función de Green modificada, imponemos que el miembro derecho de (9.4.19) sea ortogonal a las soluciones homogéneas:

$$\int_0^L [\delta(x - x_0) + c] dx = 0, \quad \text{es decir,} \quad c = -\frac{1}{L}.$$

Usemos las propiedades de la delta de Dirac para resolver el problema (9.4.19) - (9.4.20). Para $x \neq x_0$ se tiene

$$\frac{d^2 G_m}{dx^2} = -\frac{1}{L}.$$

Integrando

$$\frac{dG_m}{dx} = \begin{cases} -\frac{x}{L} & x < x_0, \\ -\frac{x}{L} + 1 & x > x_0, \end{cases} \quad (9.4.21)$$

donde hemos elegido las constantes de integración para que se verifiquen las condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = L$. Observemos que (9.4.21) ya satisface la condición de salto para la derivada ($dG_m/dx|_{x_0^-}^{x_0^+} = 1$), que se obtiene por integración de (9.4.19). Integremos ahora de nuevo para obtener $G_m(x, x_0)$. Suponiendo que $G_m(x, x_0)$ es continua en $x = x_0$ obtenemos

$$G_m(x, x_0) = \begin{cases} -\frac{1}{L} \frac{x^2}{2} + x_0 + c(x_0) & x < x_0, \\ -\frac{1}{L} \frac{x^2}{2} + x + c(x_0) & x > x_0. \end{cases}$$

⁷Físicamente, si las fronteras están aisladas, la energía térmica generada *neto* debe ser cero en el equilibrio.

donde $c(x_0)$ denota una constante aditiva arbitraria que depende de x_0 y que corresponde a un múltiplo arbitrario de la solución homogénea. Ésta es la representación de todas las posibles funciones de Green modificadas. Con frecuencia, se desea que $G_m(x, x_0)$ sea simétrica. Imponiendo, por ejemplo, que $G_m(x, x_0) = G_m(x_0, x)$ para $x < x_0$, obtenemos

$$-\frac{1}{L} \frac{x_0^2}{2} + x_0 + c(x) = -\frac{1}{L} \frac{x^2}{2} + x_0 + c(x_0),$$

lo que implica

$$c(x_0) = -\frac{1}{L} \frac{x_0^2}{2} + \beta,$$

donde β es una constante arbitraria. Por tanto, obtenemos finalmente la función de Green modificada,

$$G_m(x, x_0) = \begin{cases} -\frac{1}{L} \frac{(x^2 + x_0^2)}{2} + x_0 + \beta & x < x_0, \\ -\frac{1}{L} \frac{(x^2 + x_0^2)}{2} + x + \beta & x > x_0. \end{cases} \quad (9.4.22)$$

Así pues, una solución de (9.4.17) - (9.4.18) viene dada por (9.4.16), con $G_m(x, x_0)$ dada por (9.4.22).

Una función de Green modificada alternativa. Para resolver problemas con soluciones homogéneas podríamos haber introducido un problema de comparación que satisface condiciones de contorno no homogéneas. Por ejemplo, la función de Neumann G_a se define por medio del problema

$$\frac{d^2 G_a}{dx^2} = \delta(x - x_0), \quad (9.4.23)$$

$$\frac{dG_a}{dx}(0) = -c, \quad (9.4.24)$$

$$\frac{dG_a}{dx}(L) = c. \quad (9.4.25)$$

Esto representa físicamente una fuente $-\delta(x - x_0)$ de energía térmica negativa con energía calorífica que fluye hacia dentro en ambos extremos a una velocidad c . Por tanto, deducimos físicamente que habrá solución sólo si $2c = 1$. Podemos comprobar esto integrando (9.4.23) desde $x = 0$ hasta $x = L$, o usando la fórmula de Green. Esta función de Green modificada puede obtenerse de un modo similar a la anterior. La fórmula de representación de la solución de un problema no homogéneo en términos de esta función de Green también puede obtenerse usando la fórmula de Green (véase el Ejercicio 9.4.12).

EJERCICIOS 9.4

9.4.1. Considérese el problema

$$L(u) = f(x), \quad \text{con} \quad L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q,$$

sujeto a dos condiciones de contorno homogéneas. Denotemos por ϕ_h las soluciones, si existen, de la ecuación homogénea $L(\phi_h) = 0$ con las dos mismas condiciones de contorno homogéneas. Aplicar la fórmula de Green para demostrar que no existen soluciones u si $f(x)$ no es ortogonal (con peso 1) a todas las $\phi_h(x)$.

9.4.2. Modificar el Ejercicio 9.4.1 si

$$L(u) = f(x),$$

$$u(0) = \alpha \quad \text{y} \quad u(L) = \beta$$

*(a) ¿Qué condición se debe verificar para que exista solución?

(b) Demostrar que, si se verifica esta condición, entonces existe un número infinito de soluciones.

9.4.3. Determinar, sin calcular $u(x)$, cuántas soluciones tiene el problema

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \gamma u = \text{sen } x,$$

(a) si $\gamma = 1$ y $u(0) = u(\pi) = 0$.

*(b) si $\gamma = 1$ y $\frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(\pi) = 0$.

(c) si $\gamma = -1$ y $u(0) = u(\pi) = 0$.

(d) si $\gamma = 2$ y $u(0) = u(\pi) = 0$.

9.4.4. En los siguientes ejemplos, obtener la solución general de la ecuación diferencial usando el método de los coeficientes indeterminados. Intentar resolver las condiciones de contorno y probar que el resultado obtenido es consistente con la alternativa de Fredholm:

(a) Ecuación (9.4.7).

(b) Ecuación (9.4.10).

(c) Ejemplo tras (9.4.10).

(d) Segundo ejemplo tras (9.4.10).

9.4.5. ¿Hay algún valor de β para el que existan soluciones de

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = \beta + x,$$

$$u(-\pi) = u(\pi) \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}(-\pi) = \frac{du}{dx}(\pi)?$$

***9.4.6.** Considérese la ecuación

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = 1.$$

- (a) Encontrar la solución general. Determinar todas las soluciones que verifican $u(0) = u(\pi) = 0$. ¿Es consistente este resultado con la alternativa de Fredholm?
- (b) Rehacer el apartado (a) si $\frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(\pi) = 0$.
- (c) Rehacer el apartado (a) si $\frac{du}{dx}(-\pi) = \frac{du}{dx}(\pi)$ y $u(-\pi) = u(\pi)$.

9.4.7. Considérese el problema

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 4u = \cos x,$$

$$\frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(\pi) = 0.$$

- (a) Determinar todas las soluciones sabiendo que existe una solución particular de la ecuación diferencial de la forma $u_p = A \cos x$.
- (b) Calcular todas las soluciones usando el método de desarrollo en autofunciones.
- (c) Aplicar la alternativa de Fredholm. ¿Es consistente el resultado obtenido con los apartados (a) y (b)?

9.4.8. Considérese la ecuación

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = \cos x,$$

que tiene una solución particular del tipo $u_p = Ax \sin x$.

- * (a) Supóngase que $u(0) = u(\pi) = 0$. Intentar obtener explícitamente todas las soluciones. ¿Es consistente el resultado obtenido con la alternativa de Fredholm?
- (b) Responder a las mismas preguntas del apartado (a) si $u(-\pi) = u(\pi)$ y $\frac{du}{dx}(-\pi) = \frac{du}{dx}(\pi)$.

- 9.4.9.** (a) Puesto que (9.4.14) (con condiciones de contorno homogéneas) es resoluble, existe un número infinito de soluciones. Supongamos que $g_m(x, x_0)$ es una de esas soluciones y que no es ortogonal a $\phi_h(x)$. Demostrar que existe una única función de Green modificada, $G_m(x, x_0)$, que es ortogonal a $\phi_h(x)$.
- (b) Supongamos que $G_m(x, x_0)$ es la función de Green modificada que es ortogonal a $\phi_h(x)$. Probar que $G_m(x, x_0)$ es simétrica. *Indicación:* aplicar la fórmula de Green con $G_m(x, x_1)$ y $G_m(x, x_2)$.

***9.4.10.** Determinar la función de Green modificada necesaria para resolver el problema

$$\frac{d^2u}{dx^2} + u = f(x),$$

$$u(0) = \alpha \quad y \quad u(\pi) = \beta.$$

Supóngase que $f(x)$ satisface la condición de solubilidad (véase el Ejercicio 9.4.2). Obtener una fórmula de representación de la solución $u(x)$ en términos de la función de Green modificada.

9.4.11. Considérese el problema

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx}(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}(L) = 0.$$

Se puede definir una función de Green modificada diferente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 G_a}{dx^2} &= \delta(x - x_0), \\ \frac{dG_a}{dx}(0) &= 0, \\ \frac{dG_a}{dx}(L) &= c. \end{aligned}$$

- *(a) Determinar c usando un razonamiento matemático.
- *(b) Determinar c usando un razonamiento físico.
- (c) Determinar explícitamente todas las posibles funciones $G_a(x, x_0)$.
- *(d) Determinar todas las funciones $G_a(x, x_0)$ simétricas.
- *(e) Obtener una fórmula de representación de la solución $u(x)$ usando esta función de Green modificada $G_a(x, x_0)$.

9.4.12. Se puede definir también una función de Green modificada alternativa (función de Neumann) mediante el problema

$$\begin{aligned} \frac{d^2 G_a}{dx^2} &= \delta(x - x_0), \\ \frac{dG_a}{dx}(0) &= -c, \\ \frac{dG_a}{dx}(L) &= c, \quad \text{donde hemos mostrado que } c = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- (a) Determinar todas las posibles funciones $G_a(x, x_0)$.
- (b) Determinar todas las funciones $G_a(x, x_0)$ simétricas.
- (c) Determinar todas las funciones $G_a(x, x_0)$ que son ortogonales a $\phi_h(x)$.
- (d) ¿Qué relación debe haber entre β y γ para que exista solución de:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), \quad \text{con} \quad \frac{du}{dx}(0) = \beta \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx}(L) = \gamma?$$

Deducir, en este caso, la solución $u(x)$ en términos de una función de Neumann definida como se indica más arriba.

9.5. Función de Green para la ecuación de Poisson

9.5.1. Introducción

En las Secciones 9.3 y 9.4 tratamos el caso de las funciones de Green para ecuaciones diferenciales ordinarias de tipo Sturm-Liouville, $L(u) = f$, donde $L = \frac{d}{dx} (p \frac{d}{dx}) + q$. Antes de tratar las funciones de Green para ecuaciones en derivadas parciales dependientes del tiempo (tales como las ecuaciones del calor y de ondas), analicemos la función de Green para la ecuación de Poisson, una ecuación en derivadas parciales que es independiente del tiempo,

$$L(u) = f, \quad (9.5.1)$$

donde $L = \nabla^2$, el laplaciano. Al principio, supondremos que u verifica condiciones de contorno homogéneas, pero luego mostraremos cómo usar las mismas ideas para resolver problemas con condiciones de contorno no homogéneas. Empecemos suponiendo que el dominio es acotado, como se ilustra en la Figura 9.5.1. La extensión a dominios no acotados también será tratada con algo de profundidad.

Recordemos que las funciones de Green unidimensionales fueron introducidas para resolver los problemas de Sturm-Liouville no homogéneos y que dedujimos las relaciones clave gracias a la fórmula de Green. Pues bien, el análisis de las funciones de Green para la ecuación de Poisson es bastante similar. Así, usaremos frecuentemente la fórmula de Green para el laplaciano, tanto en dos como en tres dimensiones:

$$\begin{aligned} \iiint (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV &= \oiint (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \hat{n} dS, \\ \iint (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dA &= \oint (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \hat{n} ds. \end{aligned}$$

De hecho, estas fórmulas son válidas para todas las funciones que tratamos en este texto.

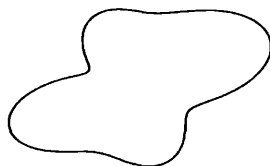


Figura 9.5.1: Región bidimensional acotada.

9.5.2. Delta de Dirac multidimensional y función de Green

La función de Green se define como la solución del problema no homogéneo con una fuente concentrada, sujeto a condiciones de contorno homogéneas. Definimos la delta de Dirac bidimensional como el producto de dos deltas de Dirac unidimensionales. Si la fuente está concentrada en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x} = x\hat{i} + y\hat{j}$, $\mathbf{x}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j}$,

entonces

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0). \quad (9.5.2)$$

En tres dimensiones tenemos una situación análoga. La propiedad fundamental de la delta de Dirac multidimensional es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) dA = f(\mathbf{x}_0), \quad (9.5.3)$$

o lo que es lo mismo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) dA = f(x_0, y_0). \quad (9.5.4)$$

En lo que sigue usaremos la notación vectorial (9.5.3).

Función de Green. Para resolver la ecuación en derivadas parciales no homogénea

$$\nabla^2 u = f(\mathbf{x}), \quad (9.5.5)$$

sujeta a condiciones homogéneas sobre la frontera, introducimos la función de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ para la ecuación de Poisson⁸:

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (9.5.6)$$

sujeta a las *mismas* condiciones de contorno *homogéneas*. Aquí, $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ representa la respuesta que se tiene en \mathbf{x} a causa de la fuente en \mathbf{x}_0 .

La fórmula de representación en términos de la función de Green. Si ponemos $v = G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, la fórmula de Green (en su forma bidimensional) se convierte en

$$\iint (u\nabla^2 G - G\nabla^2 u) dA = 0,$$

puesto que tanto $u(\mathbf{x})$ como $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ verifican las mismas condiciones de contorno homogéneas, por lo que $\oint (u\nabla G - G\nabla u) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$ se anula. De (9.5.5) y (9.5.6), se sigue que

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint f(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dA,$$

⁸Esta función a veces se llama la función de Green para la ecuación de Laplace.

de modo que si invertimos los papeles de \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 , obtenemos

$$u(\mathbf{x}) = \iint f(\mathbf{x}_0)G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) dA_0.$$

Como probaremos, la función de Green es simétrica,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}), \quad (9.5.7)$$

con lo que

$$u(\mathbf{x}) = \iint f(\mathbf{x}_0)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dA_0. \quad (9.5.8)$$

Esta fórmula nos muestra cómo calcular la solución de la ecuación en derivadas parciales siempre que se conozca la función de Green.

Simetría. Como en el caso de los problemas unidimensionales, para probar la simetría de la función de Green usamos la fórmula de Green con las funciones $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)$ y $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2)$. Como ambas verifican las mismas condiciones de contorno homogéneas, tenemos que

$$\iint [G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2)\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)] dA = 0.$$

Puesto que $\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$ y $\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)$, se sigue, usando la propiedad fundamental de la delta de Dirac, que $G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = G(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$; es decir, que la función de Green es simétrica.

9.5.3. Obtención de la función de Green por el método (multidimensional) de desarrollo en autofunciones

Un método de obtener la función de Green para la ecuación de Poisson en un *dominio acotado* consiste en usar un desarrollo en autofunciones. Consideremos las autofunciones asociadas, es decir, las soluciones de

$$\nabla^2 \phi = -\lambda \phi, \quad (9.5.9)$$

sujetas a las mismas condiciones de contorno homogéneas. Suponemos que los autovalores y las correspondientes autofunciones ortogonales son conocidos. Recordemos que tenemos ejemplos sencillos de autovalores y autofunciones en regiones rectangulares y circulares.

Intentemos obtener la función de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, dada por

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (9.5.10)$$

como una serie infinita de autofunciones:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda}(\mathbf{x}), \quad (9.5.11)$$

donde $\phi_{\lambda}(\mathbf{x})$ es la autofunción asociada al autovalor λ (obsérvese que esta serie puede converger muy lentamente). Como ambas funciones, $\phi_{\lambda}(\mathbf{x})$ y $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, verifican las mismas condiciones de contorno homogéneas, esperamos poder diferenciar la serie término a término:

$$\nabla^2 G = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \nabla^2 \phi_{\lambda} = - \sum_{\lambda} a_{\lambda} \lambda \phi_{\lambda}(\mathbf{x}).$$

Se puede comprobar que esto es válido usando la fórmula de Green. Puesto que $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ y por la ortogonalidad multidimensional de $\phi_{\lambda}(\mathbf{x})$, se sigue que

$$-a_{\lambda} \lambda = \frac{\iint \phi_{\lambda}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) dA}{\iint \phi_{\lambda}^2(\mathbf{x}) dA} = \frac{\phi_{\lambda}(\mathbf{x}_0)}{\iint \phi_{\lambda}^2 dA}.$$

Si $\lambda = 0$ no es un autovalor, entonces podremos determinar a_{λ} y con ello el desarrollo en autofunciones de la función de Green,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sum_{\lambda} \frac{\phi_{\lambda}(\mathbf{x}) \phi_{\lambda}(\mathbf{x}_0)}{-\lambda \iint \phi_{\lambda}^2 dA}. \quad (9.5.12)$$

Esta fórmula es la generalización natural del resultado unidimensional para la función de Green asociada a un problema de Sturm-Liouville no homogéneo (véase la Sección 9.3.3).

Ejemplo. Hemos visto en el Capítulo 7 que los autovalores, para el caso de un rectángulo, $0 < x < L$, $0 < y < H$, con condiciones de contorno nulas sobre los cuatro lados, son $\lambda_{nm} = (n\pi/L)^2 + (m\pi/H)^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$ y $m = 1, 2, 3, \dots$) y que las autofunciones asociadas son $\phi_{\lambda}(\mathbf{x}) = \text{sen}(n\pi x/L) \text{sen}(m\pi y/H)$. En este caso, las constantes de normalización son $\iint \phi_{\lambda}^2 dx dy = (L/2) \cdot (H/2)$. La función de Green puede desarrollarse en serie de estas autofunciones, una serie de Fourier de senos en x e y ,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{-4}{LH} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi x/L) \text{sen}(m\pi y/H) \text{sen}(n\pi x_0/L) \text{sen}(m\pi y_0/H)}{(n\pi/L)^2 + (m\pi/H)^2}.$$

Obtendremos más adelante formas alternativas de esta función de Green.

Alternativa de Fredholm. Como hemos visto ya en algunos otros casos, nos encontramos con dificultades si $\lambda = 0$ es un autovalor. En este caso, existe al

menos una solución no trivial ϕ_h de la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi_h = 0$ (la ecuación homogénea asociada a la ecuación de Poisson) que verifica condiciones de contorno homogéneas. Puede probarse que se tiene una alternativa de Fredholm como en la Sección 9.4. No existe solución del problema no homogéneo de valores en la frontera (con condiciones de contorno homogéneas) si

$$\iint f(\mathbf{x})\phi_n(\mathbf{x}) dA \neq 0.$$

Sin embargo, si la función fuente $f(\mathbf{x})$ es ortogonal a *todas* las soluciones homogéneas $\phi_h(\mathbf{x})$, entonces hay un número infinito de soluciones de la ecuación de Poisson.

Ejemplo. Si la frontera está aislada $\nabla\phi\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0$, entonces, tomando ϕ_h igual a cualquier constante, tendremos que ϕ_h es una solución no trivial de $\nabla^2\phi = 0$ y que verifica las condiciones de contorno. Por tanto, $\phi_h = 1$ es la autofunción asociada a $\lambda = 0$ y existen soluciones de $\nabla^2u = f(\mathbf{x})$ sólo si $\iint f(\mathbf{x}) dA = 0$. Esto significa físicamente que para la ecuación del calor estacionaria con fronteras aisladas, la energía generada neta debe ser cero. Ésta es exactamente la versión bidimensional del problema que se discutió en la Sección 9.4. En particular, podríamos introducir de algún modo una función de Green modificada (que también se conoce como **función de Neumann**), pero dejaremos esta discusión para los ejercicios. Durante el resto de la Sección 9.5, supondremos que $\lambda = 0$ no es un autovalor.

9.5.4. Obtención directa de la función de Green (autofunciones unidimensionales)

Las funciones de Green pueden obtenerse también por métodos más directos. Consideremos la función de Green para la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{9.5.13}$$

dentro de un rectángulo con condiciones de contorno nulas, como se ilustra en la Figura 9.5.2. En lugar de obtener esta función de Green usando una serie de autofunciones bidimensionales (*véase* la Sección 9.5.3), usaremos autofunciones unidimensionales, esto es, una serie de senos en x o en y debido a las condiciones de contorno. Usando una serie de Fourier de senos en la variable x ,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \text{sen} \frac{n\pi x}{L}, \tag{9.5.14}$$

y sustituyendo (9.5.14) en (9.5.13), obtenemos [puesto que ambas funciones, $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ y $\text{sen} n\pi x/L$ verifican el mismo conjunto de condiciones de contorno homogéneas],

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 a_n}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 a_n \right) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0),$$

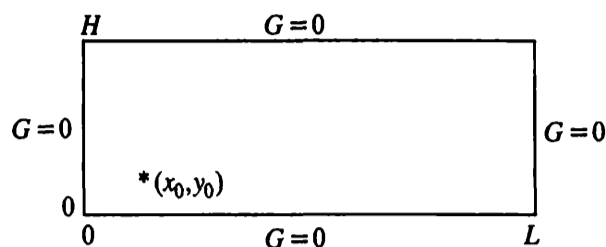


Figura 9.5.2: Función de Green para la ecuación de Poisson en un rectángulo.

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_n}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} \delta(y - y_0). \end{aligned} \quad (9.5.15)$$

Las condiciones de contorno en $y = 0$ e $y = H$ implican que los coeficientes de Fourier deben verificar las condiciones de contorno asociadas,

$$a_n(0) = 0 \quad \text{y} \quad a_n(H) = 0. \quad (9.5.16)$$

Podemos resolver la Ecuación (9.5.15) con condiciones de contorno (9.5.16) por medio de una serie de Fourier de senos en y , pero esta estrategia conduce al análisis anterior de series dobles de senos. Por otro lado, puesto que el término no homogéneo en la Ecuación (9.5.15) es una delta de Dirac unidimensional, podemos resolver la Ecuación (9.5.15) como ya hemos hecho con las funciones de Green: la ecuación diferencial es homogénea si $y \neq y_0$. Utilizando además las condiciones de contorno, obtenemos

$$a_n(y) = \begin{cases} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{L} \operatorname{senh} \frac{n\pi(y_0 - H)}{L} & y < y_0, \\ c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi(y - H)}{L} \operatorname{senh} \frac{n\pi y_0}{L} & y > y_0, \end{cases}$$

donde vemos que la continuidad en $y = y_0$ se verifica automáticamente. Integremos ahora (9.5.15) desde y_{0-} hasta y_{0+} para obtener el salto en la derivada:

$$\left. \frac{da_n}{dy} \right|_{y_{0-}}^{y_{0+}} = \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L},$$

lo que implica

$$c_n \frac{n\pi}{L} \left[\operatorname{senh} \frac{n\pi y_0}{L} \cosh \frac{n\pi(y_0 - H)}{L} - \operatorname{senh} \frac{n\pi(y_0 - H)}{L} \cosh \frac{n\pi y_0}{L} \right] = \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L}. \quad (9.5.17)$$

Usando una fórmula de adición para funciones hiperbólicas obtenemos que

$$c_n = \frac{2 \operatorname{sen}(n\pi x_0/L)}{n\pi \operatorname{senh}(n\pi H/L)}.$$

Esto proporciona la representación en serie de Fourier de senos (en la variable x) de la función de Green

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sen}(n\pi x_0/L) \operatorname{sen}(n\pi x/L)}{n\pi \operatorname{senh}(n\pi H/L)} \begin{cases} \operatorname{senh} \frac{n\pi(y_0 - H)}{L} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{L} & y < y_0, \\ \operatorname{senh} \frac{n\pi(y - H)}{L} \operatorname{senh} \frac{n\pi y_0}{L} & y > y_0. \end{cases} \quad (9.5.18)$$

Obsérvese la simetría de la función de Green que en esta fórmula es explícita. Recordemos también que en la subsección anterior obtuvimos la representación de esta misma función de Green como una serie de Fourier doble de senos en las variables x e y .

Es posible obtener también una tercera representación de esta función de Green, ya que podríamos haber usado una serie de Fourier de senos en y en lugar de una serie en x . Omitiremos este análisis que es casi idéntico al anterior.

9.5.5. Usando la función de Green para resolver problemas con condiciones de contorno no homogéneas

Podemos usar, al igual que el caso de los problemas unidimensionales, la *misma* función de Green que hemos calculado en las Secciones 9.5.2 a 9.5.4, $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, donde $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ verifica condiciones homogéneas de contorno, para resolver la ecuación de Poisson $\nabla^2 u = f(\mathbf{x})$ sujeta a condiciones de contorno *no homogéneas*.

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$\nabla^2 u = f(\mathbf{x}), \quad (9.5.19)$$

con

$$u = h(\mathbf{x}), \quad (9.5.20)$$

sobre la frontera. La función de Green se define mediante la ecuación

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (9.5.21)$$

con la condición

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0, \quad (9.5.22)$$

si \mathbf{x} está sobre la frontera (\mathbf{x}_0 a menudo no está sobre la frontera). Es decir, la función de Green verifica las condiciones de contorno homogéneas asociadas. Emplearemos de nuevo la fórmula de Green para obtener la fórmula de representación

de la solución de (9.5.19) - (9.5.20) en términos de la función de Green,

$$\iint (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u) dA = \oint (u \nabla G - G \nabla u) \cdot \hat{n} ds.$$

Usando las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno, deducimos a partir de la fórmula de Green que

$$\iint [u(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)] dA = \oint h(\mathbf{x})\nabla G \cdot \hat{n} ds,$$

y, por tanto, que

$$u(\mathbf{x}_0) = \iint f(\mathbf{x})G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dA + \oint h(\mathbf{x})\nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \hat{n} ds.$$

Finalmente, intercambiamos los papeles de \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 y usamos la simetría de $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ para obtener que

$$u(\mathbf{x}) = \iint f(\mathbf{x}_0)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dA_0 + \oint h(\mathbf{x}_0)\nabla_{\mathbf{x}_0}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \hat{n} ds_0. \quad (9.5.23)$$

Debemos ser especialmente cuidadosos con la integral cerrada de línea, que representa el efecto de la condición de contorno no homogénea. El símbolo $\nabla_{\mathbf{x}_0}$ denota el gradiente con respecto a la posición de la fuente,

$$\nabla_{\mathbf{x}_0} \equiv \frac{\partial}{\partial x_0} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y_0} \hat{j}.$$

Por tanto, $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ es la función de influencia para el término de fuente, mientras que $\nabla_{\mathbf{x}_0}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \hat{n}$ es la función de influencia para las condiciones de contorno no homogéneas. Intentemos comprender esta última función de influencia, $\nabla_{\mathbf{x}_0}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \hat{n}$. Como ésta es una derivada ordinaria con respecto a la posición de la fuente en la dirección normal, usando la definición de derivada direccional tenemos

$$\nabla_{\mathbf{x}_0}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 + \Delta s \hat{n}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\Delta s}.$$

Veamos una interpretación de esta derivada normal de la función de Green: $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 + \Delta s \hat{n})/\Delta s$ es la respuesta a una fuente positiva de fuerza $1/\Delta s$ localizada en $\mathbf{x}_0 + \Delta s \hat{n}$, mientras que $-G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)/\Delta s$ es la respuesta a una fuente negativa (con fuerza $-1/\Delta s$) situada en \mathbf{x}_0 . La función de influencia para las condiciones de contorno no homogéneas se compone de dos fuentes concentradas, de efectos opuestos, cuya fuerza es $1/\Delta s$, están separadas por una distancia Δs en el límite cuando $\Delta s \rightarrow 0$. Una fuente así se llama **fente dipolar**. Por tanto, *esta condición de contorno no homogénea tiene un efecto equivalente al de una distribución superficial de dipolos.*

9.5.6. Función de Green de todo el espacio

En las Secciones 9.5.2 a 9.5.4, obtuvimos diversas representaciones de la función de Green para la ecuación de Poisson, $\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Sin embargo, estas representaciones eran complicadas. La serie infinita que obtuvimos no proporciona una buena comprensión del efecto en \mathbf{x} de una fuente concentrada en \mathbf{x}_0 . Como demostraremos, la dificultad está causada por la presencia de la frontera del dominio.

Para obtener representaciones más sencillas, empezaremos por resolver la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u = f(\mathbf{x}),$$

en todo el espacio. Introducimos la función de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, definiéndola por medio de la ecuación

$$\boxed{\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}, \tag{9.5.24}$$

donde el operador ∇^2 significa que las derivas son respecto a la variable \mathbf{x} . Puesto que éste es un modelo de flujo de calor estacionario con una fuente concentrada localizada en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ y *sin frontera*, debería existir una solución que fuera simétrica alrededor de la fuente puntual $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Los resultados que obtendremos son algo diferentes en dos y en tres dimensiones, pero resolveremos ambos simultáneamente. Denotaremos la distancia radial desde $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, por r en dimensión dos y por ρ en dimensión tres:

dimensión dos $r = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ $r = \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 $ $= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$		dimensión tres $\rho = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ $\rho = \rho = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 $ $= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.
(9.5.25)		

Continuaremos nuestra deducción escribiendo los resultados tridimensionales entre paréntesis en el texto y a la derecha en las fórmulas. Por simetría, suponemos que $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ sólo depende de r (o de ρ):

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G(r) = G(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|) \quad | \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G(\rho) = G(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|).$$

Fuera de la fuente, $r \neq 0$ ($\rho \neq 0$), la función de forzamiento es nula, $\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$. Buscamos soluciones radiales, tanto en dos dimensiones como en tres, para $r \neq 0$ ($\rho \neq 0$). A partir de nuestro trabajo previo tenemos:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) = 0 \quad (r \neq 0) \quad | \quad \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dG}{d\rho} \right) = 0 \quad (\rho \neq 0).$$

La solución general puede obtenerse por integración

$$G(r) = c_1 \ln r + c_2 \quad | \quad G(\rho) = \frac{c_3}{\rho} + c_4. \tag{9.5.26}$$

Para determinar las constantes que dan lugar a la singularidad apropiada, integramos (9.5.24) sobre una pequeña circunferencia (esfera) de radio r (radio ρ):

$$\iint \nabla^2 G \, dA = 1 \quad \left| \quad \iiint \nabla^2 G \, dV = 1 \right.$$

$$\iint \nabla \cdot (\nabla G) \, dA = \oint \nabla G \cdot \hat{n} \, ds = 1 \quad \left| \quad \iiint \nabla \cdot (\nabla G) \, dV = \iint \nabla G \cdot \hat{n} \, dS = 1, \right.$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia. La derivada de la función de Green en la dirección normal a la frontera, $\nabla G \cdot \hat{n}$, es $\partial G / \partial r$ (en tres dimensiones $\partial G / \partial \rho$). Como sólo depende de la distancia radial [véase (9.5.26)] y sobre la circunferencia (esfera) es constante, se sigue que

$$2\pi r \frac{\partial G}{\partial r} = 1 \quad \left| \quad 4\pi \rho^2 \frac{\partial G}{\partial \rho} = 1, \right.$$

ya que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ (la superficie de la esfera es $4\pi \rho^2$). Puesto que en otros problemas que involucran la función de Green de todo el espacio, puede ser necesario considerar el límite de una pequeña circunferencia (esfera) infinitesimal, expresaremos la condición de singularidad como

$$\boxed{\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{2\pi}} \quad \left| \quad \boxed{\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \frac{\partial G}{\partial \rho} = \frac{1}{4\pi}} \right. \quad (9.5.27)$$

A partir de (9.5.26) y (9.5.27) deducimos que

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \quad \left| \quad c_3 = -\frac{1}{4\pi}.$$

Sin embargo, las constantes c_2 y c_4 son arbitrarias, lo que indica que la función de Green de todo el espacio para la ecuación de Poisson está determinada salvo una constante aditiva arbitraria. Por conveniencia, pondremos $c_2 = 0$ ($c_4 = 0$):

$$\boxed{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln r} \quad \left| \quad \boxed{G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi\rho}} \right.$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \quad \left| \quad \rho = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \right.$$

$$= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad \left| \quad = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \right.$$

(9.5.28)

Obsérvese que que estas funciones de Green son todas simétricas y tienen una singularidad en la misma posición de la fuente concentrada (esto no ocurre en una dimensión).

Para obtener la solución de la ecuación de Poisson, $\nabla^2 u = f(\mathbf{x})$, en todo el espacio, usando la función de Green de todo el espacio, necesitamos utilizar la fórmula de Green

$$\iint (u\nabla^2 G - G\nabla^2 u) dA \quad \Bigg| \quad \iiint (u\nabla^2 G - G\nabla^2 u) dV$$

$$= \oint (u\nabla G - G\nabla u) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \quad \Bigg| \quad = \oiint (u\nabla G - G\nabla u) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (9.5.29)$$

La integral de línea cerrada \oint (integral de superficie cerrada \oiint) representa integración sobre la frontera. Para problemas en todo el espacio en los que no hay frontera, debemos considerar circunferencias (esferas) grandes y tomar el límite cuando el radio tiende a infinito. Nos gustaría que la contribución de estas integrales cerradas “en el infinito” se anularan:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \oint (u\nabla G - G\nabla u) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0 \quad \Bigg| \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \oiint (u\nabla G - G\nabla u) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad (9.5.30)$$

En este caso, usando la ecuaciones diferenciales que definen a u y a G , integrando (9.5.29) con la delta de Dirac e invirtiendo los papeles de \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 [usando la simetría de $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$], obtenemos la fórmula de representación de la solución de la ecuación de Poisson en todo el espacio:

$$\boxed{u(\mathbf{x}) = \iint f(\mathbf{x}_0)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dA_0} \quad \Bigg| \quad \boxed{u(\mathbf{x}) = \iiint f(\mathbf{x}_0)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dV_0} \quad (9.5.31)$$

donde $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ está dada por (9.5.28).

La condición necesaria para que (9.5.30) sea válida se obtiene integrando en coordenadas polares (esféricas) centradas en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(u \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \quad \Bigg| \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^2 \left(u \frac{\partial G}{\partial \rho} - G \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = 0,$$

puesto que $ds = r d\theta$ [$dS = \rho^2 \sin \phi d\phi d\theta$; véase (11.2.46)]. Sustituyendo las funciones de Green calculadas, obtenemos las condiciones que deben satisfacerse en el ∞ para que los términos de “frontera” se anulen allí:

$$\boxed{\lim_{r \rightarrow \infty} \left(u - r \ln r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0} \quad \Bigg| \quad \boxed{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(u + \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = 0.} \quad (9.5.32)$$

Estas condiciones son importantes. Por ejemplo, se verifican si $u \sim 1/r$ ($u \sim 1/\rho$) cuando $r \rightarrow \infty$ ($\rho \rightarrow \infty$).

9.5.7. Función de Green para dominios acotados usando la función de Green de todo el espacio

En esta subsección veremos cómo encontrar la función de Green,

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (9.5.33)$$

sobre un dominio acotado *bidimensional*, sujeta a condiciones de contorno homogéneas. Ya hemos discutido algunos métodos de resolución sólo para el caso de geometrías sencillas; incluso éstas requieren una cantidad considerable de cálculos. Sin embargo, ahora conocemos una solución particular de (9.5.33), la función de Green de todo el espacio

$$G_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln r = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (9.5.34)$$

Desafortunadamente, esta función no verificará las condiciones homogéneas de contorno. En su lugar, consideraremos la función

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| + v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0), \quad (9.5.35)$$

donde $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ representa el efecto de la frontera: será una solución de la ecuación de Laplace $\nabla^2 v = 0$ sujeta a ciertas condiciones de contorno no homogéneas. Por ejemplo, si $G = 0$ sobre la frontera, entonces $v = -(1/2\pi) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ sobre la frontera. La función $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ puede calcularse por métodos estándar para la ecuación de Laplace basados en la separación de variables (si la geometría del dominio lo permite). En general, puede ser bastante complicado calcular $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$; no obstante, esta representación de la función de Green es bastante importante. En particular, puesto que $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ se comportará bien en todas partes, incluyendo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, (9.5.35) demuestra que **la función de Green de un dominio acotado tendrá la misma singularidad en la localización de la fuente $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ que la función de Green de todo el espacio**. Esto puede explicarse con un razonamiento físico: la respuesta en un punto a causa de una fuente concentrada cercana no debería depender significativamente de la frontera. La técnica representada por (9.5.35) separa la singularidad.

9.5.8. Función de Green para un semiplano ($y > 0$) usando la función de Green de todo el espacio: el método de las imágenes

La función de Green de todo el espacio puede usarse para obtener las funciones de Green de ciertos problemas semiinfinitos. Consideremos la ecuación de Poisson

en la región semiinfinita bidimensional $y > 0$:

$$\boxed{\nabla^2 u = f(\mathbf{x})}, \tag{9.5.36}$$

sujeta a condiciones no homogéneas (temperatura dada) sobre $y = 0$:

$$\boxed{u(x, 0) = h(x)}. \tag{9.5.37}$$

Por definición, la función de Green verifica la ecuación

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{9.5.38}$$

y satisface las condiciones homogéneas de contorno asociadas,

$$G(x, 0; x_0, y_0) = 0, \tag{9.5.39}$$

como se ilustra en la Figura 9.5.3. Usaremos aquí la notación

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G(x, y; x_0, y_0).$$

El semiplano ($y > 0$) no tiene fuentes, excepto una concentrada en el punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. La función de Green de todo el espacio, $(1/2\pi) \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$, no es satisfactoria, puesto que no se anula sobre $y = 0$.

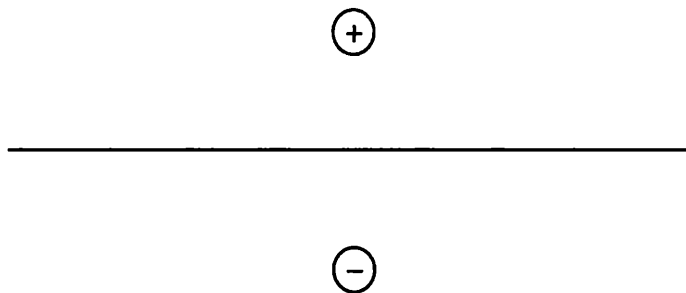


Figura 9.5.3: Fuente imagen para un semiplano.

Fuente imagen. Existe una forma sencilla de obtener una solución que se anule en $y = 0$. Consideremos un problema en todo el espacio (esto es, sin frontera) con fuente $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, y una fuente imagen negativa $-\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*)$ en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0^*$ (donde $\mathbf{x}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j}$ y $\mathbf{x}_0^* = x_0\hat{i} - y_0\hat{j}$):

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*). \tag{9.5.40}$$

De acuerdo con el principio de superposición para problemas no homogéneos, la respuesta debería ser la suma de dos respuestas individuales:

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| - \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|. \tag{9.5.41}$$

Por simetría, la respuesta en $y = 0$ debida a la fuente en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0^*$ debería ser opuesta a la respuesta en $y = 0$ a causa de la fuente en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, con lo que la suma debería anularse en $y = 0$ (como verificaremos dentro de poco). Llamamos a este procedimiento **método de las imágenes**. De este modo, hemos obtenido la función de Green para la ecuación de Poisson en el semiplano ($y > 0$):

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}. \quad (9.5.42)$$

Comprobemos que ésta es la solución deseada. La Ecuación (9.5.40), que es la que verifica la función (9.5.42), es distinta de (9.5.38). Sin embargo, en el semiplano superior ($y > 0$), $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*) = 0$, ya que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0^*$ está en el semiplano inferior. Por tanto, se verifica (9.5.38) en $y > 0$. Además, mostremos ahora que $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$ en $y = 0$:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)|_{y=0} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_0)^2 + y_0^2}{(x - x_0)^2 + y_0^2} = \frac{1}{4\pi} \ln 1 = 0.$$

Solución. Ahora, para resolver la ecuación de Poisson con condiciones no homogéneas de contorno, necesitaremos la fórmula de representación de la solución en términos de esta función de Green, (9.5.42). Usemos de nuevo la fórmula de Green. Necesitamos considerar una gran semicircunferencia y, en el límite cuando el radio tiende a infinito, tenemos

$$\iint (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u) dA = \oint (u \nabla G - G \nabla u) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left(G \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial G}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx,$$

puesto que la normal exterior unitaria es, en este caso, $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{j}}$, y ya que la contribución en ∞ tiende a anularse si $u \rightarrow 0$ suficientemente rápido [lo que se deduce, en particular, de (9.5.32) si $\lim_{r \rightarrow \infty} (u - r \ln r \partial u / \partial r) = 0$]. Sustituyendo las ecuaciones diferenciales que definen a u y a G , intercambiando los papeles de \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 , y usando la simetría de $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, obtenemos que

$$u(\mathbf{x}) = \iint f(\mathbf{x}_0) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dA_0 - \int_{-\infty}^{\infty} h(x_0) \frac{\partial}{\partial y_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \Big|_{y_0=0} dx_0, \quad (9.5.43)$$

puesto que $G = 0$ sobre $y = 0$. Esto podría haberse obtenido también directamente a partir de (9.5.23). Usando ahora (9.5.42) vemos que $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ viene dada por

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} [\ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) - \ln((x - x_0)^2 + (y + y_0)^2)].$$

Por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial y_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{-2(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} - \frac{2(y + y_0)}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} \right].$$

Evaluando esta expresión en $y_0 = 0$ (que corresponde a una fuente puntual sobre la frontera), obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \Big|_{y_0=0} = -\frac{y/\pi}{(x-x_0)^2 + y^2}. \tag{9.5.44}$$

Éste es un ejemplo de fuente dipolar (véase la Sección 9.5.5).

Ejemplo. Consideremos la ecuación de Laplace para el semiplano ($y > 0$):

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0, \\ u(x, 0) &= h(x). \end{aligned} \tag{9.5.45}$$

Podemos utilizar la Ecuación (9.5.43) con un término de fuente nulo. En este caso, la solución se debe únicamente a las condiciones de contorno no homogéneas. Usando la derivada respecto de la normal de la función de Green, (9.5.44), obtenemos que

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x_0) \frac{1}{(x-x_0)^2 + y^2} dx_0. \tag{9.5.46}$$

La función de influencia para la condición de contorno $h(x)$ no es la función de Green, sino

$$-\frac{\partial}{\partial y_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \Big|_{y_0=0} = \frac{y}{\pi [(x-x_0)^2 + y^2]}.$$

En el Capítulo 10, obtendremos la misma respuesta usando la técnica de la transformada de Fourier, en lugar de usar funciones de Green.

Fronteras aisladas. Si la condición de contorno para la función de Green es del tipo de condiciones aisladas en $y = 0$, $(\partial G / \partial y)(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)|_{y=0} = 0$, entonces deberíamos usar una fuente imagen positiva en $y < 0$. De este modo, colocaremos fuentes iguales de energía térmica en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0^*$. Por simetría no habrá flujo de calor a través de $y = 0$, como se deseaba. Se pedirá obtener la solución resultante en uno de los ejercicios.

9.5.9. Función de Green para un círculo: el método de las imágenes

También podemos obtener la función de Green para la ecuación de Poisson en un círculo de radio a (con condiciones de contorno nulas),

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \tag{9.5.47}$$

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0, \quad \text{si} \quad |\mathbf{x}| = a, \quad (9.5.48)$$

usando el método de las imágenes. La idea es que por razones geométricas existe una imagen puntual $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0^*$ (como se esboza en la Figura 9.5.4) tal que la respuesta sobre la circunferencia $|\mathbf{x}| = a$ es constante. Consideremos la función de Green de todo el espacio que corresponde a una fuente en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ y una fuente imagen negativa en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0^*$, donde no hemos definido \mathbf{x}_0^* todavía:

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*). \quad (9.5.49)$$

De acuerdo con el principio de superposición, la solución será la suma de dos funciones de Green de todo el espacio. Introducimos también una solución constante homogénea de la ecuación de Laplace, de modo que

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| - \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*| + c = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|^2} + c. \quad (9.5.50)$$

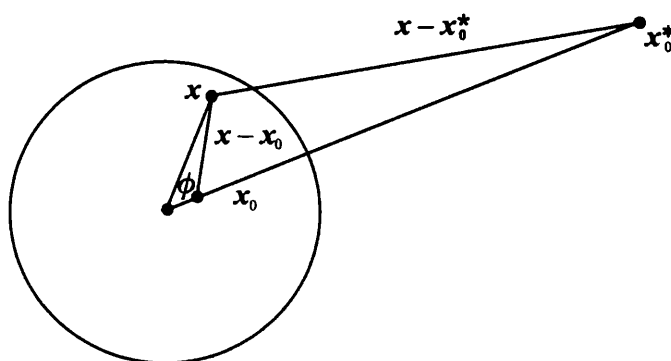


Figura 9.5.4: Función de Green para la ecuación de Poisson sobre un círculo (fuente imagen).

Probaremos que existe un punto \mathbf{x}_0^* , tal que la función $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ que viene dada por (9.5.50) se anula sobre la circunferencia $|\mathbf{x}| = a$. Para que esto ocurra, es necesario que sea

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 = k |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|^2, \quad (9.5.51)$$

cuando $|\mathbf{x}| = a$ (donde $c = -1/4\pi \ln k$).

Demostremos que existe un punto imagen \mathbf{x}_0^* sobre la misma línea radial que la fuente puntual \mathbf{x}_0 , como se ilustra en la Figura 9.5.4:

$$\mathbf{x}_0^* = \gamma \mathbf{x}_0. \quad (9.5.52)$$

Introduzcamos el ángulo ϕ entre \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 (el mismo ángulo que entre \mathbf{x} y \mathbf{x}_0^*). Entonces, obtenemos las fórmulas

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}_0|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0 \\ &= |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}_0|^2 - 2|\mathbf{x}||\mathbf{x}_0| \cos \phi, \\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|^2 &= (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}_0^*|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_0^* \\ &= |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}_0^*|^2 - 2|\mathbf{x}||\mathbf{x}_0^*| \cos \phi, \end{aligned} \quad (9.5.53)$$

conocidas como *teorema del coseno*. Así pues, usando (9.5.52), vemos que la Ecuación (9.5.51) sólo será válida sobre la circunferencia $|\mathbf{x}| = a$ si

$$a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \phi = k (a^2 + \gamma^2 r_0^2 - 2a\gamma r_0 \cos \phi),$$

donde $r_0 = |\mathbf{x}_0|$. Esta relación debe verificarse para todos los ángulos ϕ , lo que requiere que γ y k satisfagan las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} a^2 + r_0^2 &= k (a^2 + \gamma^2 r_0^2), \\ -2ar_0 &= k (-2a\gamma r_0). \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que debe ser $k = 1/\gamma$ y, por tanto

$$a^2 + r_0^2 = \frac{1}{\gamma} a^2 + \gamma r_0^2, \quad \text{es decir,} \quad \gamma = \frac{a^2}{r_0^2}.$$

Por tanto, el punto imagen debe estar localizado en

$$\mathbf{x}_0^* = \frac{a^2}{r_0^2} \mathbf{x}_0.$$

Obsérvese que $|\mathbf{x}_0^*| = a^2/r_0$ (el producto de los radios de los puntos fuente e imagen es igual al cuadrado del radio del círculo), por lo que, cuanto más cercano esté \mathbf{x}_0 del centro del círculo, más lejos estará el punto imagen.

Función de Green. A partir de la relación $k = 1/\gamma = r_0^2/a^2$, obtenemos la función de Green

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 a^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^*|^2 r_0^2} \right).$$

Usando el teorema del coseno, (9.5.53), esta función es

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{a^2}{r_0^2} \frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi}{r^2 + r_0^{*2} - 2rr_0^* \cos \phi} \right),$$

donde $r = |\mathbf{x}|$, $r_0 = |\mathbf{x}_0|$ y $r_0^* = |\mathbf{x}_0^*|$. Puesto que $r_0^* = a^2/r_0$,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{a^2}{r_0^2} \frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi}{r^2 + a^4/r_0^2 - 2ra^2/r_0 \cos \phi} \right),$$

o equivalentemente

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \left(a^2 \frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi}{r^2 r_0^2 + a^4 - 2rr_0 a^2 \cos \phi} \right),$$

(9.5.54)

donde ϕ es el ángulo entre \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 , $r = |\mathbf{x}|$ y $r_0 = |\mathbf{x}_0|$. En particular, podemos ver que sobre la circunferencia $r = a$, se tiene $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = 0$.

Solución. La solución de la ecuación de Poisson se representa directamente en términos de la función de Green. Recordemos la fórmula general (9.5.23),

$$u(\mathbf{x}) = \iint f(\mathbf{x}_0)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dA_0 + \oint h(\mathbf{x}_0)\nabla_{\mathbf{x}_0}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\cdot\hat{\mathbf{n}} ds. \quad (9.5.55)$$

En nuestro caso, podemos evaluar la integral de línea sobre la circunferencia frontera. Para ello, lo mejor es usar coordenadas polares ($ds = a d\theta_0$), con lo que

$$\oint h(\mathbf{x}_0)\nabla_{\mathbf{x}_0}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\cdot\hat{\mathbf{n}} ds = \int_0^{2\pi} h(\theta_0)\frac{\partial}{\partial r_0}G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\Big|_{r_0=a} a d\theta_0, \quad (9.5.56)$$

donde $r_0 = |\mathbf{x}_0|$. De (9.5.54) se sigue que

$$\frac{\partial G}{\partial r_0} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{2r_0 - 2r \cos \phi}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi} - \frac{2r^2r_0 - 2ra^2 \cos \phi}{r^2r_0^2 + a^4 - 2rr_0a^2 \cos \phi} \right).$$

La evaluación de esta expresión en las fuentes puntuales sobre la circunferencia $r_0 = a$ nos da

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial r_0}\Big|_{r_0=a} &= \frac{1}{4\pi} \frac{2a - 2r \cos \phi - (2r^2/a - 2r \cos \phi)}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi} \\ &= \frac{a}{2\pi} \frac{1 - (r/a)^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cos \phi}, \end{aligned} \quad (9.5.57)$$

donde ϕ es el ángulo entre \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 . Si usamos coordenadas polares para \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 , entonces $\phi = \theta - \theta_0$, como se ilustra en la Figura 9.5.5.

Ejemplo. Para la ecuación de Laplace, $\nabla^2 u = 0$ (esto es, $f(\mathbf{x}) = 0$ en la ecuación de Poisson) en un círculo, con $u(x, y) = h(\theta)$ en $r = a$, obtenemos, a partir de (9.5.55) - (9.5.57) en coordenadas polares, la fórmula

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta_0) \frac{a^2 - r^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \theta_0)} d\theta_0, \quad (9.5.58)$$

que se conoce como **fórmula de Poisson**. Recordemos que ya obtuvimos una solución de la ecuación de Laplace usando el método de separación de variables (véase la Sección 2.5.2). La solución en serie que se obtuvo por ese camino puede sumarse para obtener la fórmula de Poisson (véase el Ejercicio 9.5.18).

EJERCICIOS 9.5

- 9.5.1.** Consideremos el desarrollo en autofunciones (9.5.11) de la función de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. Supongamos que $\nabla^2 G$ puede desarrollarse en autofunciones. Verificar, usando la fórmula de Green, que $\nabla^2 G$ puede obtenerse por diferenciación término a término de (9.5.11).

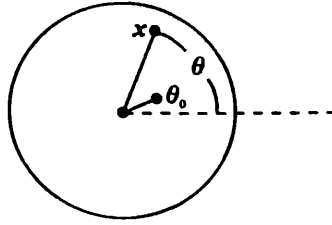


Figura 9.5.5: Coordenadas polares.

9.5.2. (a) Resolver, usando el método del desarrollo en autofunciones, la ecuación

$$\nabla^2 u = f(x, y),$$

sobre un rectángulo ($0 < x < L, 0 < y < H$) con $u = 0$ sobre la frontera.

(b) Escribir la solución en la forma

$$u(\mathbf{x}) = \int_0^L \int_0^H f(\mathbf{x}_0) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dx_0 dy_0.$$

Demostrar que $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ es la función de Green obtenida previamente.

9.5.3. Determinar $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, usando el método (multidimensional) de desarrollo en autofunciones, si

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

y el dominio es:

(a) El rectángulo ($0 < x < L, 0 < y < H$), con los datos

$$\begin{aligned} G = 0, & \quad \text{en } x = 0, & \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 0, & \quad \text{en } y = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} = 0, & \quad \text{en } x = L, & \quad \frac{\partial G}{\partial y} = 0, & \quad \text{en } y = H. \end{aligned}$$

(b) La caja de forma rectangular ($0 < x < L, 0 < y < H, 0 < z < W$), con $G = 0$ sobre los seis lados.

* (c) El semicírculo ($0 < r < a, 0 < \theta < \pi$), con $G = 0$ sobre toda la frontera.

(d) El cuarto de círculo ($0 < r < a, 0 < \theta < \pi/2$), con $G = 0$ sobre los lados rectos y $\partial G / \partial r = 0$ en $r = a$.

*9.5.4. Consideremos la ecuación de Poisson $\nabla^2 u = f$, en una región tridimensional arbitraria, con $u = h(\mathbf{x})$ sobre la frontera. Representar $u(\mathbf{x})$ en términos de la función de Green (suponiendo que esta última es conocida).

9.5.5. Considérese, dentro de un círculo de radio a , la ecuación $\nabla^2 u = f$ con las condiciones

$$\begin{aligned} u(a, \theta) &= h_1(\theta), & \text{si } 0 < \theta < \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(a, \theta) &= h_2(\theta), & \text{si } -\pi < \theta < 0. \end{aligned}$$

Representar $u(r, \theta)$ en términos de la función de Green (suponiendo que esta última es conocida).

9.5.6. Consideremos la ecuación de Poisson $\nabla^2 u = f$ en dos dimensiones, con condiciones de contorno homogéneas. Supóngase que ϕ_h es una solución homogénea, es decir, $\nabla^2 \phi_h = 0$, que verifica las mismas condiciones de contorno homogéneas. Recuérdese que puede haber más de una función ϕ_h .

- (a) Demostrar que no existen soluciones $u(\mathbf{x})$ si $\iint f(\mathbf{x})\phi_h(\mathbf{x}) dA \neq 0$ para toda $\phi_h(\mathbf{x})$.
- (b) Demostrar que existe un número infinito de soluciones si $\iint f(\mathbf{x})\phi_h(\mathbf{x}) dA = 0$.

9.5.7. Considérese el problema en tres dimensiones

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u &= f(\mathbf{x}), \\ \nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.5.59)$$

- (a) Demostrar que $\phi_h = 1$ es una solución homogénea que verifica las condiciones de contorno homogéneas.
- (b) ¿Bajo qué condición existe solución de (9.5.59)?
- (c) ¿Qué problema define una función de Green modificada para (9.5.59)? (No se debe intentar determinar una función de Green modificada.)
- (d) Supóngase que la función de Green modificada es simétrica. Deducir una fórmula de representación para $u(\mathbf{x})$ en términos de esta función de Green modificada.

9.5.8. Rehacer el Ejercicio 9.5.7 si sobre la frontera se tiene $\nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} = h(\mathbf{x})$.

9.5.9. Determinar la solución $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ de la ecuación

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

usando el método unidimensional del desarrollo en autofunciones, para los dominios siguientes.

- (a) El rectángulo ($0 < x < L$, $0 < y < H$), con los datos

$$\begin{aligned} G &= 0, & \text{en } x &= 0, & \frac{\partial G}{\partial y} &= 0, & \text{en } y &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= 0, & \text{en } x &= L, & \frac{\partial G}{\partial y} &= 0, & \text{en } y &= H. \end{aligned}$$

Usar autofunciones que dependan de la variable y .

- * (b) El semicírculo ($0 < r < a$, $0 < \theta < \pi$), con $G = 0$ sobre toda la frontera. Usar autofunciones que dependan de la variable θ .

***9.5.10.** Consideremos la ecuación de ondas con una fuente periódica de frecuencia $\omega > 0$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi + g(\mathbf{x})e^{-i\omega t}.$$

Demostrar que una solución particular de la misma frecuencia, $\phi = u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, verifica la ecuación de Helmholtz no homogénea

$$\nabla^2 u + k^2 u = f(\mathbf{x}).$$

Determinar k^2 y $f(\mathbf{x})$. La función de Green verifica

$$\nabla^2 G + k^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

- (a) ¿Cuál es la fórmula de Green para el operador $\nabla^2 + k^2$?
- (b) Demostrar que, en todo el espacio (tridimensional)

$$G = \frac{c_1 e^{ik\rho} + c_2 e^{-ik\rho}}{\rho}.$$

Elegir c_1 y c_2 de modo que la correspondiente $\phi(\mathbf{x}, t)$ sea una onda que se propague *alejándose*.

- (c) Demostrar que, en todo el espacio (bidimensional), la función de Green es una combinación lineal de funciones de Bessel. Determinar las constantes de modo que la correspondiente $\phi(\mathbf{x}, t)$ sea, para r suficientemente grande, una onda que se propague *alejándose*. *Indicación:* utilizar las fórmulas asintóticas (7.7.33) y (7.8.3).

9.5.11. (a) Determinar la función de Green en $y > 0$ (en dos dimensiones) para la ecuación $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ sujeta a $\partial G / \partial y = 0$ sobre $y = 0$. *Indicación:* considérese una fuente positiva en \mathbf{x}_0 y una fuente imagen positiva en \mathbf{x}_0^* .

- (b) Usar el apartado (a) para resolver $\nabla^2 u = f(\mathbf{x})$ con

$$\frac{\partial u}{\partial y} = h(x), \quad \text{en } y = 0.$$

Ignorar la contribución en el infinito.

9.5.12. Modificar el Ejercicio 9.5.11 para la región $y < 0$.

***9.5.13.** Modificar el Ejercicio 9.5.11 si la región es tridimensional con $y > 0$ [obsérvese que la función $h(x)$ del apartado (b) debe sustituirse por $h(x, z)$].

***9.5.14.** Resolver, usando el método de las imágenes, la ecuación

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

en el primer cuadrante ($x \geq 0$ e $y \geq 0$), con $G = 0$ sobre la frontera.

- 9.5.15.** (a) Rehacer el Ejercicio 9.5.14 si $G = 0$ en $x = 0$ y $\partial G/\partial y = 0$ en $y = 0$.
 (b) Usar el apartado (a) para resolver, en la región $x \geq 0, y \geq 0$, el problema

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= f(x, y), \\ u(0, y) &= g(y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= h(x).\end{aligned}$$

- 9.5.16.** (a) Resolver, usando el método de las imágenes, la ecuación

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

en la región con forma de cuña de 60° , $0 < \theta < \pi/3$, $0 < r < \infty$, con $G = 0$ sobre toda la frontera.

- (b) ¿Para qué otras regiones con forma de cuña puede usarse el método de las imágenes?

- 9.5.17.** Una función de Green modificada, $G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, verifica

$$\nabla^2 G_m = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + c,$$

con

$$\nabla G_m \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0,$$

sobre la frontera del rectángulo ($0 < x < L$, $0 < y < H$).

- (a) Demostrar que el método del desarrollo en autofunciones (bidimensional) sólo funciona si $c = -1/LH$. Para este valor de c , determinar $G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. Si es posible, hacer que $G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ sea simétrica.
 (b) Demostrar que el método del desarrollo en autofunciones (unidimensional) sólo funciona si $c = -1/LH$. Para este valor de c , determinar $G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. Si es posible, hacer que $G_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ sea simétrica.

- 9.5.18.** Resolver, usando el método de separación de variables, la ecuación $\nabla^2 u = 0$ en un círculo de radio a , con $u(x, y) = h(\theta)$ en $r = a$. Demostrar que

$$u(r, \theta) = \int_0^{2\pi} h(\theta_0) I(r, \theta, \theta_0) d\theta_0.$$

Demostrar que la serie que expresa a $I(r, \theta, \theta_0)$ puede sumarse, lo que nos conduce a la fórmula de Poisson (9.5.58).

- *9.5.19.** Determinar la función de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ dentro del semicírculo ($0 < r < a, 0 < \theta < \pi$),

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

con $G = 0$ sobre toda la frontera.

9.5.20. Modificar el Ejercicio 9.5.19 si $G = 0$ sobre $r = a$ pero $\partial G/\partial\theta = 0$ sobre $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

9.5.21. Determinar la función de Green, $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, en la bola de radio a ,

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

con $G = 0$ sobre la frontera.

9.5.22. Usar el método de las imágenes múltiples para obtener la función de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

(a) sobre el rectángulo ($0 < x < L$, $0 < y < H$), si $G = 0$ en $x = 0$ y $x = L$ y $\partial G/\partial y = 0$ en $y = 0$ e $y = H$;

(b) sobre la banda ($0 < x < L$, $-\infty < y < \infty$), si $G = 0$ en $x = 0$ y $\partial G/\partial x = 0$ en $x = L$;

*(c) sobre la banda ($0 < x < L$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$), si $G = 0$ en $x = 0$ y $G = 0$ en $x = L$;

(d) sobre la semibanda ($0 < x < L$, $0 < y < \infty$), si $G = 0$ a lo largo de las fronteras;

(e) sobre la semibanda ($0 < x < L$, $-\infty < y < 0$), si $G = 0$ en $x = 0$, $G = 0$ en $x = L$ y $\partial G/\partial y = 0$ en $y = 0$.

9.5.23. Determinar una solución particular de

$$\nabla^2 u = f(\mathbf{x}),$$

en todo el plano, si $f(\mathbf{x}) = g(r)$, donde $r = |\mathbf{x}|$, por los métodos siguientes:

(a) Usando la función de Green de todo el plano (9.5.28).

(b) Usando una función de Green para la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = g(r).$$

(c) Comparar los resultados obtenidos en los apartados (a) y (b).

9.6. Problemas de autovalores perturbados

9.6.1. Introducción

Cuando se realiza un pequeño cambio (llamado una **perturbación**) en un problema que sabemos cómo resolver, entonces puede ocurrir que el problema resultante no tenga una solución exacta sencilla. Vamos a desarrollar ahora un procedimiento aproximado (asintótico) para analizar el problema perturbado de autovalores.

Puesto que podremos encontrarnos con problemas de contorno no homogéneos con soluciones homogéneas no triviales, el estudio que realizamos en la Sección 9.4 sobre la alternativa de Fredholm resultará útil. Empezaremos con un ejemplo matemático elemental antes de considerar el caso más interesante de una membrana circular perturbada.

9.6.2. Ejemplo matemático

El ejemplo más sencillo de un problema de autovalores perturbado es

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + (\lambda + \epsilon f(x)) \phi = 0, \quad (9.6.1)$$

con

$$\phi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \phi(L) = 0. \quad (9.6.2)$$

Si $\epsilon = 0$, éste es el problema usual de autovalores [$\lambda = (n\pi/L)^2$, $\phi = \text{sen } n\pi x/L$]. Si ϵ es un pequeño parámetro no nulo, entonces el coeficiente se desvía de una constante por una pequeña cantidad dada, $\epsilon f(x)$. Es conocido que los autovalores y autofunciones son funciones de ϵ que se comportan bien:

$$\lambda = \lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \dots \quad \text{y} \quad \phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + \dots \quad (9.6.3)$$

Esto se llama **desarrollo perturbativo**. Sustituyendo (9.6.3) en (9.6.1), obtenemos

$$\frac{d^2}{dx^2} (\phi_0 + \epsilon \phi_1 + \dots) + [\lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \dots + \epsilon f(x)] (\phi_0 + \epsilon \phi_1 + \dots) = 0. \quad (9.6.4)$$

La Ecuación (9.6.4) es válida para todo ϵ . Los términos sin ϵ deben ser iguales a cero (pues ello resulta de hacer $\epsilon = 0$). Por tanto,

$$\frac{d^2 \phi_0}{dx^2} + \lambda_0 \phi_0 = 0. \quad (9.6.5)$$

Las condiciones de contorno [obtenidas sustituyendo (9.6.3) en (9.6.2)] son $\phi_0(0) = 0$ y $\phi_0(L) = 0$. Consecuentemente, como se espera, los autovalores *principales* λ_0 y las autofunciones asociadas ϕ_0 son las mismas que las del problema sin perturbar ($\epsilon = 0$):

$$\lambda_0 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{y} \quad \phi_0 = \text{sen } \frac{n\pi x}{L}, \quad (9.6.6)$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$. Obsérvese que una notación más precisa sería $\lambda_n^{(0)}$.

Los términos en ϵ en (9.6.4) también deben anularse:

$$\frac{d^2 \phi_1}{dx^2} + \lambda_0 \phi_1 = -f(x) \phi_0 - \lambda_1 \phi_0, \quad (9.6.7)$$

donde de (9.6.2) se sigue

$$\phi_1(0) = 0 \quad \text{y} \quad \phi_1(L) = 0. \quad (9.6.8)$$

Ésta es una ecuación diferencial no homogénea con condiciones de contorno homogéneas. Notemos que $\phi_0 = \sin n\pi x/L$ es una solución homogénea no trivial que verifica las condiciones de contorno homogéneas. Por tanto, por la alternativa de Fredholm, existe una solución de (9.6.7) - (9.6.8) sólo si el miembro derecho de (9.6.7) es ortogonal a ϕ_0 :

$$0 = \int_0^L f(x)\phi_0^2 dx + \lambda_1 \int_0^L \phi_0^2 dx. \quad (9.6.9)$$

Así, a partir de (9.6.9), determinamos la perturbación resultante del autovalor:

$$\lambda_1 = -\frac{\int_0^L f(x)\phi_0^2 dx}{\int_0^L \phi_0^2 dx} = -\frac{2}{L} \int_0^L f(x)\phi_0^2 dx. \quad (9.6.10)$$

Podríamos haber aplicado el método de desarrollo en autofunciones a (9.6.7) - (9.6.8) en lugar de usar la alternativa de Fredholm. La ventaja de este otro camino es que habríamos obtenido no sólo λ_1 , que viene dado por (9.6.10), sino también ϕ_1 .

9.6.3. Membrana vibrante de forma casi circular

Para estudiar un problema físico que involucra ideas similares, consideremos las vibraciones de una membrana de forma casi circular con impurezas en su masa. Ya hemos determinado (véase la Sección 6.7) las frecuencias naturales de una membrana circular con densidad de masa constante. Queremos conocer cómo cambian estas frecuencias debido a pequeños cambios tanto en la densidad como en la geometría. En general, una membrana vibrante verifica la ecuación de ondas bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u, \quad (9.6.11)$$

donde $c^2 = T/\rho$ puede ser una función de r y θ . Supongamos que $u = 0$ sobre la frontera. Separando variables, $u(r, \theta, t) = \phi(r, \theta)h(t)$, obtenemos

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda h \quad \text{y} \quad \nabla^2 \phi = -\frac{\lambda}{c^2} \phi. \quad (9.6.12)$$

Aquí, las constantes de separación λ son tales que $\sqrt{\lambda}$ son las frecuencias naturales de oscilación. Sabemos cómo resolver este problema (véase la Sección 6.7) si c^2 es constante y la membrana es circular. Sin embargo, ahora queremos considerar el caso en que la densidad de masa constante está ligeramente perturbada (por ejemplo, debido a pequeñas imperfecciones), $\rho = \rho_0 + \epsilon\rho_1(r, \theta)$, donde la perturbación de la

densidad $\epsilon\rho_1(r, \theta)$ está dada y ϵ es un parámetro muy pequeño ($0 < |\epsilon| \ll 1$). Por tanto,

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{T} = \frac{\rho_0 + \epsilon\rho_1(r, \theta)}{T} = \frac{1}{c_0^2} + \epsilon \frac{\rho_1(r, \theta)}{T},$$

donde c_0 es la velocidad del sonido para una membrana uniforme. El problema de autovalores perturbado consiste en resolver la ecuación en derivadas parciales

$$\nabla^2\phi = -\lambda \left(\frac{1}{c_0^2} + \epsilon \frac{\rho_1(r, \theta)}{T} \right) \phi, \quad (9.6.13)$$

sujeta a la condición $\phi = 0$ sobre la frontera:

$$\phi(a + \epsilon g(\theta), \theta) = 0, \quad (9.6.14)$$

puesto que expresamos una perturbación de una circunferencia como $r = a + \epsilon g(\theta)$ con $g(\theta)$ dada.

Condición de contorno. La condición de contorno (9.6.14) es algo más difícil; podemos desear considerar el caso sencillo en que la frontera es circular ($r = a$ o $g(\theta) = 0$). En general, $\phi = 0$ a lo largo de una frontera complicada, que está cercana a la frontera más sencilla $r = a$. Esto sugiere que usemos una serie de Taylor, en cuyo caso (9.6.14) puede reemplazarse por

$$\phi + \epsilon g(\theta) \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\epsilon^2 g^2(\theta)}{2!} \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \dots = 0, \quad (9.6.15)$$

evaluada en $r = a$.

Desarrollo perturbativo. Para resolver (9.6.13) - (9.6.15) supondremos que los autovalores y autofunciones dependen del pequeño parámetro ϵ , de modo que

$$\phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \dots \quad \text{y} \quad \lambda = \lambda_0 + \epsilon\lambda_1 + \dots \quad (9.6.16)$$

Sustituyamos (9.6.16) en (9.6.13) y (9.6.15). Los términos de orden ϵ^0 son

$$\nabla^2\phi_0 = -\frac{\lambda_0\phi_0}{c_0^2}, \quad (9.6.17)$$

con $\phi_0 = 0$ en $r = a$. Por tanto, los valores de λ_0 son los autovalores conocidos del problema sin perturbar y ϕ_0 las autofunciones asociadas conocidas para una membrana circular con densidad de masa uniforme ρ_0 (véase la Sección 6.7). Estamos más interesados en determinar λ_1 , el principal de la perturbación de cada autovalor a causa de la pequeña perturbación introducida en la densidad y en la forma del

dominio. Determinaremos λ_1 mediante las ecuaciones para ϕ_1 , que se obtienen comparando los términos en ϵ , al sustituir el desarrollo perturbativo (9.6.16) en (9.6.13) y (9.6.15):

$$\nabla^2 \phi_1 + \frac{\lambda_0}{c_0^2} \phi_1 = -\frac{\lambda_1}{c_0^2} \phi_0 - \frac{\lambda_0}{T} \rho_1(r, \theta) \phi_0, \quad (9.6.18)$$

con la condición de contorno (en $r = a$)

$$\phi_1 = -g(\theta) \frac{\partial \phi_0}{\partial r}. \quad (9.6.19)$$

El miembro derecho de (9.6.18) contiene la perturbación conocida de la densidad ρ_1 y la perturbación desconocida de cada autovalor λ_1 , mientras que el miembro derecho de (9.6.19) involucra la perturbación conocida de la forma $[r = a + \epsilon g(\theta)]$.

Condición de compatibilidad. El problema de contorno (9.6.18) - (9.6.19) está formado por una ecuación en derivadas parciales no homogénea y una condición de contorno no homogénea. Pero lo más importante es que existe una solución homogénea no trivial, $\phi_{1h} = \phi_0$; la autofunción de orden principal verifica la ecuación en derivadas parciales *homogénea correspondiente* y las condiciones de contorno *homogéneas* [véase (9.6.17)]. Por tanto, existe una solución de (9.6.18) - (9.6.19) solamente si se verifica la ecuación de compatibilidad. Esta ecuación se obtiene fácilmente usando la fórmula de Green (con $u = \phi_0$ y $v = \phi_1$):

$$\iint [\phi_0 L(\phi_1) - \phi_1 L(\phi_0)] dA = \oint (\phi_0 \nabla \phi_1 - \phi_1 \nabla \phi_0) \cdot \hat{n} ds. \quad (9.6.20)$$

El miembro derecho de (9.6.20) no se anula, puesto que ϕ_1 no verifica las condiciones de contorno homogéneas. Usando (9.6.17) y (9.6.18) - (9.6.19) obtenemos la condición de compatibilidad

$$-\iint \phi_0 \left(\frac{\lambda_1}{c_0^2} \phi_0 + \frac{\lambda_0}{T} \rho_1(r, \theta) \phi_0 \right) dA = \oint g(\theta) \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \nabla \phi_0 \cdot \hat{n} ds. \quad (9.6.21)$$

Podemos determinar fácilmente el autovalor perturbado λ_1 a partir de (9.6.21):

$$\lambda_1 = \frac{\frac{\lambda_0}{T} \iint \rho_1(r, \theta) \phi_0^2 r dr d\theta + \int_0^{2\pi} g(\theta) \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right)^2 a d\theta}{-\frac{1}{c_0^2} \iint \phi_0^2 r dr d\theta}, \quad (9.6.22)$$

usando $\nabla \phi_0 \cdot \hat{n} = \partial \phi_0 / \partial r$ (evaluado en $r = a$), $dA = r dr d\theta$, $ds = a d\theta$. Los autovalores decrecen si la densidad aumenta ($\rho_1 > 0$) o si la membrana se amplía [$g(\theta) > 0$].

Como se pide resolver en los ejercicios, este resultado es válido sólo si existe una autofunción ϕ_0 asociada al autovalor λ_0 . De hecho, en el caso de una membrana circular, generalmente existen dos autofunciones asociadas a cada autovalor (las que provienen de $\sin m\theta$ y $\cos m\theta$) y debemos considerar las dos.

Si estuviéramos interesados en ϕ_1 , podríamos obtenerla ahora a partir de (9.6.18) usando el método del desarrollo en autofunciones. Sin embargo, en muchas aplicaciones, son los autovalores perturbados (que en este contexto son las frecuencias) los que tienen mayor importancia.

Alternativa de Fredholm. Si $g(\theta) = 0$, entonces ϕ_0 y ϕ_1 verifican el mismo conjunto de condiciones homogéneas de contorno. En este caso, (9.6.21) es equivalente a la alternativa de Fredholm; es decir, existen soluciones del problema (9.6.18) - (9.6.19) si y sólo si el miembro derecho de (9.6.18) es ortogonal a la solución homogénea ϕ_0 . La Ecuación (9.6.21) muestra la modificación que debemos realizar en el caso de condiciones no homogéneas de contorno.

EJERCICIOS 9.6

9.6.1. Consideremos el problema de autovalores perturbado (9.6.1). Determinar las perturbaciones del autovalor λ_1 si

(a) $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(L) = 0$.

(b) $\phi(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(L) = 0$.

9.6.2. Rehacer el Ejercicio 9.6.1 y determinar las perturbaciones de los autovalores λ_1 y las autofunciones ϕ_1 usando el método del desarrollo en autofunciones, con las siguientes condiciones de contorno:

(a) $\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(L) = 0$.

(b) $\phi(0) = 0$ y $\frac{d\phi}{dx}(L) = 0$.

(c) $\phi(0) = 0$ y $\phi(L) = 0$.

9.6.3. Rehacer el Ejercicio 9.6.1, considerando ahora condiciones de contorno periódicas: $\phi(-L) = \phi(L)$ y $d\phi/dx(-L) = d\phi/dx(L)$. El problema de autovalores es **degenerado** para $n \neq 0$ si $\epsilon = 0$; esto significa que existe más de una autofunción ($\sin n\pi x/L$ y $\cos n\pi x/L$) asociada al mismo autovalor. *Determinar los autovalores perturbados λ_1 .* Demostrar que el autovalor único que existe para $\epsilon = 0$ **se escinde** en dos autovalores distintos cuando $\epsilon \neq 0$, cada uno con su autofunción (en sentido contrario, los dos autovalores distintos para $\epsilon \neq 0$ se **funden** en uno solo cuando $\epsilon \rightarrow 0$, que tiene dos autofunciones asociadas). *Indicación:* es necesario considerar una combinación lineal de las dos autofunciones correspondientes a $\epsilon = 0$. *Determinar, para cada autovalor, la combinación específica de estas autofunciones que es la única autofunción cuando $\epsilon \neq 0$.*

9.6.4. Rehacer el Ejercicio 9.6.1, sujeto a las condiciones de contorno $\phi(0) = 0$ y $\phi(L) = 0$. Realizar cálculos adicionales para obtener λ_2 . Imponer que las autofunciones estén normalizadas, es decir, $\int_0^L \phi^2 dx = 1$.

9.6.5. Considérese el problema de autovalores perturbado *de forma no lineal*:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \lambda \phi = \epsilon \phi^3,$$

con $\phi(0) = 0$ y $\phi(L) = 0$. Determinar la perturbación del autovalor λ_1 . Puesto que el problema es no lineal, la amplitud es importante. Supóngase que $\int_0^L \phi^2 dx = a^2$. Esbozar a como función de λ .

- 9.6.6.** Considerar una cuerda vibrante con tensión T aproximadamente uniforme y densidad de masa $\rho_0 + \epsilon \rho_1(x)$, sujeta a condiciones de contorno fijas en los extremos. Determinar los cambios en las frecuencias naturales inducidos por la variación de masa.
- 9.6.7.** Considerar una membrana uniforme de forma fija con frecuencias conocidas y modos naturales de vibración también conocidos, y supóngase que se perturba la densidad de masa. Determinar cómo resultan perturbadas las frecuencias. Se puede suponer que existe sólo un modo de vibración para cada frecuencia.
- 9.6.8.** En el caso de una membrana circular, determinar el cambio en las frecuencias naturales de las autofunciones radiales ($m = 0$) debido a pequeñas variaciones en la forma y en la masa.
- 9.6.9.** Considerar una membrana circular con $r = a$. La Fórmula (9.6.18) es válida para las autofunciones no radiales (es decir, con $m \neq 0$) poniendo $\phi_0 = c_1 \phi_0^{(1)} + c_2 \phi_0^{(2)}$, donde $\phi_0^{(1)}$ y $\phi_0^{(2)}$ son dos autofunciones mutuamente ortogonales asociadas al mismo autovalor λ_0 , y c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.
- (a) Obtener un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo que deben verificar c_1 y c_2 , a partir del hecho de que ϕ_1 tiene dos soluciones homogéneas, $\phi_0^{(1)}$ y $\phi_0^{(2)}$. Este sistema es la condición de compatibilidad para el problema (9.6.18) - (9.6.19).
- (b) Resolver el sistema lineal del apartado (a) para determinar las frecuencias perturbadas y los correspondientes modos naturales de vibración.

9.7. Resumen

Hemos resuelto algunos ejemplos de funciones de Green independientes del tiempo usando varias técnicas diferentes:

1. Límite de problemas dependientes del tiempo.
2. Variación de los parámetros (sólo para ecuaciones diferenciales ordinarias).
3. Desarrollo en autofunciones de la función de Green.
4. Solución directa de la ecuación diferencial que define a la función de Green.

5. Usando la función de Green de todo el espacio:
 - (a). Eliminando la singularidad.
 - (b). Por el método de las imágenes.

Para problemas independientes del tiempo, quizás la mejor técnica sea la que se basa en la función de Green de todo el espacio. Veremos que lo mismo es cierto para problemas dependientes de la variable temporal. En ese caso, en el Capítulo 10, tendremos que discutir técnicas adicionales para resolver ecuaciones en derivadas parciales en dominios no acotados. Por esa razón estudiaremos cómo obtener las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales homogéneas usando transformadas de Fourier. Posteriormente, en el Capítulo 11, volveremos a estudiar problemas no homogéneos para ecuaciones en derivadas parciales dependientes del tiempo, usando funciones de Green.

Capítulo 10

Problemas en dominios no acotados: soluciones de ecuaciones en derivadas parciales mediante la transformada de Fourier

10.1. Introducción

La mayoría de las ecuaciones en derivadas parciales que hemos analizado hasta ahora estaban definidas sobre dominios acotados (por ejemplo, el flujo de calor en una varilla de longitud finita o en distintas regiones acotadas en dimensiones dos y tres) y las soluciones que obtuvimos dependían de las condiciones sobre la frontera. En este capítulo, analizaremos problemas que son no acotados al menos en una dirección. Los problemas físicos nunca se plantean en dominios no acotados, pero al introducir un modelo matemático con extensión infinita, seremos capaces de determinar el comportamiento de problemas en los que se espera que la influencia de la frontera sea despreciable. Así pues, resolveremos problemas infinitos o semiinfinitos generalizando el método de separación de variables.

10.2. La ecuación del calor en un dominio no acotado

Empecemos considerando el problema de la conducción del calor en una dimensión sin la dificultad que supone la presencia de la frontera. En el caso más sencillo de propiedades térmicas constantes y sin fuentes, la temperatura $u(x, t)$ verifica la

ecuación del calor,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \quad (10.2.1)$$

definida para todo x , $-\infty < x < \infty$. Suponiendo que tenemos dada una temperatura inicial,

$$u(x, 0) = f(x), \quad (10.2.2)$$

queremos usar (10.2.1) para predecir la temperatura futura.

En el caso del problema en un intervalo finito, necesitamos condiciones de contorno en ambos extremos (generalmente $x = 0$ y $x = L$). Por el contrario, con frecuencia los problemas sobre un dominio no acotado ($-\infty < x < \infty$) parecen estar planteados sin ninguna condición de contorno, aunque generalmente existen condiciones físicas en $\pm\infty$, incluso sin haber sido enunciadas explícitamente. En el caso más sencillo suponemos que la distribución inicial de temperaturas $f(x)$ tiende a 0 cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Esto significa que *inicialmente*, para todo x suficientemente grande, la temperatura es aproximadamente nula. Físicamente, *en todo tiempo t* , la temperatura se aproxima a 0 cuando $x \rightarrow \pm\infty$:

$$u(-\infty, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(\infty, t) = 0.$$

De este modo, nuestro problema tiene condiciones de “contorno” homogéneas.

Separación de variables. Separemos variables como antes

$$u(x, t) = \phi(x)h(t), \quad (10.2.3)$$

de modo que

$$\frac{1}{kh} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda.$$

Esto nos conduce a las mismas dos ecuaciones diferenciales ordinarias que en el caso de tener una geometría acotada,

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda kh, \quad (10.2.4)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi. \quad (10.2.5)$$

Determinar la constante de separación λ no es difícil, pero sí que es muy sutil en este caso; proceder de la forma obvia será *un error*. Deberíamos esperar que las condiciones de contorno en $\pm\infty$ para $\phi(x)$ fueran $\phi(-\infty) = 0$ y $\phi(\infty) = 0$, pero veríamos rápidamente que no existen valores de λ para los que existan soluciones no triviales de $d^2\phi/dx^2 = -\lambda\phi$ que se aproximen a 0 en $x = \pm\infty$. Por ejemplo, para $\lambda > 0$ se tiene $\phi = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$, y estas soluciones *no* tienden a 0 cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Como comprobaremos más tarde, las *condición de contorno*

correcta para la parte espacial separada $\phi(x)$ en $x = \pm\infty$ es distinta de la condición de contorno para $u(x, t)$ en $x = \pm\infty$. De hecho, pediremos sólo que $\phi(x)$ esté acotada en $x = \pm\infty$, es decir, $|\phi(-\infty)| < \infty$ y $|\phi(\infty)| < \infty$. Esto es bastante extraño, pero luego mostraremos que aunque $|\phi(\pm\infty)| < \infty$, la solución final de la ecuación en derivadas parciales (tras aplicar el principio de superposición) verificará, en efecto, que $u(\pm\infty, t) = 0$.

Problema de autovalores. Postulamos, por tanto, que el problema de contorno en toda la recta es

$$\boxed{\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0,} \tag{10.2.6}$$

$$\boxed{|\phi(\pm\infty)| < \infty.} \tag{10.2.7}$$

Determinemos aquellos valores de λ para los que $|\phi(\pm\infty)| < \infty$. Si fuera $\lambda < 0$, la solución sería una combinación lineal de soluciones que crecen y decrecen exponencialmente, y sería imposible tener simultáneamente $|\phi(\pm\infty)| < \infty$; por tanto, no existen autovalores negativos. Sin embargo, para $\lambda > 0$ tenemos

$$\phi = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x,$$

y esta solución permanece acotada para todo x , independientemente del valor de $\lambda > 0$. Por tanto, todos los valores de $\lambda > 0$ son autovalores. Además, las autofunciones son tanto senos como cosenos (puesto que tanto c_1 como c_2 son arbitrarias). Podemos comprobar también que $\lambda = 0$ es un autovalor con autofunción constante. Lo que tenemos es muy similar a una serie de Fourier en la que tanto los senos como los cosenos (lo que incluye las constantes) son autofunciones. Sin embargo, en una serie de Fourier los autovalores son **discretos**, $\lambda = (n\pi/L)^2$, mientras que aquí todos los valores no negativos de λ están permitidos. El conjunto de autovalores de un problema se denomina, a veces, el espectro. En este caso, tenemos un **espectro continuo**, $\lambda \geq 0$ (en lugar de uno discreto).

Principio de superposición. La ecuación diferencial ordinaria que depende del tiempo se resuelve fácilmente, $h = ce^{-\lambda kt}$, con lo que obtenemos las siguientes soluciones producto:

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x e^{-\lambda kt} \quad \text{y} \quad \cos \sqrt{\lambda}x e^{-\lambda kt},$$

para todo $\lambda \geq 0$. El principio de superposición sugiere que podemos obtener otra solución por medio de la combinación lineal más general de estas funciones; en lugar de sumar sobre todos los $\lambda \geq 0$, integremos:

$$u(x, t) = \int_0^\infty [c_1(\lambda) \cos \sqrt{\lambda}x e^{-\lambda kt} + c_2(\lambda) \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x e^{-\lambda kt}] d\lambda,$$

donde $c_1(\lambda)$ y $c_2(\lambda)$ designan funciones arbitrarias de λ . Éste es un principio de superposición generalizado y puede comprobarse por sustitución directa que la integral verifica (10.2.1). Es frecuente poner $\lambda = \omega^2$, de modo que

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x e^{-k\omega^2 t} + B(\omega) \operatorname{sen} \omega x e^{-k\omega^2 t}] d\omega, \quad (10.2.8)$$

donde $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son funciones arbitrarias¹. Observemos que esta solución es análoga a la que obtuvimos para dominios acotados (con condiciones de contorno periódicas):

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t} \right].$$

Con objeto de obtener las funciones arbitrarias $A(\omega)$ y $B(\omega)$, debemos imponer la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$:

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \operatorname{sen} \omega x] d\omega. \quad (10.2.9)$$

En secciones posteriores justificaremos que existen funciones $A(\omega)$ y $B(\omega)$ tales que (10.2.9) es válida para la mayoría de las funciones $f(x)$ y, lo que es más importante, descubriremos cómo determinar $A(\omega)$ y $B(\omega)$.

Exponenciales complejas. Hemos visto que las autofunciones que dependen de la variable x son $\operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x$ y $\cos \sqrt{\lambda}x$ para todo $\lambda \geq 0$. Sin embargo, a veces se utilizan otras soluciones independientes. Una posibilidad consiste en usar las funciones complejas $e^{i\sqrt{\lambda}x}$ y $e^{-i\sqrt{\lambda}x}$ para todo $\lambda \geq 0$. Si hacemos $\omega = \sqrt{\lambda}$, entonces las autofunciones que dependen de la variable x se convierten en $e^{i\omega x}$ y $e^{-i\omega x}$ para todo $\omega \geq 0$. De forma alternativa, podemos considerar sólo² $e^{-i\omega x}$, pero para todos los ω (incluyendo tanto a los ω positivos como a los negativos). Por tanto, como justificaremos más adelante en la Sección 10.3, las soluciones producto son $e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t}$ para todo ω . El principio de superposición generalizado implica que

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t} d\omega, \quad (10.2.10)$$

es una solución de la ecuación del calor en toda la recta. Puede probarse que esta expresión es equivalente a (10.2.8) usando las fórmulas de Euler (véase el Ejercicio

¹Para ser precisos, obsérvese que $c_1(\lambda) d\lambda = c_1(\omega^2) 2\omega d\omega = A(\omega) d\omega$.

²Es una convención usar $e^{-i\omega x}$ en lugar de $e^{i\omega x}$. Conviene resaltar que $|\omega|$ denota el número de onda, esto es, el número de ondas en un intervalo de longitud 2π , una frecuencia espacial.

10.2.1). De este modo, la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se verifica si

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)e^{-i\omega x} d\omega. \tag{10.2.11}$$

Conviene señalar que $u(x, t)$ es real si $f(x)$ lo es (véanse los Ejercicios 10.2.1 y 10.2.2). Así pues, necesitamos comprender la naturaleza de (10.2.11), así como encontrar un método para determinar los “coeficientes” $c(\omega)$.

EJERCICIOS 10.2

***10.2.1.** Determinar los números complejos $c(\omega)$ de modo que (10.2.10) sea equivalente a (10.2.8) si $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son reales. Demostrar que $c(-\omega) = \bar{c}(\omega)$, donde la barra denota la conjugación compleja.

10.2.2. Si $c(-\omega) = \bar{c}(\omega)$ (véase el Ejercicio 10.2.1), probar que la función $u(x, t)$ que viene dada por (10.2.10) es real.

10.3. La transformada de Fourier y su inversa

10.3.1. Motivación a partir de la identidad de series de Fourier

Al resolver problemas de valores en la frontera sobre un intervalo acotado ($-L < x < L$, con condiciones de contorno periódicas), podemos usar la forma compleja de la serie de Fourier (véase la Sección 3.6):

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\pi x/L}. \tag{10.3.1}$$

Aquí, $f(x)$ se representa por medio de una combinación lineal de todas las posibles funciones sinusoidales que son periódicas, con periodo $2L$. Recordemos que vimos en la Sección 3.6 cómo determinar los coeficientes de Fourier complejos,

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x)e^{in\pi x/L} dx. \tag{10.3.2}$$

En este caso, la región de interés es el dominio de integración $-L < x < L$. Extenderemos ahora estas ideas a funciones definidas sobre toda la recta, $-\infty < x < \infty$, y las aplicaremos a la ecuación del calor (en la sección siguiente).

La **identidad de las series de Fourier** se obtiene eliminando c_n (y usando una variable de integración muda \bar{x} , para distinguirla de la variable espacial x):

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\bar{x})e^{in\pi\bar{x}/L} d\bar{x} \right] e^{-in\pi x/L}. \tag{10.3.3}$$

Para funciones periódicas definidas en $-L < x < L$, los números de onda permitidos ω (número de ondas en la distancia 2π) son un conjunto infinito de valores discretos (véase la Figura 10.3.1), $\omega = \frac{n\pi}{L} = 2\pi \frac{n}{2L}$.

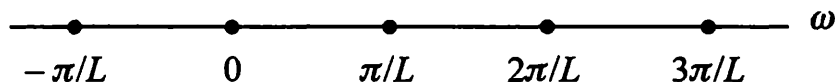


Figura 10.3.1: Números de onda discretos.

Las longitudes de onda son $2L/n$, esto es, particiones enteras del dominio original de longitud $2L$. La distancia entre valores consecutivos del número de onda es

$$\Delta\omega = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}.$$

Así pues, a partir de (10.3.3) obtenemos,

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-L}^L f(\bar{x}) e^{i\omega\bar{x}} d\bar{x} e^{-i\omega x}. \quad (10.3.4)$$

10.3.2. Integral de Fourier

Mostremos que la identidad fundamental de la integral de Fourier se podría definir como el límite de (10.3.3) o de (10.3.4) cuando $L \rightarrow \infty$. En otras palabras, las funciones que están definidas en toda la recta pueden pensarse en algún sentido como funciones periódicas de periodo infinito.

Los valores de ω son la raíz cuadrada de los autovalores y cuando $L \rightarrow \infty$ están cada vez más próximos, es decir, $\Delta\omega \rightarrow 0$. Los autovalores se aproximan a un continuo, es decir están permitidos todos los posibles números de onda y la función $f(x)$ debería representarse como una “suma” de ondas (y mostraremos que se convierte en una integral) de todas las posibles longitudes de onda. La Ecuación (10.3.4) representa una suma de rectángulos (empezando en $\omega = -\infty$ y llegando hasta $\omega = +\infty$) de base $\Delta\omega$ y altura $(1/2\pi)[\int_{-L}^L f(\bar{x}) e^{i\omega\bar{x}} d\bar{x}] e^{-i\omega x}$. Cuando $L \rightarrow \infty$, esta altura no es significativamente diferente de

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) e^{i\omega\bar{x}} d\bar{x} e^{-i\omega x}.$$

Por tanto, esperamos que cuando $L \rightarrow \infty$ las áreas de los rectángulos se aproximen a una suma de Riemann. Puesto que $\Delta\omega \rightarrow 0$ cuando $L \rightarrow \infty$, (10.3.4) se convierte en la **identidad integral de Fourier**:

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) e^{i\omega\bar{x}} \right] e^{-i\omega x} d\omega. \quad (10.3.5)$$

Una demostración rigurosa de esta identidad fundamental (véase el Ejercicio 10.3.9) está bastante cercana a la demostración algo más complicada de la convergencia de la serie de Fourier.

Transformada de Fourier. Admitamos ahora la identidad (10.3.5) como válida y definamos a continuación $F(\omega)$ como la **transformada de Fourier** de la función $f(x)$:

$$F(\omega) \equiv \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) e^{i\omega\bar{x}} d\bar{x}, \quad (10.3.6)$$

donde γ es una constante arbitraria. De (10.3.5) se sigue entonces que

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (10.3.7)$$

Recordemos que, si $f(x)$ es continua, entonces $[f(x+) + f(x-)]/2 = f(x)$. La Ecuación (10.3.7) muestra que $f(x)$ se compone de ondas $e^{-i\omega x}$ de todos los números de onda³ ω (y todas las longitudes de onda), y se conoce como **representación integral de Fourier** de $f(x)$ o simplemente como **integral de Fourier**. La transformada de Fourier $F(\omega)$ de $f(x)$ representa la amplitud de la onda con número de onda ω y es análoga a los coeficientes de Fourier de una serie de Fourier. Al contrario que en el caso (10.3.2) de funciones periódicas definidas para $-L < x < L$, en el que la integración tiene lugar sobre un intervalo acotado, la transformada de Fourier se calcula integrando sobre toda la recta. Análogamente al caso periódico, $f(x)$ puede calcularse mediante (10.3.7) si se conoce la transformada de Fourier $F(\omega)$. La función $f(x)$, que se obtiene a partir de (10.3.7), se llama **transformada de Fourier inversa** de $F(\omega)$.

Las relaciones (10.3.6) y (10.3.7) son bastante importantes y se conocen también como **par de transformadas de Fourier**. En (10.3.7), cuando se integra sobre ω (que se llama **variable transformada**) se obtiene una función de x , mientras que en (10.3.6), donde se integra sobre x , resulta una función de ω . Un integrando contiene $e^{-i\omega x}$, mientras que el otro tiene $e^{i\omega x}$. Es difícil recordar cuál es cuál. Esto es poco importante, pero debemos ser consistentes en todo momento. Los factores

³No sólo el número de onda $n\pi/L$, como ocurre en el caso de problemas periódicos para $-L < x < L$.

$1/\gamma$ en (10.3.7) y $\gamma/2\pi$ en (10.3.6), también pueden causar alguna confusión. De hecho, podemos poner cualquier factor delante de cada una de las fórmulas *siempre que su producto sea $1/2\pi$* . Nosotros utilizaremos $\gamma = 1$ (pero en otros textos se suele usar, por ejemplo, $\gamma = \sqrt{2\pi}$). Se tiene que (10.3.6) y (10.3.7) son válidas si $f(x)$ verifica la condición $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, en cuyo caso se dice que $f(x)$ es absolutamente integrable⁴.

A veces se usa una notación alternativa, $\mathcal{F}[f(x)]$, para designar $F(\omega)$, la transformada de Fourier de $f(x)$ que viene dada por (10.3.6). Análogamente, se suele denotar la transformada de Fourier inversa de $F(\omega)$ como $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$.

10.3.3. Transformada de Fourier inversa de la gaussiana

Más adelante, en la Sección 10.5, para completar la solución de la ecuación del calor necesitaremos la transformada de Fourier inversa de la curva con forma de campana conocida como **gaussiana**,

$$G(\omega) = e^{-\alpha\omega^2},$$

y cuya gráfica se esboza en la Figura 10.3.2. La función $g(x)$, cuya transformada de Fourier es $G(\omega)$, está dada de acuerdo con (10.3.7) por

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{-i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\omega^2} e^{-i\omega x} d\omega, \quad (10.3.8)$$

En el apéndice de esta sección evaluaremos la integral que aparece en (10.3.8) (véase también el Ejercicio 10.3.13), obteniendo la fórmula

$$g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-x^2/4\alpha}. \quad (10.3.9)$$

Como función de x , $g(x)$ también tiene forma de campana. Así pues, se tiene el resultado sorprendente de que **la transformada de Fourier inversa de una gaussiana es también una gaussiana**.

Podemos usar este resultado para obtener la transformada de Fourier $F(\omega)$ de una gaussiana $e^{-\beta x^2}$. Gracias a la linealidad del par de transformadas de Fourier, la transformada de Fourier de $e^{-x^2/4\alpha}$ es $\sqrt{\alpha/\pi} e^{-\alpha\omega^2}$. Haciendo $\beta = 1/4\alpha$, vemos que la transformada de Fourier de $e^{-\beta x^2}$ es $1/\sqrt{4\beta\pi} e^{-\omega^2/4\beta}$. Por tanto, la transformada de Fourier de una gaussiana es también una gaussiana. Resumimos estos resultados

⁴Si $f(x)$ es suave a trozos y $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ lo *suficientemente* rápido, entonces $f(x)$ es absolutamente integrable. No obstante, existen otros tipos de funciones que son absolutamente integrables y para las cuales, por tanto, se puede usar el par de transformadas de Fourier.

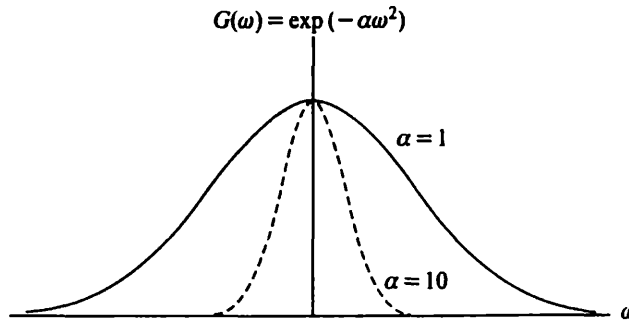


Figura 10.3.2: Gráfica en forma de campana de la gaussiana.

en la Tabla 10.3.1. Si β es pequeño, entonces $f(x)$ es una gaussiana “ancha”, mientras que su transformada de Fourier es “estrecha” cerca de $\omega = 0$. Por otro lado, si $f(x)$ es una gaussiana estrecha correspondiente a un valor grande de β , entonces su transformada de Fourier es ancha.

Tabla 10.3.1: TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA GAUSSIANA

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x} d\omega \quad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx$				
<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$e^{-\beta x^2}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\frac{1}{\sqrt{4\pi\beta}} e^{-\omega^2/4\beta}$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-x^2/4\alpha}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$e^{-\alpha\omega^2}$</td> </tr> </table>	$e^{-\beta x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\beta}} e^{-\omega^2/4\beta}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-x^2/4\alpha}$	$e^{-\alpha\omega^2}$
$e^{-\beta x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\beta}} e^{-\omega^2/4\beta}$			
$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-x^2/4\alpha}$	$e^{-\alpha\omega^2}$			

Apéndice de la Sección 10.3: deducción de la transformada de Fourier de una gaussiana

La transformada de Fourier inversa de una gaussiana $e^{-\alpha\omega^2}$ viene dada por (10.3.8). Completando el cuadrado, $g(x)$ se convierte en

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha[\omega^2+i(x/\alpha)\omega]} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha[\omega+i(x/2\alpha)]^2} e^{-x^2/4\alpha} d\omega \\
 &= e^{-x^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha[\omega+i(x/2\alpha)]^2} d\omega.
 \end{aligned}$$

El cambio de variables $s = \omega + i(x/2\alpha)$, que implica $ds = d\omega$, parece simplificar los cálculos,

$$g(x) = e^{-x^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha s^2} ds.$$

(10.3.10)

Sin embargo, aunque (10.3.10) es correcta, no hemos dado las razones por las que lo es. En realidad, el cambio de variables $s = \omega + i(x/2\alpha)$ introduce números complejos en los cálculos. Puesto que ω está siendo integrada “a lo largo del eje real” desde $\omega = -\infty$ hasta $\omega = +\infty$, la variable s tiene parte imaginaria no nula y no varía a lo largo del eje real como indica (10.3.10). Por el contrario,

$$g(x) = e^{-x^2/4\alpha} \int_{-\infty+i(x/2\alpha)}^{\infty+i(x/2\alpha)} e^{-\alpha s^2} ds. \quad (10.3.11)$$

Se necesita todo el poder de la teoría de funciones de variable completa para demostrar que (10.3.10) es equivalente a (10.3.11).

Éste no es el lugar para incluir un curso de variable compleja, pero una pequeña pista de lo que ocurre puede ser interesante para muchos lectores. Esbozamos un plano complejo en la Figura 10.3.3. Para calcular integrales desde $-\infty$ a $+\infty$, integramos desde a hasta b (y luego consideramos los límites cuando $a \rightarrow -\infty$ y $b \rightarrow +\infty$). La Ecuación (10.3.10) involucra una integración a lo largo del eje real, mientras que (10.3.11) involucra un desplazamiento del eje real [teniendo s parte imaginaria constante, $\text{Im}(s) = ix/2\alpha$]. De acuerdo con el teorema de Cauchy de la teoría de funciones de una variable compleja, la integral cerrada de línea es nula, $\oint e^{-\alpha s^2} ds = 0$, puesto que el integrando $e^{-\alpha s^2}$ no tiene “singularidades” dentro (ni sobre) la curva contorno. En nuestro caso estamos usando un contorno rectangular, como se esboza en la Figura 10.3.3. La integral cerrada de línea se compone de cuatro integrales más simples y, por tanto

$$\int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3} + \int_{c_4} = 0.$$

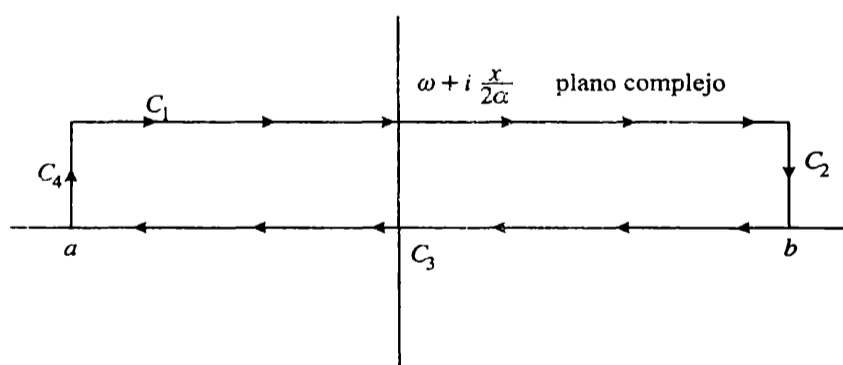


Figura 10.3.3: Integral de contorno cerrada en el plano complejo.

Puede probarse que en el límite cuando $a \rightarrow -\infty$ y $b \rightarrow +\infty$, se tiene que $\int_{c_2} = 0$ y $\int_{c_4} = 0$, puesto que el integrando decae exponencialmente hacia cero sobre esos caminos (y éstos son finitos, de longitud $x/2\alpha$). Por tanto,

$$\int_{-\infty+i(x/2\alpha)}^{\infty+i(x/2\alpha)} e^{-\alpha s^2} ds + \int_{\infty}^{-\infty} e^{-\alpha s^2} ds = 0.$$

Usando ahora $\int_{\infty}^{-\infty} = -\int_{-\infty}^{\infty}$, tenemos que (10.3.10) es equivalente a (10.3.11).

La dependencia de α en el integrando de (10.3.10) puede eliminarse por medio de la transformación adicional $z = \sqrt{\alpha}s$, que implica $dz = \sqrt{\alpha} ds$, en cuyo caso obtenemos

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-x^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Esto nos proporciona el resultado deseado (10.3.9), puesto que es bien conocido (aunque lo probaremos) que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}. \quad (10.3.12)$$

Quizás el lector no haya visto nunca cómo se deduce (10.3.12). La integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$ puede calcularse por un procedimiento notablemente inusual. No sabemos todavía cómo evaluar I , pero probaremos que calcular I^2 es fácil. Introduciendo variables mudas de integración diferentes para cada una de las dos integrales, obtenemos que

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Aunque cada una de las integrales unidimensionales es desconocida, podemos calcular esta integral doble si la escribimos en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & x^2 + y^2 &= r^2, & dx dy &= r dr d\theta. \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned}$$

Puesto que el dominio de integración es todo el plano,

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr.$$

Pero estas dos integrales se calculan fácilmente; $I^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$, lo que completa la prueba de (10.3.12).

EJERCICIOS 10.3

10.3.1. Demostrar que la transformada de Fourier es un operador lineal, es decir, que se verifica:

- (a) $\mathcal{F}[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 F(\omega) + c_2 G(\omega).$
- (b) $\mathcal{F}[f(x)g(x)] \neq F(\omega)G(\omega).$

10.3.2. Demostrar que la transformada de Fourier inversa es un operador lineal, es decir, que se verifica:

- (a) $\mathcal{F}^{-1}[c_1 F(\omega) + c_2 G(\omega)] = c_1 f(x) + c_2 g(x).$

$$(b) \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)G(\omega)] \neq f(x)g(x).$$

10.3.3. Sea $F(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(x)$. Probar que si $f(x)$ es real, entonces $F^*(\omega) = F(-\omega)$, donde $*$ denota la conjugación compleja.

10.3.4. Demostrar que

$$\mathcal{F} \left[\int f(x; \alpha) d\alpha \right] = \int F(\omega; \alpha) d\alpha.$$

10.3.5. Si $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$, demostrar que la transformada de Fourier inversa de $e^{i\omega\beta} F(\omega)$ es $f(x - \beta)$. Este resultado es conocido como **teorema de traslación** para transformadas de Fourier.

***10.3.6.** Si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a, \\ 1 & |x| < a, \end{cases}$$

calcular la transformada de Fourier de $f(x)$. (La respuesta se encuentra en la tabla de transformadas de Fourier del final de la Sección 10.4.)

***10.3.7.** Calcular la transformada de Fourier inversa de $F(\omega) = e^{-|\omega|\alpha}$ ($\alpha > 0$) (la respuesta se encuentra en la tabla de transformadas de Fourier del final de la Sección 10.4).

10.3.8. Si $F(\omega)$ denota la transformada de Fourier de $f(x)$, probar que $-idF/d\omega$ es la transformada de Fourier de $xf(x)$.

10.3.9. (a) Multiplicar (10.3.6) (suponiendo que $\gamma = 1$) por $e^{-i\omega x}$ e integrar desde $-L$ hasta L para probar que

$$\int_{-L}^L F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \frac{2 \operatorname{sen} L(\bar{x} - x)}{\bar{x} - x} d\bar{x}. \quad (10.3.13)$$

(b) Deducir (10.3.7). Supóngase, por simplicidad, que $f(x)$ es continua. *Indicaciones:* sea $f(\bar{x}) = f(x) + f(\bar{x}) - f(x)$. Usar la integral $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{s} ds = \frac{\pi}{2}$. Integrar (10.3.13) por partes y luego tomar el límite cuando $L \rightarrow \infty$.

***10.3.10.** Considérese la ecuación del calor radial en todo el plano

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$u(0, t) \text{ acotada,}$$

$$u(r, 0) = f(r).$$

- (a) Resolver por separación de variables. Es frecuente poner

$$u(r, t) = \int_0^{\infty} A(s) J_0(sr) e^{-s^2 kt} s ds,$$

en cuyo caso la condición inicial se verifica si

$$f(r) = \int_0^{\infty} A(s) J_0(sr) s ds.$$

La función $A(s)$ se llama **transformada de Fourier-Bessel** o **transformada de Hankel** de $f(r)$.

- (b) Usar la fórmula de Green para calcular $\int_0^L J_0(sr) J_0(s_1 r) r dr$. Obtener una expresión aproximada para L grande, usando (7.8.3).
 (c) Aplicar la respuesta del apartado (b) al apartado (a) para obtener $A(s)$ a partir de $f(r)$. *Indicación:* utilizar el Ejercicio 10.3.9.

- 10.3.11.** (a) Si $f(x)$ es una función cuya integral en toda la recta vale uno, demostrar que la función reescalada $(1/\alpha)f(x/\alpha)$ también tiene integral uno.
 (b) Si $F(\omega)$ denota la transformada de Fourier de $f(x)$, demostrar que $F(\alpha\omega)$ es la transformada de Fourier de $(1/\alpha)f(x/\alpha)$.
 (c) Demostrar que el apartado (b) implica que las funciones “anchas” tienen transformadas de Fourier con picos estrechos cerca de $\omega = 0$, y viceversa.

10.3.12. Probar que $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_b^{b+ix/2\alpha} e^{-\alpha s^2} ds = 0$, donde $s = b + iy$ ($0 < y < x/2\alpha$).

10.3.13. Evaluar $I = \int_0^{\infty} e^{-k\omega^2 t} \cos \omega x d\omega$ del siguiente modo: calcular $\partial I / \partial x$ y luego integrar por partes.

10.3.14. La función gamma $\Gamma(x)$ se define como sigue:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Probar las siguientes propiedades:

- (a) $\Gamma(1) = 1$. (b) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
 (c) $\Gamma(n+1) = n!$. (d) $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.
 (e) ¿Cuál es el valor de $\Gamma(\frac{3}{2})$?

10.3.15. (a) Probar, usando la definición de la función que se da en el Ejercicio 10.3.14, que

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du.$$

(b) Probar, usando integrales dobles en coordenadas polares, que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}.$$

Indicación: es conocido, a partir de la teoría de funciones de una variable compleja, que $2 \int_0^{\pi/2} (\tan \theta)^{2z-1} d\theta = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z}$.

***10.3.16.** Evaluar

$$\int_0^{\infty} y^p e^{-ky^n} dy$$

en términos de la función gamma (véase el Ejercicio 10.3.14).

10.3.17. Usando variable compleja, es conocido que

$$\oint e^{-i\omega^3/3} d\omega = 0$$

para todo contorno cerrado. Probar, considerando el límite cuando $R \rightarrow \infty$ de la región con forma de cuña de 30° y de radio R que se esboza en la Figura 10.3.4, que

$$\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\omega^3}{3}\right) d\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} 3^{-2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega^3}{3}\right) d\omega = \frac{1}{2} 3^{-2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Puede ser de utilidad el resultado del Ejercicio 10.3.16.

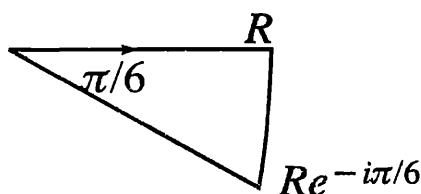


Figura 10.3.4

- 10.3.18.** (a) ¿Para qué valores de α la función $\alpha e^{-\beta(x-x_0)^2}$ tiene integral uno en $-\infty < x < \infty$?
- (b) Probar que el límite cuando $\beta \rightarrow \infty$ de la función que se obtiene en el apartado (a) verifica las propiedades de la delta de Dirac $\delta(x-x_0)$.
- (c) Obtener la transformada de Fourier de $\delta(x-x_0)$ de dos formas distintas:
1. Hallando la transformada de la función que se obtiene en el apartado (a) y tomando el límite cuando $\beta \rightarrow \infty$.
 2. Usando propiedades de integración de la delta de Dirac.
- (d) Probar que la transformada de $\delta(x-x_0)$ es consistente con la idea siguiente: “las transformadas de funciones con picos estrechos están bien distribuidas (contienen una cantidad significativa de frecuencias)”.

- (e) Demostrar que la representación de la delta de Dirac por medio de la transformada de Fourier es

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-x_0)} d\omega. \quad (10.3.14)$$

¿Por qué esto no es matemáticamente preciso? No obstante, ¿qué ocurre si $x = x_0$? Análogamente,

$$\delta(\omega - \omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\omega-\omega_0)} dx. \quad (10.3.15)$$

- (f) La Ecuación (10.3.15) puede interpretarse como una relación de ortogonalidad para las autofunciones $e^{-i\omega x}$. Si

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega,$$

determinar los “coeficientes de Fourier”, es decir, la transformada $F(\omega)$, usando la condición de ortogonalidad (10.3.15).

10.4. La transformada de Fourier y la ecuación del calor

10.4.1. Ecuación del calor

En esta subsección comenzaremos a ilustrar cómo usar la transformada de Fourier para resolver la ecuación del calor en toda la recta. Ya hemos probado que dado cualquier valor de ω , la función $e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t}$ resuelve la ecuación del calor, $\partial u / \partial t = k \partial^2 u / \partial x^2$. Usando un principio de superposición generalizado obtuvimos que

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t} d\omega. \quad (10.4.1)$$

La condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se verifica si

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (10.4.2)$$

A partir de la definición de la transformada de Fourier (con la elección $\gamma = 1$), observamos que (10.4.2) es una representación integral de Fourier de $f(x)$. Así, $c(\omega)$ resulta ser la transformada de Fourier de la distribución inicial de temperaturas $f(x)$:

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx. \quad (10.4.3)$$

Las Ecuaciones (10.4.1) y (10.4.3) describen la solución de nuestro problema de valor inicial para la ecuación del calor⁵.

Escrita de esta forma, esta solución resulta demasiado complicada para usarla frecuentemente. Por tanto, vamos a describir una simplificación de la misma. Sustituyamos $c(\omega)$ en la solución, recordando que la x en la Fórmula (10.4.3) es una variable muda, por lo que introducimos la variable \bar{x} :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) e^{i\omega\bar{x}} d\bar{x} \right] e^{-i\omega x} e^{-k\omega^2 t} d\omega.$$

En lugar de hacer primero la integración en la variable \bar{x} , intercambiemos ahora el orden de integración:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} e^{-i\omega(x-\bar{x})} d\omega \right] d\bar{x}. \quad (10.4.4)$$

Vemos aquí la importancia de haber calculado $g(x)$, la transformada de Fourier inversa de $e^{-k\omega^2 t}$:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} e^{-i\omega x} d\omega. \quad (10.4.5)$$

Por tanto, el integrando de (10.4.4) contiene a $g(x - \bar{x})$, no a $g(x)$.

Función de influencia. Necesitamos determinar la función $g(x)$ cuya transformada de Fourier es $e^{-k\omega^2 t}$ y calcular entonces $g(x - \bar{x})$. La función $e^{-k\omega^2 t}$ es una gaussiana y, a partir de la sección anterior (o de la mayoría de tablas de transformadas de Fourier, véase la Tabla 10.4.1), poniendo $\alpha = kt$ obtenemos la gaussiana $g(x) = \sqrt{\pi/kt} e^{-x^2/4kt}$ y, por tanto, la solución de la ecuación del calor es

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} d\bar{x}. \quad (10.4.6)$$

Esta forma de la solución muestra claramente la dependencia que tiene la solución de la distribución inicial de temperaturas, $u(x, 0) = f(x)$, donde todos los valores de la temperatura inicial “influyen” en la temperatura en tiempo t . Definimos, pues, la función

$$G(x, t; \bar{x}, 0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt}, \quad (10.4.7)$$

que llamaremos **función de influencia**. Explicaremos en el Capítulo 11 su relación con la función de Green del espacio completo para la ecuación del calor. La Ecuación (10.4.7), de algún modo, mide el efecto de la temperatura inicial ($\bar{t} = 0$) en la

⁵En particular, como se muestra en el Ejercicio 10.4.2, $u \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, incluso si $e^{-i\omega x} \not\rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$.

posición \bar{x} sobre la temperatura en tiempo t en la posición x . Un esbozo de la función de influencia (véase la Figura 10.4.1) muestra que la distribución de la influencia es pequeña cuando t es pequeño, pero grande cuando t es grande. Para un tiempo fijo, se tiene la mayor influencia cuando $x = \bar{x}$, esto es, la temperatura inicial en \bar{x} produce la mayor influencia en ese mismo lugar, pero también influye la temperatura (en un menor grado) en todos los demás lugares. Cuando $t \rightarrow 0$, la función de influencia se va concentrando cada vez más. De hecho, en el Ejercicio 10.3.18 se muestra que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} = \delta(x - \bar{x}),$$

(la delta de Dirac del Capítulo 9), verificándose, por tanto, que (10.4.6) satisface las condiciones iniciales.

Recordemos que hemos deducido la solución (10.4.6) de la ecuación del calor en un dominio no acotado de un modo complicado usando las transformadas de Fourier y que hemos necesitado pedir que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, lo que constituye una restricción sobre la distribución inicial de temperaturas, necesaria para que exista la transformada de Fourier. Sin embargo, las transformadas de Fourier no aparecen en la forma final de la solución. Por tanto, nunca necesitaremos ninguna transformada de Fourier para utilizar (10.4.6). De hecho, se puede probar que no es necesaria la restricción $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ sobre (10.4.6). La Ecuación (10.4.6) es válida (aunque nuestra deducción no nos lo dé), *grosso modo*, siempre que la integral que aparece en (10.4.6) converja.

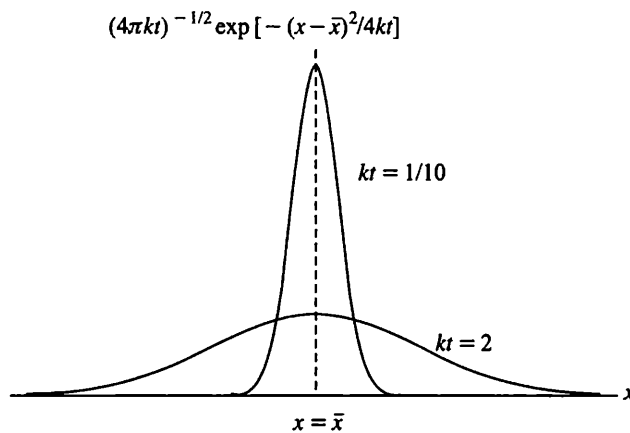


Figura 10.4.1: La función de influencia para la ecuación del calor.

Ejemplo. La Ecuación (10.4.6) puede usarse para resolver el siguiente interesante problema de difusión del calor con dato inicial:

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 100 & x > 0, \end{cases}$$

en el que queremos estudiar cómo se difunde la energía térmica a toda la varilla, si inicialmente está concentrada en la parte derecha de la misma. De acuerdo con

(10.4.6), la temperatura es

$$u(x, t) = \frac{100}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^\infty e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} d\bar{x} = \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{4kt}}^\infty e^{-z^2} dz,$$

donde hemos simplificado la integral introduciendo el cambio de variable $z = (\bar{x} - x)/\sqrt{4kt}$, que implica $dz = d\bar{x}/\sqrt{4kt}$, con lo que el integrando ya no depende de ningún parámetro. La integral representa el área bajo una curva gaussiana (o normal), tal y como se ilustra en la Figura 10.5.2. Gracias a la paridad de e^{-z^2} se tiene

$$\int_{-x/\sqrt{4kt}}^\infty e^{-z^2} dz = \int_0^\infty e^{-z^2} dz + \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-z^2} dz,$$

y puesto que, como ya probamos anteriormente, $\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}/2$,

$$u(x, t) = 50 + \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4kt}} e^{-z^2} dz. \quad (10.4.8)$$

La temperatura es constante siempre que $x/\sqrt{4kt}$ lo sea, es decir, sobre las parábolas que se esbozan en el plano $x-t$ en la Figura 10.5.3. Llamamos a $x/\sqrt{4kt}$ **variable de semejanza**. Por ejemplo, la distancia entre 60° y 75° aumenta proporcionalmente a \sqrt{t} . La distribución de temperaturas se reparte, fenómeno conocido como **difusión**. Esbozamos la distribución de temperaturas dada por (10.4.8) en la Figura 10.5.4 para varios valores fijos de t .

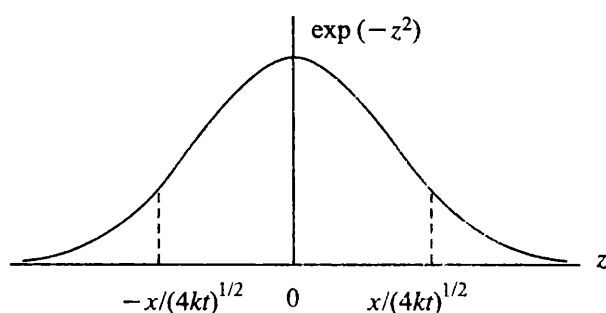


Figura 10.4.2: Área bajo una gaussiana.

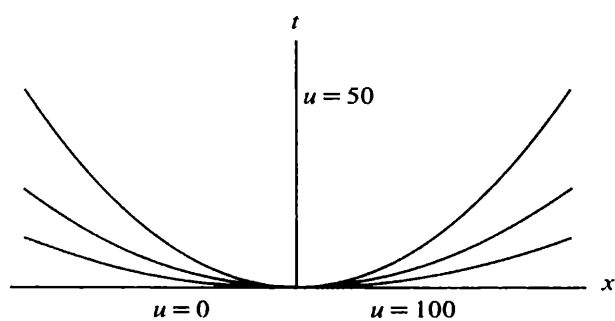


Figura 10.4.3: Temperaturas constantes.

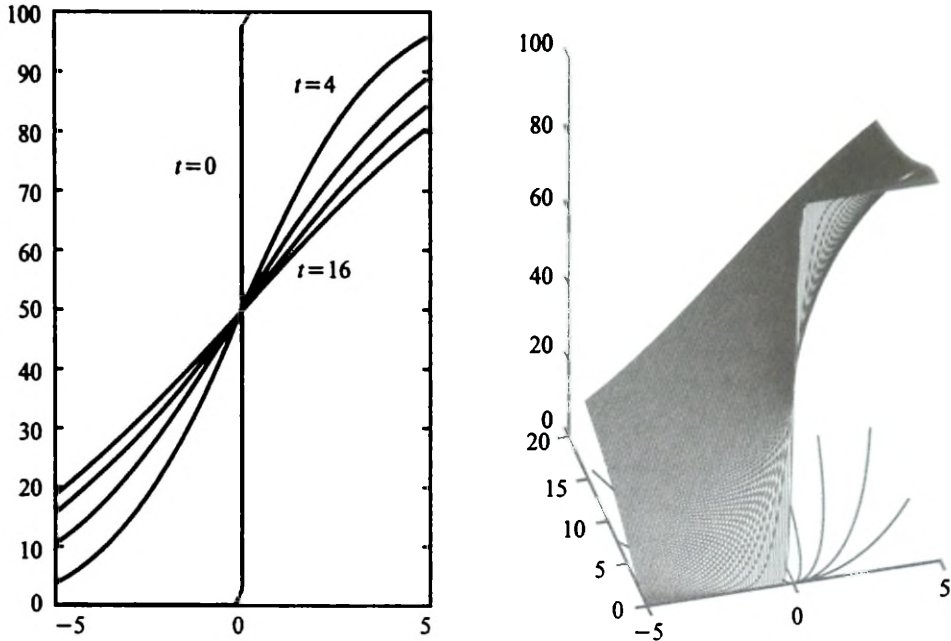


Figura 10.4.4: Difusión de la temperatura en una varilla infinita.

Observemos que la temperatura es no nula en todo x para cualquier tiempo $t > 0$, incluso aunque $u = 0$ para $x < 0$ en $t = 0$. La **energía térmica se difunde con velocidad infinita**. Ésta es una propiedad fundamental de la ecuación de difusión que contrasta con la velocidad de propagación finita de la ecuación de ondas, que se describe en el Capítulo 12 (véase también la Sección 10.6.1).

El área bajo la curva normal está bien tabulada. Podemos expresar nuestra solución en términos de la **función de error**, $\text{erf}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z e^{-t^2} dt$, o de la **función de error complementaria**, $\text{erfc}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_z^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \text{erf}(z)$. Usando estas funciones, podemos escribir la solución que satisface

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 100 & x > 0, \end{cases}$$

como

$$u(x, t) = 50 \left[1 + \text{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4kt}} \right) \right] = 50 \left[2 - \text{erfc} \left(\frac{x}{\sqrt{4kt}} \right) \right].$$

10.4.2. Transformada de Fourier de la ecuación del calor: transformadas de derivadas

En las secciones anteriores hemos resuelto la ecuación del calor sobre toda la recta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) &= f(x).\end{aligned}\tag{10.4.9}$$

Recordemos también que motivamos la introducción de las transformadas de Fourier usando la separación de variables. Si sabemos que deberíamos usar transformadas de Fourier, podemos evitar separar variables. Aquí vamos a describir este método más simple: comenzamos aplicando la transformada de Fourier a la ecuación. A partir de la ecuación del calor, (10.4.9), deducimos que la transformada de Fourier de $\partial u/\partial t$ es igual a k veces la transformada de Fourier $\partial^2 u/\partial x^2$:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = k\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right].\tag{10.4.10}$$

Por tanto, necesitamos calcular las transformadas de Fourier de las derivadas de $u(x, t)$. Empecemos por definir la transformada de Fourier de $u(x, t)$,

$$\mathcal{F}[u] = \bar{U}(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\omega x} dx.\tag{10.4.11}$$

Observemos que esta transformada es también una función del tiempo; es una transformada de Fourier ordinaria para cada t fijo. Para obtener una transformada de Fourier (en el espacio), multiplicamos por $e^{i\omega x}$ e integramos. Las transformadas de Fourier espaciales de derivadas con respecto al tiempo no son difíciles:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\omega x} dx \right] = \frac{\partial}{\partial t} \bar{U}(\omega, t).\tag{10.4.12}$$

Se obtiene así el siguiente resultado:

La transformada de Fourier espacial de una derivada temporal es igual a la derivada temporal de la transformada de Fourier.

Los resultados que se tienen para la transformada de Fourier de las derivadas espaciales son más interesantes y útiles:

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i\omega x} dx = \frac{u e^{i\omega x}}{2\pi} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\omega x} dx,\tag{10.4.13}$$

lo que hemos podido simplificar usando integración por partes:

$$\begin{aligned}df &= \frac{\partial u}{\partial x} dx, & g &= e^{i\omega x}, \\ f &= u, & dg &= i\omega e^{i\omega x} dx.\end{aligned}$$

Si $u \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, entonces las contribuciones en los puntos extremos de la integración por partes se anulan. Por tanto, (10.4.13) se convierte en

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = -i\omega \mathcal{F}[u] = -i\omega \bar{U}(\omega, t). \quad (10.4.14)$$

Podemos obtener de modo similar las transformadas de Fourier de derivadas de orden superior:

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = -i\omega \mathcal{F} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = (-i\omega)^2 \bar{U}(\omega, t). \quad (10.4.15)$$

En general, se tiene:

La transformada de Fourier de la derivada n -ésima de una función con respecto a x es igual a $(-i\omega)^n$ veces la transformada de Fourier de la función, suponiendo que $u(x, t) \rightarrow 0$ suficientemente rápido⁶ cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

Por lo tanto, aplicando la transformada de Fourier a la ecuación del calor, (10.4.9), obtenemos (10.4.10) y, usando las propiedades de la transformada de Fourier de derivadas, (10.4.10) se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{U}(\omega, t) = k(-i\omega)^2 \bar{U}(\omega, t) = -k\omega^2 \bar{U}(\omega, t). \quad (10.4.16)$$

En resumen,

la operación de tomar transformadas de Fourier convierte una ecuación en derivadas parciales lineal con coeficientes constantes en una ecuación diferencial ordinaria, puesto que las derivadas espaciales se transforman en múltiplos algebraicos de la transformada.

La Ecuación (10.4.16) es una ecuación diferencial de primer orden con coeficientes constantes. Su solución general es

$$\bar{U}(\omega, t) = c e^{-k\omega^2 t}.$$

No obstante, podemos pensar en $\partial/\partial t$ como en una derivada ordinaria *si mantenemos ω fija* y, por tanto, deducimos que c es constante en ese caso. Para otros valores fijos de ω , c puede ser una constante diferente, por lo que en realidad es *una función arbitraria* $c(\omega)$. De hecho, uno puede verificar fácilmente por sustitución que

$$\bar{U}(\omega, t) = c(\omega) e^{-k\omega^2 t}, \quad (10.4.17)$$

⁶También se necesita que las derivadas de orden superior se anulen cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Además, cada integración por partes requiere que las funciones involucradas sean continuas.

resuelve (10.4.16). Para determinar $c(\omega)$, observemos a partir de (10.4.17) que $c(\omega)$ es igual al valor inicial de la transformada, que se obtiene transformando la condición inicial, $c(\omega) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx$. Éste es el mismo resultado que se obtuvo por separación de variables. Podríamos reproducir aquí la solución que obtuvimos antes, pero, en su lugar, mostraremos un modo más simple de obtener aquellos resultados.

10.4.3. Teorema de convolución

Observemos que $\bar{U}(\omega, t)$ es el producto de dos funciones de ω , $c(\omega)$ y $e^{-k\omega^2 t}$, siendo ambas, transformadas de otras funciones; $c(\omega)$ es la transformada de la condición inicial $f(x)$ y $e^{-k\omega^2 t}$ es la transformada de cierta función (afortunadamente, puesto que $e^{-k\omega^2 t}$ es una gaussiana, sabemos que es la transformada de otra gaussiana, $\sqrt{\pi/kt} e^{-x^2/4kt}$). El problema matemático de invertir una transformada que es producto de transformadas de funciones conocidas es bastante frecuente (especialmente al usar la transformada de Fourier para resolver ecuaciones en derivadas parciales). Por tanto, estudiaremos este problema con alguna generalidad.

Supongamos que $F(\omega)$ y $G(\omega)$ son las transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx, & G(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\omega x} dx, \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x} d\omega, & g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{-i\omega x} d\omega. \end{aligned} \quad (10.4.18)$$

Determinemos la función $h(x)$ cuya transformada de Fourier $H(\omega)$ es igual al producto de las dos transformadas anteriores:

$$H(\omega) = F(\omega)G(\omega), \quad (10.4.19)$$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{-i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{-i\omega x} d\omega. \quad (10.4.20)$$

Eliminemos o bien $F(\omega)$ o bien $G(\omega)$ de (10.4.18), no importa cuál:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})e^{i\omega \bar{x}} d\bar{x} \right] e^{-i\omega x} d\omega.$$

Suponiendo que podemos intercambiar el orden de integración, obtenemos

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x}) \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega(x-\bar{x})} d\omega \right] d\bar{x},$$

de modo que ahora reconocemos la integral interior como $f(x - \bar{x})$ [véase (10.4.18)], y por tanto

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})f(x - \bar{x}) d\bar{x}. \quad (10.4.21)$$

La integral en (10.4.21) se denomina **convolución** de $g(x)$ y $f(x)$; que suele denotarse también por $g * f$. La transformada de Fourier inversa del producto de dos transformadas de Fourier es $1/2\pi$ veces la convolución de las dos funciones.

Si ponemos $x - \bar{x} = w$, que implica $d\bar{x} = -dw$ (pero recordemos que $\int_{\infty}^{-\infty} = -\int_{-\infty}^{\infty}$), obtenemos la forma alternativa,

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(w)g(x-w) dw, \quad (10.4.22)$$

que deberíamos denotar por $f * g$. Así pues, $g * f = f * g$.

Ecuación del calor. Apliquemos ahora el teorema de convolución a nuestra ecuación en derivadas parciales. La transformada $\bar{U}(\omega, t)$ de la solución $u(x, t)$ es el producto de $c(\omega)$ y $e^{-k\omega^2 t}$, donde $c(\omega)$ es la transformada de la distribución inicial de temperaturas y $e^{-k\omega^2 t}$ es la transformada de $\sqrt{\pi/kt} e^{-x^2/4kt}$. Por tanto, de acuerdo con el teorema de convolución,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} d\bar{x},$$

que es el mismo resultado que obtuvimos (y discutimos) antes. En resumen, el procedimiento que hemos seguido es:

1. Aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación en derivadas parciales.
2. Resolvemos la ecuación diferencial ordinaria obtenida.
3. Aplicamos las condiciones iniciales, para determinar la transformada de Fourier inicial.
4. Usamos el teorema de convolución.

Así pues, el uso del teorema de convolución nos evita tener que sustituir la transformada de Fourier inversa en cada problema para luego intercambiar el orden de integración.

Identidad de Parseval. Puesto que $h(x)$ es la transformada de Fourier inversa de $F(\omega)G(\omega)$, el teorema de convolución puede enunciarse en la forma siguiente:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x})f(x-\bar{x}) d\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{-i\omega x} d\omega. \quad (10.4.23)$$

La Ecuación (10.4.23) es válida para todo x . En particular, en $x = 0$ implica

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\bar{x}) f(-\bar{x}) d\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega) d\omega. \quad (10.4.24)$$

Se obtiene un resultado interesante si elegimos $g(x)$ tal que

$$g^*(x) = f(-x), \quad (10.4.25)$$

donde $*$ denota la conjugación compleja [para funciones reales $g(x)$ es la reflexión de $f(x)$ en $x = 0$]. En general, sus transformadas de Fourier están relacionadas por:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(-s) e^{-i\omega s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) e^{-i\omega x} dx = G^*(\omega), \end{aligned} \quad (10.4.26)$$

donde hemos hecho $s = -x$. Por tanto, (10.4.24) se convierte en la **identidad de Parseval**.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) g^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) G^*(\omega) d\omega, \quad (10.4.27)$$

donde $g(x)g^*(x) = |g(x)|^2$ y $G(\omega)G^*(\omega) = |G(\omega)|^2$. Recordemos que probamos una relación análoga para todas las series de Fourier generalizadas (véase la Sección 5.10). Este resultado, (10.4.27), tiene la siguiente interpretación: con frecuencia, la energía por unidad de distancia es proporcional a $|g(x)|^2$ y, por tanto, se tiene que $1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx$ representa la energía total. Podemos definir, a partir de (10.4.27), $|G(\omega)|^2$ como la energía por unidad de número de onda (la **densidad de energía espectral**). Toda la energía está contenida dentro de todos los números de onda. La **transformada de Fourier $G(\omega)$ de una función $g(x)$ es una cantidad compleja cuya magnitud al cuadrado es la densidad de energía espectral (la cantidad de energía por unidad de número de onda)**.

10.4.4. Resumen de propiedades de la transformada de Fourier

Existen tablas de transformadas de Fourier que pueden ser muy útiles. Los resultados que hemos obtenido hasta ahora se pueden resumir en una pequeña tabla que utilizaremos de referencia.

TRANSFORMADA DE FOURIER

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x} d\omega \quad F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx \quad \text{Referencia}$$

$e^{-\alpha x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}e^{-\omega^2/4\alpha}$	}	gaussiana (Sección 10.3.3)
$\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-x^2/4\beta}$	$e^{-\beta\omega^2}$		
$\frac{\partial f}{\partial t}$	$\frac{\partial F}{\partial t}$	}	Derivadas (Sección 10.4.2)
$\frac{\partial f}{\partial x}$	$-i\omega F(\omega)$		
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$(-i\omega)^2 F(\omega)$		
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})g(x - \bar{x})d\bar{x}$	$F(\omega)G(\omega)$		Convolución (Sección 10.4.3)
$\delta(x - x_0)$	$\frac{1}{2\pi}e^{i\omega x_0}$		Delta de Dirac (Ejercicio 10.3.18)
$f(x - \beta)$	$e^{i\omega\beta} F(\omega)$		Teorema de traslación (Ejercicio 10.3.5)
$xf(x)$	$-i\frac{dF}{d\omega}$		Multiplicación por x (Ejercicio 10.3.8)
$\frac{2\alpha}{x^2 + \alpha^2}$	$e^{- \omega \alpha}$		Ejercicio 10.3.7
$f(x) = \begin{cases} 0 & x > a \\ 1 & x < a \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \frac{\text{sen } a\omega}{\omega}$		Ejercicio 10.3.6

Listamos a continuación también algunas tablas importantes de transformadas de Fourier que suelen estar fácilmente disponibles. Conviene tener cuidado con los cambios de notación de unas tablas a otras.

Oberhettinger, F.: *Tabellen zur Fourier Transformation*, Springer-Verlag, New York, 1957.

Churchill, R.V.: *Operational Mathematics*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1972.

Campbell, G.A. and Foster, R. M. : *Fourier Integrals for Practical Applications*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1948.

EJERCICIOS 10.4

10.4.1. Probar, usando la fórmula de Green, que:

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^2 f}{dx^2} \right] = -\omega^2 F(\omega) + \frac{e^{i\omega x}}{2\pi} \left(\frac{df}{dx} - i\omega f \right) \Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

10.4.2. La solución $u(x, t)$ de la ecuación del calor viene dada por (10.4.1). Demostrar que $u \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$ incluso aunque $\phi(x) = e^{-i\omega x}$ no decaiga cuando $x \rightarrow \infty$. *Indicación:* integrar por partes.

10.4.3. *(a) Resolver la ecuación de difusión con **convección**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x).$$

Indicación: usar el teorema de convolución y el teorema de traslación (véase el Ejercicio 10.4.5).

(b) Considérese el caso en que la condición inicial es $f(x) = \delta(x)$. Esbozar la solución $u(x, t)$ correspondiente a varios valores de $t > 0$. Comentar la influencia del término de convección $c \partial u / \partial x$.

10.4.4. (a) Resolver el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x).$$

(b) ¿Sugiere la forma de la solución una transformación que simplifique el problema?

10.4.5. Considérese el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x).$$

(a) Demostrar que

$$\bar{U} = e^{-k\omega^2 t} \int_0^t \bar{Q}(\omega, \tau) e^{k\omega^2 \tau} d\tau,$$

es una solución particular para la transformada de Fourier de u .

(b) Calcular \bar{U} .

*(c) Obtener $u(x, t)$ (en la forma más sencilla posible).

***10.4.6.** La función de Airy $\text{Ai}(x)$ es la única solución de la ecuación

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - xy = 0,$$

que satisface

(1) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$.

$$(2) \ y(0) = 3^{-2/3} / \Gamma(\frac{2}{3}) = 3^{-2/3} \Gamma(\frac{1}{3}) \sqrt{3} / (2\pi) = (1/\pi) \int_0^\infty \cos(\omega^3/3) d\omega \text{ (no es necesario mirar los Ejercicios 10.3.15 y 10.3.17).}$$

Obtener una representación de la solución de este problema, $Ai(x)$, usando la transformada de Fourier. *Indicación:* véase el Ejercicio 10.4.8.

10.4.7. (a) Resolver la ecuación de Korteweg-deVries linealizada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x).$$

(b) Usar el teorema de convolución para simplificar el resultado.

* (c) Usar el Ejercicio 10.4.6 para obtener una simplificación adicional.

(d) Particularizar el resultado obtenido al caso en que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

10.4.8. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \begin{array}{l} 0 < x < L, \\ -\infty < y < \infty, \end{array}$$

sujeta a

$$\begin{array}{l} u(0, y) = g_1(y), \\ u(L, y) = g_2(y). \end{array}$$

10.4.9. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \begin{array}{l} y > 0, \\ -\infty < x < \infty, \end{array}$$

sujeta a

$$u(x, 0) = f(x).$$

Indicación: consultar la Sección 10.7.3 si es necesario.

10.4.10. Resolver el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Indicación: consultar la Sección 10.7.1 si es necesario.

10.4.11. Deducir una expresión para la transformada de Fourier del producto $f(x)g(x)$.

10.5. Transformadas de Fourier en senos y cosenos: la ecuación del calor en la semirrecta

10.5.1. Introducción

Recordemos que las series de Fourier fueron introducidas para resolver ecuaciones en derivadas parciales sobre un intervalo acotado $-L < x < L$ con condiciones de contorno periódicas. Recordemos también que, en el caso de problemas definidos en el intervalo $0 < x < L$, analizamos ciertos casos especiales de las series de Fourier, las series de senos y cosenos, con objeto de que la solución pudiera satisfacer las condiciones de contorno apropiadas.

Hemos visto en este capítulo que en el caso del intervalo no acotado $-\infty < x < \infty$ podemos usar la transformada de Fourier. En esta sección, mostraremos cómo resolver ecuaciones en derivadas parciales sobre un intervalo semiacotado, $0 < x < \infty$. Para ello, introduciremos ciertos casos especiales de la transformada de Fourier, conocidos como transformadas de Fourier en senos y cosenos. Las modificaciones que necesitaremos hacer sobre la transformada de Fourier serán similares a las ideas que usamos en el caso de series sobre intervalos acotados.

10.5.2. La ecuación del calor sobre una semirrecta I

Motivaremos la introducción de las transformadas de Fourier de senos y cosenos considerando un problema físico sencillo. Si la temperatura está fija a 0° en $x = 0$, entonces el problema matemático para la difusión del calor sobre un intervalo semiinfinito, $x > 0$, es

$$\text{EDP : } \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0,} \quad (10.5.1)$$

$$\text{CC : } \boxed{u(0, t) = 0,} \quad (10.5.2)$$

$$\text{CI : } \boxed{u(x, 0) = f(x).} \quad (10.5.3)$$

En este caso, tenemos una condición de contorno, que es homogénea. Si separamos variables en la ecuación del calor,

$$u(x, t) = \phi(x)h(t),$$

obtenemos, como antes:

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda kh, \quad (10.5.4)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi. \quad (10.5.5)$$

Las condiciones de contorno para determinar los autovalores admisibles λ son

$$\phi(0) = 0, \quad (10.5.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\phi(x)| < \infty. \quad (10.5.7)$$

La última fórmula corresponde a la condición $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$, ya que usualmente suponemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Existen soluciones no triviales del problema (10.5.5) - (10.5.7) únicamente para los valores de λ positivos ($\lambda > 0$),

$$\phi(x) = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x = c_1 \operatorname{sen} \omega x, \quad (10.5.8)$$

donde, como en el caso de la transformada de Fourier, hemos preferido usar la variable $\omega = \sqrt{\lambda}$. Conviene señalar que ahora tenemos sólo $\omega > 0$. La parte temporal correspondiente es

$$h(t) = ce^{-\lambda kt} = ce^{-k\omega^2 t}, \quad (10.5.9)$$

y, por tanto, las soluciones producto son

$$u(x, t) = A \operatorname{sen} \omega x e^{-k\omega^2 t}. \quad (10.5.10)$$

El principio de superposición generalizado implica que deberíamos buscar soluciones del problema de valores iniciales en la forma

$$u(x, t) = \int_0^\infty A(\omega) \operatorname{sen} \omega x e^{-k\omega^2 t} d\omega. \quad (10.5.11)$$

La condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ se verifica si

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega) \operatorname{sen} \omega x d\omega. \quad (10.5.12)$$

Mostraremos en la subsección siguiente que $A(\omega)$ es la transformada de Fourier en senos de $f(x)$, esto es, que $A(\omega)$ puede obtenerse a partir de (10.5.12):

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} \omega x dx. \quad (10.5.13)$$

10.5.3. Las transformadas de Fourier en senos y cosenos

En la subsección anterior nos hemos preguntado si podemos representar una función usando solamente funciones seno. Ya sabemos cómo representar una función usando exponenciales complejas mediante la transformada de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega, \quad (10.5.14)$$

$$F(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx. \quad (10.5.15)$$

Recuérdese que (10.5.14) - (10.5.15) son válidas para cualquier valor de γ .

La transformada de Fourier en senos. Puesto que queremos usar solamente $\sin \omega x$ (para todo ω), consideraremos aquellos casos en los que $f(x)$ es una función impar. Si nuestro dominio es $x \geq 0$, entonces nuestras funciones dejan de tener significado físico para $x < 0$. En este caso, podemos definir estas funciones del modo que queramos para $x < 0$; en particular, podemos considerar la extensión impar a $x < 0$ de la función dada $f(x)$. Como de este modo hacemos que $f(x)$ sea una función impar, su transformada de Fourier $F(\omega)$ puede simplificarse:

$$F(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos \omega x + i \sin \omega x) dx = \frac{2i\gamma}{2\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x dx, \quad (10.5.16)$$

puesto que $f(x) \cos \omega x$ es impar en x y $f(x) \sin \omega x$ es par en x . Obsérvese que $F(\omega)$ es una función impar de ω [cuando $f(x)$ es una función impar de x]. Por tanto, de forma análoga

$$f(x) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) (\cos \omega x - i \sin \omega x) d\omega = \frac{-2i}{\gamma} \int_0^{\infty} F(\omega) \sin \omega x d\omega. \quad (10.5.17)$$

Podemos elegir γ de cualquier modo que deseemos. Nótese que el producto de los coeficientes que están delante de ambas integrales debe ser $\frac{2i\gamma}{2\pi} \cdot \frac{-2i}{\gamma} = \frac{2}{\pi}$, en lugar de $\frac{1}{2\pi}$ como ocurre con las transformadas de Fourier. Aquí, adoptaremos el convenio de que $-2i/\gamma = 1$ (es decir, $\gamma = -2i$), de modo que si $f(x)$ es impar,

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(\omega) \sin \omega x d\omega, \quad (10.5.18)$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x dx. \quad (10.5.19)$$

Existen textos en los que se prefiere una definición simétrica, que corresponde al convenio $-2i/\gamma = \sqrt{2/\pi}$. Este par de transformadas se conoce como el par de

transformadas de Fourier en senos. $F(\omega)$ se llama la **transformada seno** de $f(x)$ y, a veces, se la denota por $S[f(x)]$, mientras que $f(x)$ es la **transformada seno inversa** de $F(\omega)$, $S^{-1}[F(\omega)]$. Las Ecuaciones (10.6.12) se corresponden con las fórmulas para la transformada de Fourier de una función impar en x .

Observemos ahora que el miembro derecho de (10.5.18) se anula siempre en $x = 0$, y que esto ocurre incluso si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$. Por tanto, la Ecuación (10.5.18) no siempre es válida en $x = 0$. Por el contrario, la extensión impar de $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$, si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$, desde $-f(0)$ hasta $f(0)$. La representación de $f(x)$ mediante la transformada de Fourier de senos converge en $x = 0$ al promedio, que es cero.

La transformada de Fourier en cosenos. Podemos deducir de forma análoga, si $f(x)$ es una función par, la transformada de Fourier en cosenos y su inversa:

$$f(x) = \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega x \, d\omega, \quad (10.5.20)$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx. \quad (10.5.21)$$

Existen otras formas equivalentes (siempre que el producto de los dos factores numéricos sea de nuevo $2/\pi$). $F(\omega)$ se llama la **transformada coseno** de $f(x)$, y a veces se la denota por $C[f(x)]$, mientras que $f(x)$ es la **transformada coseno inversa** de $F(\omega)$, $C^{-1}[F(\omega)]$. Como antes, si $f(x)$ está definida sólo para $x > 0$, entonces, para poder usar la transformada coseno debemos introducir la extensión par de $f(x)$.

Al final de esta sección aparece una pequeña tabla de transformadas de Fourier de senos y cosenos.

10.5.4. Transformadas de derivadas

Recordemos que ya dedujimos en la Sección 10.5.2 las propiedades fundamentales de la transformada de Fourier de derivadas. En esta sección, mostraremos resultados análogos para las transformadas seno y coseno.

Nuestras definiciones de las transformadas de Fourier en senos y cosenos son:

$$C[f(x)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx, \quad (10.5.22)$$

$$S[f(x)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \omega x \, dx. \quad (10.5.23)$$

Podemos usar integración por partes para obtener fórmulas para las transformadas de las derivadas primeras:

$$C \left[\frac{df}{dx} \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{df}{dx} \cos \omega x \, dx = \frac{2}{\pi} f(x) \cos \omega x \Big|_0^{\infty} + \omega \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \omega x \, dx,$$

$$S \left[\frac{df}{dx} \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{df}{dx} \operatorname{sen} \omega x \, dx = \frac{2}{\pi} f(x) \operatorname{sen} \omega x \Big|_0^{\infty} - \omega \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx,$$

donde hemos supuesto que $f(x)$ es continua. Por tanto, obtenemos las siguientes fórmulas:

$$C \left[\frac{df}{dx} \right] = -\frac{2}{\pi} f(0) + \omega S[f], \quad (10.5.24)$$

$$S \left[\frac{df}{dx} \right] = -\omega C[f], \quad (10.5.25)$$

suponiendo que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Las transformadas seno y coseno de las primeras derivadas siempre involucran el otro tipo de transformada semiinfinita. Por tanto, si una ecuación en derivadas parciales contiene primeras derivadas con respecto a una variable que tiene que ser transformada, las transformadas seno y coseno de Fourier nunca podrán funcionar. No deben usarse estas transformadas en esta situación. Obsérvese que para la ecuación del calor, $\partial u / \partial t = k \partial^2 u / \partial x^2$, la variable que tiene que transformarse es x y que la ecuación no contiene primeras derivadas en esa variable.

Las transformadas de las derivadas segundas tienen fórmulas más sencillas. De acuerdo con (10.5.24) y (10.5.25),

$$C \left[\frac{d^2 f}{dx^2} \right] = -\frac{2}{\pi} \frac{df}{dx}(0) + \omega S \left[\frac{df}{dx} \right] = -\frac{2}{\pi} \frac{df}{dx}(0) - \omega^2 C[f], \quad (10.5.26)$$

$$S \left[\frac{d^2 f}{dx^2} \right] = -\omega C \left[\frac{df}{dx} \right] = \frac{2}{\pi} \omega f(0) - \omega^2 S[f]. \quad (10.5.27)$$

A partir de (10.5.26) y (10.5.27), obtenemos algunas importantes consecuencias. Si queremos usar la transformada coseno de Fourier para resolver una ecuación en derivadas parciales (que contiene una derivada segunda) definida en un intervalo semiinfinito ($x \geq 0$), debemos conocer $(df/dx)(0)$. Análogamente, podemos usar la transformada seno de Fourier para resolver problemas semiinfinitos si $f(0)$ está dada. Además, los problemas son más sencillos de resolver si las condiciones de contorno son homogéneas. Si $f(0) = 0$, entonces una transformada seno de Fourier a menudo proporcionará una solución relativamente sencilla. Si $(df/dx)(0) = 0$, entonces con frecuencia será muy conveniente utilizar una transformada de Fourier en cosenos. Observemos que estas condiciones no son sorprendentes. Si $f(0) = 0$, la separación de variables motiva el uso exclusivo de senos. De modo similar, $(df/dx)(0) = 0$ sugiere el uso de cosenos.

10.5.5. La ecuación del calor sobre una semirrecta II

Mostraremos ahora cómo utilizar las fórmulas para las transformadas de derivadas para resolver ecuaciones en derivadas parciales. Consideremos un problema que es algo más general que el que hemos presentado anteriormente. Supongamos que estamos interesados en el flujo de calor en un dominio semiinfinito con la temperatura prescrita en $x = 0$:

$$\text{EDP : } \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \quad (10.5.28)$$

$$\text{CC : } \boxed{u(0, t) = g(t)}, \quad (10.5.29)$$

$$\text{CI : } \boxed{u(x, 0) = f(x)}. \quad (10.5.30)$$

No podemos usar el método de separación de variables porque la condición de contorno $u(0, t) = g(t)$ es no homogénea, pero como el intervalo $0 < x < \infty$ es semiacotado, nos gustaría utilizar alguna transformada. Puesto que u está especificada en $x = 0$, deberíamos intentar usar la transformada seno de Fourier (y no la transformada coseno). Por tanto, introducimos la transformada seno, $\bar{U}(\omega, t)$, de $u(x, t)$:

$$\bar{U}(\omega, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(x, t) \text{sen } \omega x \, dx. \quad (10.5.31)$$

Usando (10.5.27), la ecuación en derivadas parciales (10.5.28) se convierte en una ecuación diferencial ordinaria,

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = k \left(\frac{2}{\pi} \omega g(t) - \omega^2 \bar{U} \right), \quad (10.5.32)$$

mientras que la condición inicial (10.5.30) proporciona el valor inicial de la transformada de Fourier en senos:

$$\bar{U}(\omega, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \omega x \, dx. \quad (10.5.33)$$

La resolución de (10.5.32) es, en general, algo complicada (ya que involucra el factor integrante $e^{k\omega^2 t}$; véase la Sección 7.3). Dejamos la discusión de este hecho para los ejercicios.

Ejemplo. En el caso especial de condiciones de contorno homogéneas, $g(t) = 0$, se sigue de (10.5.32) que

$$\bar{U}(\omega, t) = c(\omega) e^{-k\omega^2 t}, \quad (10.5.34)$$

donde a partir de la condición inicial

$$c(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \omega x \, dx. \quad (10.5.35)$$

La solución es, por tanto:

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} c(\omega) e^{-k\omega^2 t} \operatorname{sen} \omega x \, d\omega. \quad (10.5.36)$$

Ésta es la solución obtenida anteriormente por separación de variables. Con objeto de simplificar la solución, observemos que $c(\omega)$ es una función impar de ω . Por tanto,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{-k\omega^2 t} \operatorname{sen} \omega x \, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\omega)}{2i} e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega x} \, d\omega. \quad (10.5.37)$$

Si introducimos la extensión impar de $f(x)$, tenemos que

$$\frac{c(\omega)}{2i} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \frac{\operatorname{sen} \omega x}{2i} \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\operatorname{sen} \omega x}{2i} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \, dx. \quad (10.5.38)$$

Notemos que (10.5.37) y (10.5.38) coinciden exactamente con los resultados para la ecuación del calor sobre toda la recta. Por tanto,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} \, d\bar{x}.$$

En lo anterior hemos extendido $f(x)$ como una función impar a todo el intervalo $-\infty < x < \infty$. Para utilizar solamente $f(\bar{x})$ en $\bar{x} > 0$, usamos ahora la simetría impar

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \left[\int_{-\infty}^0 -f(-\bar{x}) e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} \, d\bar{x} + \int_0^{\infty} f(\bar{x}) e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} \, d\bar{x} \right].$$

Hacemos ahora $\bar{x} = -\bar{x}$ en la primera integral (y luego reemplazamos \bar{x} por \bar{x}). De este modo

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_0^\infty f(\bar{x}) \left[e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} - e^{-(x+\bar{x})^2/4kt} \right] d\bar{x}. \quad (10.5.39)$$

En esta fórmula, la función de influencia para la condición inicial aparece entre corchetes. Discutiremos más en detalle esta solución en el Capítulo 11. Un método equivalente (y más sencillo) de obtener (10.5.39) a partir de (10.5.34) y de (10.5.35) consiste en usar el teorema de convolución para la transformada seno (véase el Ejercicio 10.6.6).

Tabla 10.5.1: TRANSFORMADA DE FOURIER EN SENOS

$f(x) = \int_0^\infty F(\omega) \text{sen } \omega x \, d\omega$	$S[f(x)] = F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \text{sen } \omega x \, dx$	Referencia
$\frac{df}{dx}$	$-\omega C[f(x)]$	Derivadas (Sección 10.5.4)
$\frac{d^2 f}{dx^2}$	$\frac{2}{\pi} \omega f(0) - \omega^2 F(\omega)$	
$\frac{1}{x^2 + \beta^2}$	$e^{-\omega\beta}$	Ejercicio 10.5.1
$e^{-\epsilon x}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\epsilon^2 + \omega^2}$	Ejercicio 10.5.2
1	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega}$	Ejercicio 10.5.9
$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(\bar{x}) [g(x - \bar{x}) - g(x + \bar{x})] d\bar{x}$	$S[f(x)]C[g(x)]$	Convolución (Ejercicio 10.5.6)
$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty g(\bar{x}) [f(x + \bar{x}) - f(x - \bar{x})] d\bar{x}$		

Tabla 10.5.2: TRANSFORMADA DE FOURIER EN COSENOS

$f(x) = \int_0^\infty F(\omega) \text{cos } \omega x \, d\omega$	$C[f(x)] = F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \text{cos } \omega x \, dx$	Referencia
$\frac{df}{dx}$	$-\frac{2}{\pi} f(0) + \omega S[f(x)]$	Derivadas (Sección 10.5.4)
$\frac{d^2 f}{dx^2}$	$-\frac{2}{\pi} \frac{df}{dx}(0) - \omega^2 F(\omega)$	
$\frac{1}{x^2 + \beta^2}$	$e^{-\omega\beta}$	Ejercicio 10.5.1
$e^{-\epsilon x}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \omega^2}$	Ejercicio 10.5.2
$e^{-\alpha x^2}$	$2 \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} e^{-\omega^2/4\alpha}$	Ejercicio 10.5.3
$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty g(\bar{x}) [f(x - \bar{x}) + f(x + \bar{x})] d\bar{x}$	$F(\omega)G(\omega)$	Convolución (Ejercicio 10.5.7)

EJERCICIOS 10.5

10.5.1. Consideremos la función $F(\omega) = e^{-\omega^\beta}$, $\beta > 0$ ($\omega \geq 0$).

- (a) Obtener la transformada de Fourier en senos inversa de $F(\omega)$.
- (b) Obtener la transformada de Fourier en cosenos inversa de $F(\omega)$.

10.5.2. Consideremos la función $f(x) = e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$ ($x \geq 0$).

- (a) Obtener la transformada de Fourier en senos de $f(x)$.
- (b) Obtener la transformada de Fourier en cosenos de $f(x)$.

***10.5.3.** Obtener *o bien* la transformada de Fourier en cosenos, *o bien* la transformada de Fourier en senos de $e^{-\alpha x^2}$.

10.5.4. (a) Deducir (10.5.26) usando la fórmula de Green.

(b) Hacer esto mismo para (10.5.27).

10.5.5. (a) Demostrar que la transformada de Fourier en senos de $f(x)$ es una función impar de ω (suponiendo que está definida para todo ω).

(b) Demostrar que la transformada de Fourier en cosenos de $f(x)$ es una función par de ω (suponiendo que está definida para todo ω).

10.5.6. Existe un interesante teorema de convolución para la transformada de Fourier en senos. Supongamos que queremos calcular $h(x)$ y conocemos que su transformada de Fourier en senos, $H(\omega)$, es un producto

$$H(\omega) = \overline{S}(\omega)\overline{C}(\omega),$$

donde $\overline{S}(\omega)$ es la transformada *seno* de $s(x)$ y $\overline{C}(\omega)$ es la transformada *coseno* de $c(x)$. Suponiendo que $c(x)$ es par y $s(x)$ es impar, demostrar que

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty s(\overline{x})[c(x-\overline{x}) - c(x+\overline{x})] d\overline{x} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty c(\overline{x})[s(x+\overline{x}) - s(\overline{x}-x)] d\overline{x}.$$

10.5.7. Deducir la siguiente propiedad: si una transformada de Fourier en cosenos, $H(\omega)$, es el producto de dos transformadas de Fourier en cosenos,

$$H(\omega) = F(\omega)G(\omega),$$

entonces

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty g(\overline{x})[f(x-\overline{x}) + f(x+\overline{x})] d\overline{x}.$$

En este resultado pueden intercambiarse los papeles de f y g .

10.5.8. Resolver el problema (10.5.1) - (10.5.3) usando el teorema de convolución del Ejercicio 10.5.6. También puede resultar de ayuda el Ejercicio 10.5.3.

10.5.9. Designemos por $S[f(x)]$ la transformada de Fourier en senos de $f(x)$.

(a) Demostrar que

$$S[e^{-\epsilon x}] = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{\epsilon^2 + \omega^2}, \quad \text{para } \epsilon > 0.$$

Demostrar que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} S[e^{-\epsilon x}] = 2/\pi\omega$. Impondremos que sea $S[1] = 2/\pi\omega$. ¿Por qué razón técnica $S[1]$ no está definido?

(b) Demostrar que

$$S^{-1} \left[\frac{2/\pi}{\omega} \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen } z}{z} dz,$$

que se sabe que es igual a 1.

10.5.10. Calcular la transformada coseno inversa de $\omega e^{-\omega\alpha}$. *Indicación:* úsese diferenciación con respecto al parámetro.

10.5.11. Consideremos el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x > 0, & t > 0, \\ u(0, t) &= 1 \quad \text{y} \quad u(x, 0) = f(x). \end{aligned}$$

- (a) Resolverlo directamente usando la transformada de Fourier en senos. *Indicación:* usar el Ejercicio 10.5.8 y el teorema de convolución, Ejercicio 10.5.6)
- (b) Si $f(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow \infty$, hacer $v(x, t) = u(x, t) - 1$ y resolver el problema que verifica $v(x, t)$.
- (c) Compárense los apartados (a) y (b).

10.5.12. Resolver el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x > 0), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0 \quad \text{y} \quad u(x, 0) = f(x). \end{aligned}$$

10.5.13. Encontrar la solución de (10.5.28) - (10.5.30), resolviendo (10.5.32).

10.5.14. Considérese el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v_0 \frac{\partial u}{\partial x} & (x > 0), \\ u(0, t) &= 0 \quad \text{y} \quad u(x, 0) = f(x). \end{aligned}$$

- (a) Demostrar que la transformada de Fourier en senos no proporciona una solución inmediata.

(b) Por el contrario, haciendo

$$u = e^{[x-(v_0/2)t]v_0/2k} w,$$

demostrar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ w(0, t) &= 0, \\ w(x, 0) &= f(x)e^{-v_0 x/2k}. \end{aligned}$$

(c) Usar el apartado (b) para resolver el problema original en $u(x, t)$.

10.5.15. Resolver el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & 0 < x < L, \\ & & 0 < y < \infty, \\ u(x, 0) &= 0, \\ u(0, y) &= g_1(y) \\ u(L, y) &= g_2(y). \end{aligned}$$

Indicación: consúltese, si es necesario, la Sección 10.7.2.

10.5.16. Resolver el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & 0 < x < \infty, \\ & & 0 < y < \infty, \\ u(0, y) &= g(y), \\ \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Indicación: consúltese, si es necesario, la Sección 10.7.4.

10.5.17. El efecto del calentamiento periódico (tanto diario como estacional) de la superficie de la Tierra puede modelizarse por medio del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \infty, \\ u(x, 0) &= 0, & y \quad u(0, t) = Ae^{i\sigma_0 t}, \end{aligned}$$

donde la parte real de $u(x, t)$ es la temperatura (y x mide la distancia desde la superficie).

- (a) Obtener $\bar{U}(\omega, t)$, la transformada de Fourier en senos de $u(x, t)$.
- *(b) Aproximar $\bar{U}(\omega, t)$ para t grande.
- (c) Obtener la transformada seno inversa de la aproximación obtenida en el apartado (b), con objeto de obtener una aproximación de $u(x, t)$ válida para t grande. *Indicación:* véase el Ejercicio 10.5.2(a) o úsense unas tablas.
- (d) Esbozar la temperatura aproximada (para t fijo y grande).

- (e) ¿A qué distancia bajo la superficie son despreciables las variaciones de temperatura?

10.5.18. Rehacer el Ejercicio 10.5.17. Obtener $u(x, t)$ de forma exacta. *Indicación: véase el Ejercicio 10.5.6.*

- 10.5.19.** (a) Obtener una solución particular de la forma $u(x, t) = F(x)G(t)$ en el Ejercicio 10.5.17 que satisfaga la condición de contorno pero no la condición inicial.
- (b) Comparar el apartado (a) con el Ejercicio 10.5.17 o con el Ejercicio 10.5.18.

10.6. Otros ejemplos de aplicación de las transformadas seno y coseno

10.6.1. La ecuación de ondas unidimensional sobre toda la recta

Hemos analizado anteriormente problemas de cuerdas vibrantes sobre un intervalo acotado, usualmente $0 \leq x \leq L$. Estudiaremos ahora el problema de una cuerda vibrante sobre un intervalo no acotado. El mejor modo de analizar tales problemas sobre toda la recta (o sobre semirrectas) consiste en usar el método de las características, que describiremos en el Capítulo 12, donde los conceptos relacionados con la propagación de ondas serán discutidos con mayor profundidad. Con objeto de mostrar cómo pueden usarse las transformadas de Fourier para resolver la ecuación de ondas unidimensional, en esta sección analizaremos sólo el siguiente ejemplo:

$$\text{EDP : } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (10.6.1)$$

$$\text{CI1 : } u(x, 0) = f(x), \quad (10.6.2)$$

$$\text{CI2 : } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (10.6.3)$$

Damos la posición inicial $f(x)$ de la cuerda, pero exigimos que la cuerda esté en reposo, $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$, con el objetivo de simplificar los cálculos.

Podemos obtener soluciones producto por separación de variables, pero en su

lugar introducimos la transformada de Fourier de $u(x, t)$:

$$\bar{U}(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\omega x} dx, \quad (10.6.4)$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\omega, t) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (10.6.5)$$

Tomando transformadas de Fourier en la ecuación de ondas unidimensional obtenemos

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = -c^2 \omega^2 \bar{U}, \quad (10.6.6)$$

y las condiciones iniciales se convierten en

$$\bar{U}(\omega, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx, \quad (10.6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{U}(\omega, 0) = 0. \quad (10.6.8)$$

La solución general de (10.6.6) es una combinación lineal de senos y cosenos,

$$\bar{U}(\omega, t) = A(\omega) \cos c\omega t + B(\omega) \operatorname{sen} c\omega t, \quad (10.6.9)$$

donde las condiciones iniciales implican que

$$B(\omega) = 0, \quad (10.6.10)$$

$$A(\omega) = \bar{U}(\omega, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx. \quad (10.6.11)$$

Usando ahora la transformada de Fourier inversa, obtenemos que la solución de la ecuación de ondas unidimensional es

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\omega, 0) \cos c\omega t e^{-i\omega x} d\omega, \quad (10.6.12)$$

donde $\bar{U}(\omega, 0)$ es la transformada de Fourier de la posición inicial.

La solución puede simplificarse de forma considerable usando la fórmula de Euler,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\omega, 0) \left[e^{-i\omega(x-ct)} + e^{-i\omega(x+ct)} \right] d\omega, \quad (10.6.13)$$

ya que la transformada de Fourier de $f(x)$ es $\bar{U}(\omega, 0)$, por lo que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\omega, 0) e^{-i\omega x} d\omega, \quad (10.6.14)$$

y por tanto, comparando (10.6.13) y (10.6.14), obtenemos que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)]. \quad (10.6.15)$$

Así pues, en el caso de una cuerda infinita (*inicialmente en reposo*), la solución es la suma de dos términos, $\frac{1}{2}f(x - ct)$ y $\frac{1}{2}f(x + ct)$. El primer término $\frac{1}{2}f(x - ct)$, es una onda de forma fija. Su altura permanece fija si $x - ct$ permanece constante, con lo que $dx/dt = c$. Por ejemplo, el origen corresponde con $x = ct$. Suponiendo que $c > 0$, este perfil fijo, que se conoce como **onda viajera**, se mueve hacia la derecha con velocidad c . Análogamente, $\frac{1}{2}f(x + ct)$ es una onda de forma fija que viaja hacia la izquierda (con velocidad $-c$). La interpretación de este resultado es que la posición inicial de la cuerda se separa en dos, si comienza en reposo, moviéndose una hacia la izquierda y la otra hacia la derecha con velocidades iguales a c ; la solución es la suma de estas dos ondas viajeras.

10.6.2. La ecuación de Laplace en una semibanda

El problema matemático para la conducción del calor en el estado estacionario en una semibanda ($0 < x < L$, $y > 0$) consiste en

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (10.6.16)$$

$$u(0, y) = g_1(y), \quad (10.6.17)$$

$$u(L, y) = g_2(y), \quad (10.6.18)$$

$$u(x, 0) = f(x). \quad (10.6.19)$$

Suponemos que $g_1(y)$ y $g_2(y)$ tienden a cero cuando $y \rightarrow \infty$. En la Figura 10.6.1 se ilustran las tres condiciones de contorno no homogéneas y la útil simplificación:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y), \quad (10.6.20)$$

donde tanto u_1 como u_2 satisfacen la ecuación de Laplace, pero con diferentes condiciones de contorno. El método de separación de variables aplicado a la ecuación de Laplace en la semibanda nos va a ayudar a motivar nuestra estrategia posterior:

$$u(x, y) = \phi(x)\theta(y), \quad (10.6.21)$$

en cuyo caso

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi \quad (10.6.22)$$

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} = \lambda\theta. \quad (10.6.23)$$

Puesto que se necesitan dos condiciones de contorno homogéneas en un problema de autovalores, dividimos nuestro problema en dos partes:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|c|} \hline u(L, y) = g_2(y) \\ \hline \nabla^2 u = 0 \\ \hline u(0, y) = g_1(y) \\ \hline u(x, 0) = f(x) \\ \hline \end{array} & = & \begin{array}{|c|} \hline u_1(L, y) = g_2(y) \\ \hline \nabla^2 u_1 = 0 \\ \hline u_1(0, y) = g_1(y) \\ \hline u_1(x, 0) = 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline u_2(L, y) = 0 \\ \hline \nabla^2 u_2 = 0 \\ \hline u_2(0, y) = 0 \\ \hline u_2(x, 0) = f(x) \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

Figura 10.6.1: La ecuación de Laplace en una semibanda.

Lados con temperatura nula. En el problema para u_2 , tenemos que $u_2 = 0$ en $x = 0$ y en $x = L$. Por tanto, en este caso, la ecuación diferencial en la variable x es un problema de autovalores, definido sobre un intervalo *acotado*. Las condiciones de contorno son exactamente las adecuadas para una serie de Fourier de senos en la variable x . Las soluciones en la variable y son exponenciales. Para u_2 , las soluciones separadas son

$$u_2(x, y) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-n\pi y/L} \quad \text{y} \quad u_2(x, y) = \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{+n\pi y/L}.$$

El principio de superposición implica que

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-n\pi y/L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{n\pi y/L}. \quad (10.6.24)$$

Tenemos otras dos condiciones sobre u_2 :

$$u_2(x, 0) = f(x), \quad (10.6.25)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u_2(x, y) = 0. \quad (10.6.26)$$

Puesto que $u_2 \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow \infty$, $b_n = 0$. La condición no homogénea es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad (10.6.27)$$

y, por tanto, las constantes a_n son los coeficientes de la serie de Fourier de senos de la condición de contorno no homogénea en $y = 0$:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (10.6.28)$$

Usando estos coeficientes, la solución es

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-n\pi y/L}. \quad (10.6.29)$$

Así, no hay necesidad de usar transformadas de Fourier para el problema u_2 . La ecuación en derivadas parciales para u_2 podría haber sido analizada mucho antes en este texto (por ejemplo, en el Capítulo 2).

Temperatura nula en el lado inferior. En el problema para u_1 , la segunda condición de contorno homogénea es menos evidente:

$$u_1(x, 0) = 0, \quad (10.6.30)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u_1(x, y) = 0. \quad (10.6.31)$$

La parte que depende de la variable y constituye el problema de valores en la frontera. Cuando $y \rightarrow \infty$, la solución "separada" debe permanecer acotada (no necesariamente se anula). Recordemos que las soluciones de (10.6.23) son combinaciones lineales de senos y cosenos (correspondientes al caso $\lambda < 0$) y la condición de contorno homogénea en $y = 0$, (10.6.30), implica que sólo deberíamos usar senos. Sin embargo, en lugar de continuar discutiendo el método de separación de variables, vamos a introducir la transformada de Fourier en senos en la variable y :

$$u_1(x, y) = \int_0^{\infty} \bar{U}_1(x, \omega) \operatorname{sen} \omega y d\omega. \quad (10.6.32)$$

$$\bar{U}_1(x, \omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u_1(x, y) \operatorname{sen} \omega y dy. \quad (10.6.33)$$

Tomemos directamente la transformada de Fourier en senos con respecto a la variable y de la ecuación de Laplace, (10.6.16). Las propiedades de la transformada de derivadas nos permiten transformar la ecuación de Laplace en una ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{U}_1(x, \omega) - \omega^2 \bar{U}_1(x, \omega) = 0, \quad (10.6.34)$$

donde hemos usado la condición de contorno en $y = 0$, $u_1(x, 0) = 0$, para simplificar el resultado. La solución de (10.6.34) es una combinación lineal de funciones no oscilatorias (exponenciales). Es más conveniente (aunque no necesario) utilizar las siguientes funciones hiperbólicas:

$$\bar{U}_1(x, \omega) = a(\omega) \sinh \omega x + b(\omega) \sinh \omega(L - x). \quad (10.6.35)$$

Las dos condiciones no homogéneas en $x = 0$ y en $x = L$ nos conducen a

$$\bar{U}_1(0, \omega) = b(\omega) \sinh \omega L = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g_1(y) \sin \omega y \, dy, \quad (10.6.36)$$

$$\bar{U}_1(L, \omega) = a(\omega) \sinh \omega L = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g_2(y) \sin \omega y \, dy. \quad (10.6.37)$$

La transformada de Fourier en senos de $u_1(x, y)$, $\bar{U}_1(x, \omega)$, viene dada por (10.6.35), donde $a(\omega)$ y $b(\omega)$ se obtienen a partir de (10.6.36) y (10.6.37)⁷. Esto completa la solución ligeramente complicada de la ecuación de Laplace en una semibanda. Es la suma de una solución obtenida usando una serie de Fourier de senos y otra obtenida usando una transformada de Fourier en senos.

Condiciones de contorno no homogéneas. Si se desea, se puede resolver la ecuación de Laplace (10.6.16) con tres condiciones de contorno no homogéneas, (10.6.17) - (10.6.19), aplicando directamente una transformada de Fourier en senos en la variable y sin descomponer el problema en otros dos:

$$u(x, y) = \int_0^\infty \bar{U}(x, \omega) \sin \omega y \, d\omega. \quad (10.6.38)$$

Puesto que la condición de contorno en $y = 0$, $u(x, 0) = f(x)$, es no homogénea, introducimos un término extra en la transformada de Fourier en senos de la ecuación

⁷Desafortunadamente, $\bar{U}_1(x, \omega)$ no es el producto de las transformadas de dos funciones sencillas. Por tanto, no usaremos el teorema de convolución.

de Laplace (10.6.16):

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} - \omega^2 \bar{U} = -\frac{2}{\pi} \omega f(x). \tag{10.6.39}$$

En este caso, la transformada de Fourier en senos \bar{U} verifica una ecuación diferencial ordinaria lineal *no homogénea* de segundo orden con coeficientes constantes. Esta ecuación debe resolverse con dos condiciones de contorno no homogéneas en $x = 0$ y en $x = L$. La Ecuación (10.6.39) puede resolverse entonces, por ejemplo, usando el método de variación de los parámetros. Esta solución es probablemente más complicada que la que consiste en la suma de una serie y una transformada. Además, esta solución tiene una discontinuidad de salto en $y = 0$; la integral en (10.6.38) es igual a cero en $y = 0$, pero converge a $f(x)$ cuando $y \rightarrow 0$. Así pues, generalmente es preferible descomponer el problema en otros dos.

10.6.3. La ecuación de Laplace en un semiplano

Si se especifica la temperatura $f(x)$ sobre toda una pared infinita, $y = 0$, entonces la distribución de temperaturas en el estado estacionario para $y > 0$ verifica la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{10.6.40}$$

sujeta a la condición de contorno,

$$u(x, 0) = f(x). \tag{10.6.41}$$

Si $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, entonces hay otras tres condiciones de contorno implicadas,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \tag{10.6.42}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) = 0, \tag{10.6.43}$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0; \tag{10.6.44}$$

la temperatura tiende a cero a grandes distancias de la pared.

Los métodos de separación de variables sugieren el uso de una transformada de Fourier en la variable x , puesto que hay dos condiciones de contorno homogéneas cuando $x \rightarrow \pm\infty$:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\omega, y) e^{-i\omega x} d\omega, \tag{10.6.45}$$

$$\bar{U}(\omega, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\omega x} dx. \tag{10.6.46}$$

Tomando la transformada de Fourier en la variable x de (10.6.40), obtenemos la ecuación diferencial ordinaria que verifica la transformada de Fourier,

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} - \omega^2 \bar{U} = 0. \quad (10.6.47)$$

Puesto que $u(x, y) \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow +\infty$, su transformada de Fourier en la variable x también se anula cuando $y \rightarrow +\infty$,

$$\bar{U}(\omega, y) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } y \rightarrow +\infty. \quad (10.6.48)$$

Además, en $y = 0$ se tiene que $\bar{U}(\omega, 0)$ es la transformada de Fourier de la condición de contorno,

$$\bar{U}(\omega, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx. \quad (10.6.49)$$

Debemos ser cuidadosos al resolver (10.6.47). La solución general es

$$\bar{U}(\omega, y) = a(\omega) e^{\omega y} + b(\omega) e^{-\omega y}, \quad (10.6.50)$$

que es válida para todo ω , véase (10.6.45). Tenemos dos condiciones de contorno para determinar las dos funciones arbitrarias $a(\omega)$ y $b(\omega)$. La Ecuación (10.6.48) afirma que $\bar{U}(\omega, y) \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow +\infty$. De entrada, uno podría pensar que esto implica que $a(\omega) = 0$, pero esto no es correcto. Por el contrario, para que $\bar{U}(\omega, y)$ se anule cuando $y \rightarrow +\infty$, debe ser $a(\omega) = 0$ sólo para $\omega > 0$. Si $\omega < 0$, entonces $b(\omega) e^{-\omega y}$ crece exponencialmente cuando $y \rightarrow +\infty$. Por tanto, $b(\omega) = 0$ para $\omega < 0$. Hemos probado que

$$\bar{U}(\omega, y) = \begin{cases} a(\omega) e^{\omega y} & \text{si } \omega < 0, \\ b(\omega) e^{-\omega y} & \text{si } \omega > 0, \end{cases}$$

donde $a(\omega)$ es arbitraria para $\omega < 0$ y $b(\omega)$ es arbitraria para $\omega > 0$. Es más conveniente observar que esto es equivalente a

$$\boxed{\bar{U}(\omega, y) = c(\omega) e^{-|\omega|y}}, \quad (10.6.51)$$

para todo ω . La condición de contorno no homogénea (10.6.41) prueba ahora que $c(\omega)$ es la transformada de Fourier de la temperatura en la pared, $f(x)$. Esto completa nuestra solución. Sin embargo, vamos a obtener una representación más simple de la misma.

Aplicación del teorema de convolución. La forma más sencilla de simplificar la solución consiste en observar que $\bar{U}(\omega, y)$ es el producto de dos transformadas de Fourier: $f(x)$ tiene la transformada de Fourier $c(\omega)$ y cierta función

$g(x, y)$, todavía desconocida, tiene por transformada de Fourier la función $e^{-|\omega|y}$. Usando el teorema de convolución, la solución de nuestro problema es

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})g(x - \bar{x}, y) d\bar{x}. \quad (10.6.52)$$

Necesitamos determinar ahora qué función $g(x, y)$ tiene transformada de Fourier $e^{-|\omega|y}$. De acuerdo con la fórmula de inversión,

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\omega|y} e^{-i\omega x} d\omega,$$

que puede integrarse directamente:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_{-\infty}^0 e^{\omega y} e^{-i\omega x} d\omega + \int_0^{\infty} e^{-\omega y} e^{-i\omega x} d\omega \\ &= \left. \frac{e^{\omega(y-ix)}}{y-ix} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{-\omega(y+ix)}}{-(y+ix)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{y-ix} + \frac{1}{y+ix} = \frac{2y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la ecuación de Laplace en el semiplano ($y > 0$) sujeta a la condición $u(x, 0) = f(x)$ es

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x}) \frac{2y}{(x - \bar{x})^2 + y^2} d\bar{x}. \quad (10.6.53)$$

Conviene señalar que hemos deducido esta solución suponiendo que $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, pero que es válida, hablando en términos generales, siempre que la integral sea convergente. En el Capítulo 9 ya obtuvimos (10.6.53) mediante el uso de la función de Green: allí se probó [véase (9.5.44)] que la función de influencia para la condición de contorno no homogénea es la derivada normal exterior (con respecto a los puntos fuente) de la función de Green,

$$-\frac{\partial}{\partial \bar{y}} G(x, y; \bar{x}, \bar{y}) \Big|_{\bar{y}=0} = \frac{y}{\pi} \frac{1}{(x - \bar{x})^2 + y^2},$$

donde $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ es la función de Green, la función de influencia para las fuentes en el semiplano ($y > 0$).

Ejemplo. Se obtiene un solución sencilla, pero interesante, si

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases} \quad (10.6.54)$$

Esta condición de contorno corresponde al caso de una pared calentada uniformemente a dos temperaturas diferentes. Calculemos la distribución de temperaturas

en equilibrio para $y > 0$. A partir de (10.6.53), obtenemos que

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{2y}{y^2 + (x - \bar{x})^2} d\bar{x} = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\bar{x} - x}{y} \right) \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1} \left(\frac{-x}{y} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.6.55)$$

Debe tenerse cuidado de evaluar la inversa de la función tangente sobre una rama continua. La Figura 10.7.2, en la que se esbozan la función tangente y su inversa, es útil para este fin. Si introducimos el ángulo θ desde el eje de ordenadas,

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right),$$

entonces la distribución de temperaturas puede escribirse en la forma

$$u(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{\theta}{\pi}. \quad (10.6.56)$$

Podemos comprobar esta respuesta de forma independiente. Reconsideremos este problema, pero planteémoslo en estas coordenadas polares rotadas. La ecuación de Laplace es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0,$$

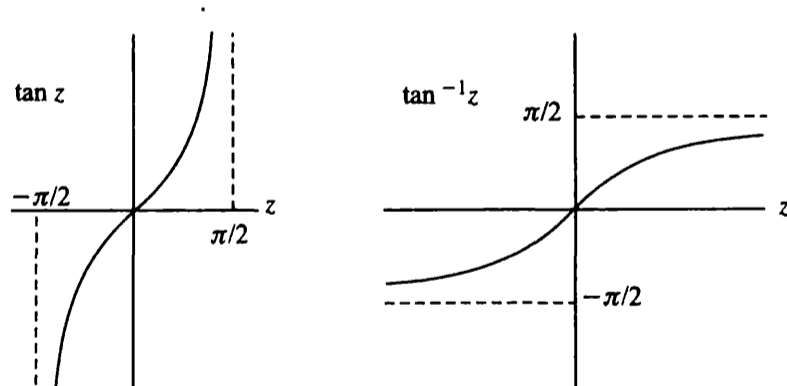


Figura 10.6.2: Funciones tangente y arcotangente.

y las condiciones de contorno son $u(r, \pi/2) = 1$ y $u(r, -\pi/2) = 0$. Como la solución depende sólo del ángulo, $u(r, \theta) = u(\theta)$, se tiene

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = 0,$$

con las condiciones $u(\pi/2) = 1$ y $u(-\pi/2) = 0$, lo que confirma (10.6.56). Puede obtenerse este resultado y otros más complicados para la ecuación de Laplace, usando transformaciones conformes en el plano complejo.

10.6.4. La ecuación de Laplace en un cuadrante

En esta subsección vamos a considerar la distribución de temperaturas en el estado estacionario dentro en un cuadrante ($x > 0$, $y > 0$), fijando la temperatura sobre una de las paredes y el flujo de calor sobre la otra:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (10.6.57)$$

$$u(0, y) = g(y), \quad y > 0, \quad (10.6.58)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x) \quad x > 0. \quad (10.6.59)$$

Suponemos que $g(y) \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow \infty$ y $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, y que $u(x, y) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$ e $y \rightarrow \infty$. Hay dos condiciones de contorno no homogéneas. Por tanto, es conveniente descomponer el problema en otros dos, como se ilustra en la Figura 10.6.3:

$$u = u_1(x, y) + u_2(x, y), \quad (10.6.60)$$

donde

$$\nabla^2 u_1 = 0, \quad (10.6.61)$$

$$u_1(0, y) = g(y), \quad (10.6.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_1(x, 0) = 0, \quad (10.6.63)$$

y

$$\nabla^2 u_2 = 0, \quad (10.6.64)$$

$$u_2(0, y) = 0, \quad (10.6.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_2(x, 0) = f(x). \quad (10.6.66)$$

Analizaremos aquí solamente el problema para la función u_1 , dejando el problema para u_2 para los ejercicios.

$$\begin{array}{c} u(0, y) = g(y) \\ \hline \nabla^2 u = 0 \\ \hline \frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = f(x) \end{array} = \begin{array}{c} u_1(0, y) = g(y) \\ \hline \nabla^2 u_1 = 0 \\ \hline \frac{\partial}{\partial y} u_1(x, 0) = 0 \end{array} + \begin{array}{c} u_2(0, y) = 0 \\ \hline \nabla^2 u_2 = 0 \\ \hline \frac{\partial}{\partial y} u_2(x, 0) = f(x) \end{array}$$

Figura 10.6.3: La ecuación de Laplace en un cuadrante.

Transformada coseno en la variable y . El problema para u_1 puede analizarse de dos formas diferentes. El problema es “semiinfinito” tanto en x como en y . Puesto que u_1 está dada en $x = 0$, puede usarse una transformada de Fourier en senos en la variable x . Sin embargo, $\partial u_1 / \partial y$ está dada en $y = 0$ y, por tanto, también puede usarse una transformada de Fourier en cosenos en la variable y . De hecho, $\partial u_1 / \partial y = 0$ en $y = 0$. Por tanto, preferimos usar la segunda opción puesto que esperamos que la ecuación diferencial ordinaria resultante sea *homogénea*:

$$u_1(x, y) = \int_0^{\infty} \bar{U}_1(x, \omega) \cos \omega y \, d\omega, \quad (10.6.67)$$

$$\bar{U}_1(x, \omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u_1(x, y) \cos \omega y \, dy. \quad (10.6.68)$$

Si aplicamos la transformada de Fourier en cosenos en la variable y al problema para u_1 , entonces obtenemos

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} - \omega^2 \bar{U}_1 = 0. \quad (10.6.69)$$

La variable x varía entre 0 e ∞ y las dos condiciones de contorno para esta ecuación diferencial ordinaria son

$$\bar{U}_1(0, \omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(y) \cos \omega y \, dy \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{U}_1(x, \omega) = 0. \quad (10.6.70)$$

La solución general de (10.6.69) es

$$\bar{U}_1(x, \omega) = a(\omega)e^{-\omega x} + b(\omega)e^{\omega x}, \quad (10.6.71)$$

para $x > 0$ y $\omega > 0$ sólo. A partir de las condiciones de contorno (10.6.70), se sigue que

$$b(\omega) = 0 \quad \text{y} \quad a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(y) \cos \omega y \, dy. \quad (10.6.72)$$

Teorema de convolución. Se puede obtener una forma más sencilla de la solución usando un teorema de convolución para las transformadas de Fourier en cosenos. En el Ejercicio 10.5.7, se pide deducir la fórmula siguiente en la que suponemos que $f(x)$ es par:

Si una transformada de Fourier en cosenos es el producto de dos transformadas de Fourier en cosenos, $H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$, entonces

$$h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty g(\bar{x}) [f(x - \bar{x}) + f(x + \bar{x})] \, d\bar{x}. \quad (10.6.73)$$

En nuestro problema, $\bar{U}_1(x, \omega)$, la transformada de Fourier en cosenos de $u_1(x, y)$, es el producto de $a(\omega)$, la transformada de Fourier en cosenos de $g(y)$, y $e^{-\omega x}$:

$$\bar{U}_1(x, \omega) = a(\omega)e^{-\omega x}.$$

Usemos ahora el par de transformadas de Fourier en cosenos (10.6.67) para obtener la función $Q(y)$ que tiene la transformada de Fourier en cosenos $e^{-\omega x}$:

$$\begin{aligned} Q(y) &= \int_0^\infty e^{-\omega x} \cos \omega y \, d\omega = \int_0^\infty e^{-\omega x} \frac{e^{i\omega y} + e^{-i\omega y}}{2} \, d\omega \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - iy} + \frac{1}{x + iy} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, de acuerdo con el teorema de convolución,

$$u_1(x, y) = \frac{x}{\pi} \int_0^\infty g(\bar{y}) \left[\frac{1}{x^2 + (y - \bar{y})^2} + \frac{1}{x^2 + (y + \bar{y})^2} \right] \, d\bar{y}. \quad (10.6.74)$$

Este resultado también podría haber sido obtenido usando el método de la función de Green (veáse el Capítulo 9). En este caso deberíamos haber introducido fuentes imagen apropiadas, de modo que pudiéramos utilizar la función de Green de todo el espacio para la ecuación de Laplace.

Transformada seno en la variable x . Un método alternativo de resolver el problema para la función $u_1(x, y)$ consiste en usar la transformada de Fourier en senos en la variable x :

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \int_0^\infty \bar{U}_1(\omega, y) \operatorname{sen} \omega x \, d\omega, \\ \bar{U}_1(\omega, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty u_1(x, y) \operatorname{sen} \omega x \, dx. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial ordinaria para $\bar{U}_1(\omega, y)$ es no homogénea,

$$\frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial y^2} - \omega^2 \bar{U}_1 = -\frac{2}{\pi} \omega g(y),$$

y debe resolverse con las siguientes condiciones de contorno en $y = 0$ y en $y = \infty$:

$$\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial y}(\omega, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{U}_1(\omega, y) = 0.$$

Esta forma de atacar el problema se discutirá con mayor extensión en los ejercicios.

10.6.5. La ecuación del calor en el plano (transformada de Fourier bidimensional)

Podemos usar también la transformada de Fourier para resolver problemas que son no acotados en ambas variables, x e y . Consideremos la ecuación del calor en el plano $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}, \quad (10.6.75)$$

sujeta a la condición inicial

$$\boxed{u(x, y, 0) = f(x, y)}. \quad (10.6.76)$$

Si separamos variables, obtenemos soluciones producto de la forma

$$u(x, y, t) = e^{-i\omega_1 x} e^{-i\omega_2 y} e^{-k(\omega_1^2 + \omega_2^2)t},$$

para todos los valores de ω_1 y ω_2 . Las condiciones de contorno correspondientes a $u \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ e $y \rightarrow \pm\infty$ consisten en que las soluciones separadas deben permanecer acotadas cuando $x \rightarrow \pm\infty$ e $y \rightarrow \pm\infty$. Por tanto, estos tipos de soluciones son válidas cualesquiera que sean los números reales ω_1 y ω_2 . Un principio de superposición generalizado implica que la forma de la representación integral de la solución es

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1 x} e^{-i\omega_2 y} e^{-k(\omega_1^2 + \omega_2^2)t} d\omega_1 d\omega_2. \quad (10.6.77)$$

La condición inicial se verifica si

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1 x} e^{-i\omega_2 y} d\omega_1 d\omega_2.$$

Mostraremos que podemos calcular $A(\omega_1, \omega_2)$,

$$A(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\omega_1 x} e^{i\omega_2 y} dx dy, \quad (10.6.78)$$

lo que completa la solución. La función $A(\omega_1, \omega_2)$ se llama **transformada de Fourier doble o bidimensional** de $f(x, y)$.

Transformada de Fourier doble. Hemos usado el método de separación de variables para motivar la introducción de la **transformada de Fourier bidimensional**. Supongamos que tenemos una función de dos variables $f(x, y)$ que decae suficientemente rápido cuando x e $y \rightarrow \pm\infty$. La transformada de Fourier en la variable x (manteniendo y fija, con variable transformada ω_1) es

$$F(\omega_1, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\omega_1 x} dx,$$

y su inversa es

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1, y) e^{-i\omega_1 x} d\omega_1.$$

La función $F(\omega_1, y)$ es una función de la variable y a la que se puede aplicar la transformada de Fourier (aquí con variable transformada ω_2):

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1, y) e^{i\omega_2 y} dy, \\ F(\omega_1, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_2 y} d\omega_2. \end{aligned}$$

Combinando estas transformadas obtenemos el **par de transformadas de Fourier dobles o bidimensionales**:

$$\tilde{F}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\omega_1 x} e^{i\omega_2 y} dx dy, \quad (10.6.79)$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega_1, \omega_2) e^{-i\omega_1 x} e^{-i\omega_2 y} d\omega_1 d\omega_2. \quad (10.6.80)$$

Vector de números de onda. Motivaremos ahora la introducción de una notación más conveniente. Cuando usamos la exponencial compleja $e^{i\omega x}$ nos referimos a ω como el número de onda (el número de ondas en una distancia 2π). Observemos aquí que

$$e^{i\omega_1 x} e^{i\omega_2 y} = e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} = e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}},$$

donde \mathbf{r} es un **vector de posición**⁸ y $\boldsymbol{\omega}$ es un **vector de números de onda**:

$$\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j}, \quad (10.6.81)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\hat{i} + \omega_2\hat{j}. \quad (10.6.82)$$

Para interpretar $e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}}$ estudiemos, por ejemplo, su parte real, $\cos(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) = \cos(\omega_1 x + \omega_2 y)$. Los máximos están localizados en $\omega_1 x + \omega_2 y = 2\pi n$, como se esboza en la Figura 10.6.4. La dirección perpendicular a las crestas es $\nabla(\omega_1 x + \omega_2 y) = \omega_1\hat{i} + \omega_2\hat{j} = \boldsymbol{\omega}$, y recibe el nombre de dirección de la onda. Por tanto, *el vector de números de onda apunta en la dirección de la onda*. Introduzcamos ahora el módulo ω del vector de números de onda

$$\omega^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}|^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

El vector unitario en la dirección de la onda es $\boldsymbol{\omega}/\omega$. Si nos movemos una distancia s en la dirección de la onda (desde el origen), entonces $\mathbf{r} = s\boldsymbol{\omega}/\omega$. Así,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = s\omega \quad \text{y} \quad \cos(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) = \cos(\omega s).$$

Por tanto, ω es la cantidad de ondas en una distancia 2π (en la dirección de la onda). Hemos justificado el nombre de vector de números de onda para $\boldsymbol{\omega}$; esto es, **el vector de números de onda apunta en la dirección de la onda y su módulo es la cantidad de ondas dentro de una distancia 2π (en la dirección de la onda)**.

Usando el vector de posición $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ y el vector de números de onda $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\hat{i} + \omega_2\hat{j}$, el **par de transformadas de Fourier**, (10.6.79) y (10.6.80), se convierte en

$$F(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}} d^2r, \quad (10.6.83)$$

⁸En otros contextos, usamos la notación \mathbf{x} para el vector de posición. Por tanto, $\mathbf{r} = \mathbf{x}$.

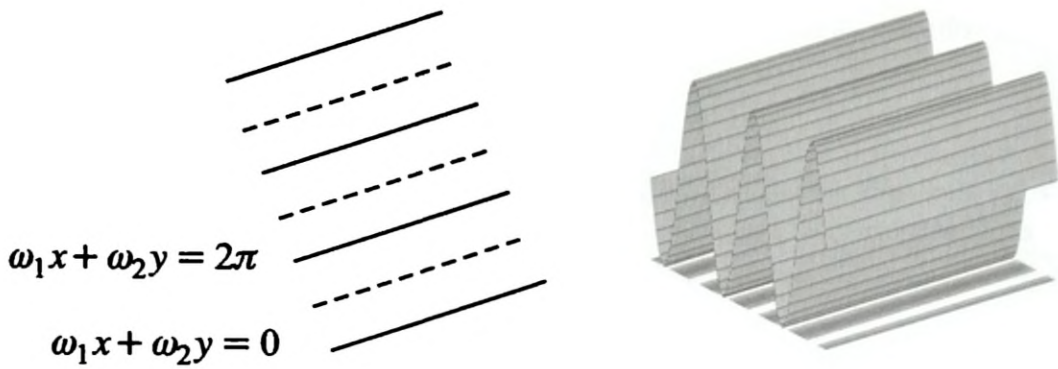


Figura 10.6.4: Una onda bidimensional y sus máximos o crestas.

$$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\boldsymbol{\omega}) e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}} d^2\boldsymbol{\omega}, \quad (10.6.84)$$

donde $f(\mathbf{r}) = f(x, y)$, $d^2\mathbf{r} = dx dy$, $d^2\boldsymbol{\omega} = d\omega_1 d\omega_2$, y $F(\boldsymbol{\omega})$ es la transformada de Fourier doble de $f(\mathbf{r})$.

Usando la notación $\mathcal{F}[u(x, y)]$ para la transformada de Fourier doble de $u(x, y)$, se tienen la siguientes propiedades fundamentales que se comprueban fácilmente:

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}[u], \quad (10.6.85)$$

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = -i\omega_1 \mathcal{F}[u], \quad (10.6.86)$$

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] = -i\omega_2 \mathcal{F}[u], \quad (10.6.87)$$

$$\mathcal{F} [\nabla^2 u] = -\omega^2 \mathcal{F}[u], \quad (10.6.88)$$

donde $\omega^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega_1^2 + \omega_2^2$, siempre que u decaiga suficientemente rápido cuando x e $y \rightarrow \pm\infty$. Al final de esta subsección se puede encontrar una tabla breve de transformadas de Fourier bidimensionales.

La ecuación del calor. La ecuación del calor bidimensional puede resolverse directamente mediante el uso de la transformada de Fourier doble, en lugar de usar el método de separación de variables:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -k\omega^2 \bar{U}, \quad (10.6.89)$$

donde \bar{U} es la transformada de Fourier doble de $u(x, y, t)$:

$$\mathcal{F}[u] = \bar{U}(\boldsymbol{\omega}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t) e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}} dx dy. \quad (10.6.90)$$

La solución elemental de (10.6.89) es

$$\bar{U}(\boldsymbol{\omega}, t) = A(\boldsymbol{\omega})e^{-k\boldsymbol{\omega}^2 t}, \quad (10.6.91)$$

con lo que, aplicando (10.6.76), vemos que $A(\boldsymbol{\omega})$ es la transformada de Fourier de la condición inicial:

$$A(\boldsymbol{\omega}) = \bar{U}(\boldsymbol{\omega}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}} dx dy. \quad (10.6.92)$$

Por tanto, la solución de la ecuación del calor bidimensional es

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{U}(\boldsymbol{\omega}, t) e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}} d\omega_1 d\omega_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\boldsymbol{\omega}) e^{-k\boldsymbol{\omega}^2 t} e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}} d\omega_1 d\omega_2, \end{aligned} \quad (10.6.93)$$

que coincide con lo sugerido anteriormente por separación de variables.

Aplicación del teorema de convolución. En el caso de *transformadas de Fourier dobles*, también se verifica un **teorema de convolución** (Ejercicio 10.6.7): si $H(\boldsymbol{\omega}) = F(\boldsymbol{\omega})G(\boldsymbol{\omega})$, entonces

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}_0) g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dx_0 dy_0. \quad (10.6.94)$$

Ahora bien, para la ecuación del calor bidimensional hemos probado que $\bar{U}(\boldsymbol{\omega}, t)$ es el producto de $e^{-k\boldsymbol{\omega}^2 t}$ y $A(\boldsymbol{\omega})$, la transformada de Fourier bidimensional de la condición inicial. Por tanto, necesitamos calcular la función cuya transformada de Fourier doble es $e^{-k\boldsymbol{\omega}^2 t}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\boldsymbol{\omega}^2 t} e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}} d\omega_1 d\omega_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega_1^2 t} e^{-i\omega_1 x} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega_2^2 t} e^{-i\omega_2 y} d\omega_2 \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-x^2/4kt} \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-y^2/4kt} = \frac{\pi}{kt} e^{-r^2/4kt}. \end{aligned}$$

La transformada inversa de $e^{-k\boldsymbol{\omega}^2 t}$ es el producto de dos transformadas inversas unidimensionales, esto es, una gaussiana bidimensional, $(\pi/kt)e^{-r^2/4kt}$, donde $r^2 = x^2 + y^2$. Así pues, la solución del problema de valor inicial para la ecuación del calor

bidimensional en el plano es

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) \frac{1}{4\pi kt} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4kt} \right] dx_0 dy_0.$$

(10.6.95)

La función de influencia para la condición inicial es

$$g(x, y, t; x_0, y_0, 0) = \frac{1}{4\pi kt} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{4kt} \right] = \frac{1}{4\pi kt} e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 / 4kt},$$

y representa el efecto en la posición x, y (en tiempo t) de la energía térmica inicial en la posición x_0, y_0 . **La función de influencia para la ecuación del calor bidimensional es el producto de las funciones de influencia de dos ecuaciones del calor unidimensionales.**

Tabla 10.6.1: TRANSFORMADA DE FOURIER DOBLE O BIDIMENSIONAL

$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega \cdot \mathbf{r}} d\omega_1 d\omega_2$	$F(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{i\omega \cdot \mathbf{r}} dx dy$	Referencia
$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \\ \nabla^2 f \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} -i\omega_1 F(\omega), -i\omega_2 F(\omega) \\ -\omega^2 F(\omega) \end{array} \right\}$	Derivadas (Sección 10.6.5)
$\frac{\pi}{\beta} e^{-\mathbf{r}^2 / 4\beta}$	$e^{-\beta \omega^2}$	Gaussiana (Sección 10.6.5)
$f(\mathbf{r} - \beta)$	$e^{i\omega \cdot \beta} F(\omega)$	Ejercicio 10.6.8
$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}_0) g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dx_0 dy_0$	$F(\omega) G(\omega)$	Convolución (Ejercicio 10.6.7)

EJERCICIOS 10.6

10.6.1. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

para $0 < y < H, -\infty < x < \infty$, sujeta a las condiciones:

- *(a) $u(x, 0) = f_1(x)$ y $u(x, H) = f_2(x)$.
- (b) $\frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) = f_1(x)$ y $u(x, H) = f_2(x)$.
- (c) $u(x, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x, H) + hu(x, H) = f(x)$.

10.6.2. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{para } 0 < x < L, y > 0,$$

sujeta a las siguientes condiciones de contorno; si existe alguna condición de solubilidad, enunciarla y explicarla físicamente:

- (a) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = g_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = g_2(y), \quad u(x, 0) = f(x).$
 * (b) $u(0, y) = g_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0.$
 (c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x).$
 (d) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = g(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0.$

10.6.3. (a) Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

para $x < 0, -\infty < y < \infty$, sujeta a la condición $u(0, y) = g(y)$.

- (b) Determinar la solución, simplificando lo máximo posible su expresión, para el caso

$$g(y) = \begin{cases} 0 & |y| > 1, \\ 1 & |y| < 1. \end{cases}$$

10.6.4. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

para $x > 0, y > 0$, sujeta a:

- * (a) $u(0, y) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = f(x)$. *Indicación:* invertir $\partial \bar{U} / \partial y$.
 (b) $u(0, y) = 0$ y $u(x, 0) = f(x)$.

10.6.5. Sea $w = \partial u / \partial y$ en el Ejercicio 10.6.4(a). Demostrar que w verifica las condiciones del apartado (b) de ese mismo ejercicio. Resolver de esta manera el Ejercicio 10.6.4.

10.6.6. Considérese la Ecuación (10.6.61) con las condiciones de contorno (10.6.62) - (10.6.63). En el texto usamos la transformada de Fourier en cosenos en la variable y para resolverlo. Aquí, vamos a usar la transformada de Fourier en senos en la variable x .

- (a) Obtener $\bar{U}_1(\omega, y)$ si

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial y^2} - \omega^2 \bar{U}_1 &= -\frac{2}{\pi} \omega g(y), \\ \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial y}(\omega, 0) &= 0, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} \bar{U}_1(\omega, y) &= 0. \end{aligned}$$

Indicación: usar las Fórmulas (9.3.9) - (9.3.12) o (13.3.10) con exponenciales.

(b) Calcular $u_1(x, y)$. Demostrar que (10.6.74) es válida.

10.6.7. Deducir el teorema de convolución bidimensional (10.6.94).

10.6.8. Deducir el siguiente teorema de traslación para las transformadas de Fourier bidimensionales: la transformada inversa de $e^{i\omega \cdot \beta} F(\omega)$ es $f(r - \beta)$.

10.6.9. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla u = k \nabla^2 u,$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, y, 0) = f(x, y).$$

Indicación: véase el Ejercicio 10.6.7. Explicar cómo resulta alterada la función de influencia por el término de convección $v_0 \cdot \nabla u$.

10.6.10. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, y, 0) = f(x, y).$$

10.6.11. Considérese la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \begin{array}{l} x > 0, \\ y > 0, \end{array}$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, y, 0) = f(x, y).$$

Resolverla con las siguientes condiciones de contorno:

*(a) $u(0, y, t) = 0$ y $u(x, 0, t) = 0$.

(b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0$.

(c) $u(0, y, t) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0$.

10.6.12. Considérese la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \begin{array}{l} 0 < x < L, \\ y > 0, \end{array}$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, y, 0) = f(x, y).$$

Resolverla con las siguientes condiciones de contorno:

- * (a) $u(0, y, t) = 0, \quad u(L, y, t) = 0, \quad u(x, 0, t) = 0.$
 (b) $u(0, y, t) = 0, \quad u(L, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0.$
 (c) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, t) = 0.$

10.6.13. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \begin{array}{l} 0 < y < H, \\ -\infty < x < \infty, \end{array}$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

y a las condiciones de contorno

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, H, t) = 0.$$

10.6.14. (a) Calcular la solución $u(x, y, z, t)$ del siguiente problema, sin derivar ni aplicar el teorema de convolución:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \\ u(x, y, 0, t) = 0, \end{array} \right\} \text{ en } \begin{array}{l} t > 0, \\ -\infty < x < \infty, \\ -\infty < y < \infty, \\ 0 < z < \infty. \end{array}$$

(b) Simplificar la respuesta (desarrollando las ideas de convolución que se necesiten).

10.6.15. Considérese el problema

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad z > 0, \\ u(x, y, 0) = f(x, y). \end{array}$$

- * (a) Determinar la transformada de Fourier doble de u .
 * (b) Obtener $u(x, y, z)$ calculando la integral de inversión en coordenadas polares. *Indicaciones:* es más fácil obtener primero w , donde $u = \partial w / \partial z$, y usar entonces la siguiente integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} = \frac{2\pi}{ab},$$

que puede deducirse usando el cambio de variable $z = e^{i\theta}$ y la teoría de funciones de variable compleja.

(c) Comparar los resultados obtenidos con los que se obtienen usando la función de Green.

10.6.16. Considérese la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0,$$

dentro de un cuarto de círculo (Figura 10.6.5) (una región acotada), sujeta a las condiciones de contorno:

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad u(r, 0) = g_1(r), \quad u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = g_2(r).$$

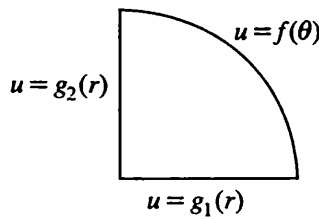


Figura 10.6.5:

(a) Dividir el problema en otros tres, de modo que $u = u_1 + u_2 + u_3$, donde

$$\begin{aligned} u_1(a, \theta) &= 0, & u_2(a, \theta) &= 0, & u_3(a, \theta) &= f(\theta), \\ u_1(r, 0) &= g_1(r), & u_2(r, 0) &= 0, & u_3(r, 0) &= 0, \\ u_1\left(r, \frac{\pi}{2}\right) &= 0, & u_2\left(r, \frac{\pi}{2}\right) &= g_2(r), & u_3\left(r, \frac{\pi}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Obtener $u_3(r, \theta)$.

*(b) Obtener $u_2(r, \theta)$.

Indicaciones: intentar usar el método de separación de variables, $u_2(r, \theta) = \phi(r)h(\theta)$. Demostrar que $\phi(r) = \text{sen}[\sqrt{\lambda} \ln(r/a)]$ para todo $\lambda > 0$. Será necesario usar una transformada de Fourier en senos en la variable $\rho = -\ln(r/a)$.

Comentarios: éste es un problema singular de Sturm-Liouville con espectro continuo, sobre un intervalo *acotado*. El problema singular de Sturm-Liouville correspondiente para la ecuación de ondas sobre un cuarto de círculo (que involucra funciones de Bessel) tiene espectro discreto.

10.6.17. Rehacer el problema descrito en el Ejercicio 10.6.16(b) para la función $u_2(r, \theta)$. Introducir la variable independiente $\rho = -\ln(r/a)$ en lugar de r . *Comentario:* en variable compleja, ésta es la transformación conforme

$$w = -\ln\left(\frac{z}{a}\right), \quad \text{donde} \quad z = x + iy$$

(es decir, $\ln(z/a) = \ln|z/a| + i\theta$).

(a) Deducir la ecuación en derivadas parciales que satisface u_2 en las variables ρ y θ . Esbozar la frontera en coordenadas cartesianas, ρ y θ .

(b) Resolver el problema obtenido en el apartado (a). *Indicación:* puede resultar útil la Sección 10.6.2.

(c) Comparar con el Ejercicio 10.6.16.

***10.6.18.** Resolver el problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x).\end{aligned}$$

Indicación: usar el teorema de convolución y el Ejercicio 10.4.6.

10.6.19. En el problema de la Sección 10.6.1 demostramos que

$$\bar{U}(\omega, t) = F(\omega) \cos c\omega t.$$

Obtener $u(x, t)$ usando el teorema de convolución. *Indicación:* $\cos c\omega t$ no tiene una transformada de Fourier ordinaria, pero se puede deducir la transformada de Fourier inversa de $\cos c\omega t$ usando la delta de Dirac.

10.6.20. Rehacer el Ejercicio 10.6.17 para $u_3(r, \theta)$ en lugar de para $u_2(r, \theta)$.

10.7. Scattering y scattering inverso

Hasta ahora hemos estudiado algunos problemas de autovalores con espectro continuo y otros con espectro discreto. En esta sección, estudiaremos brevemente un problema de autovalores que tiene espectro continuo y espectro discreto a la vez. Una motivación para ello proviene de separar variables $[\psi(x, t) = e^{-i\lambda t} \phi(x)]$ en la versión normalizada de la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica, $i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + u(x)\psi$. Si el potencial $u(x)$ no depende del tiempo, obtenemos el problema de contorno

$$\boxed{\frac{d^2 \phi}{dx^2} + (\lambda - u(x))\phi = 0.} \quad (10.7.1)$$

Supondremos que $u(x)$ decae de manera suficientemente rápida cuando $x \rightarrow \pm\infty$, para que existan soluciones de la ecuación en derivadas parciales que decaigan hacia cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Si $u(x) = 0$, entonces $\lambda = k^2 > 0$ representa el espectro continuo, de modo que $\phi(x) = e^{\pm ikx}$ corresponde a la transformada de Fourier. Si $u(x) \neq 0$, entonces, en general, la ecuación diferencial (10.7.1) no se puede resolver de forma exacta, por lo que discutiremos sólo aspectos teóricos de (10.7.1). Se puede probar que siempre existe un espectro continuo análogo a la transformada de Fourier y que puede haber también un espectro discreto.

Espectro continuo. Si $u(x) \rightarrow 0$ lo suficientemente rápido cuando $x \rightarrow \pm\infty$, entonces vemos intuitivamente (esto puede también deducirse matemáticamente) que $\phi(x)$ debería aproximarse por $e^{\pm ikx}$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Es útil imaginar que e^{-ikx} corresponde a una onda que viaja hacia la izquierda (puesto que la solución dependiente del tiempo correspondiente, $e^{-ikx}e^{-ik^2t} = e^{-ik(x+kt)}$, va hacia la izquierda si $k > 0$) y que e^{+ikx} corresponde a una onda que viaja hacia la derecha. Analicemos una solución especial de (10.7.1) que corresponde, para $x \rightarrow +\infty$, a una onda de amplitud unidad que viaja de derecha a izquierda. El coeficiente variable $u(x)$ (potencial) provoca algunas reflexiones y la amplitud transmitida también cambia, de modo que

$$\phi(x) \sim e^{-ikx} + R(k)e^{+ikx} \quad \text{cuando } x \rightarrow +\infty, \quad (10.7.2)$$

$$\phi(x) \sim T(k)e^{-ikx} \quad \text{cuando } x \rightarrow -\infty, \quad (10.7.3)$$

donde $R(k)$ se llama **coeficiente de reflexión** y $T(k)$ **coeficiente de transmisión**. Estos coeficientes son números complejos y puede probarse que satisfacen una ecuación de conservación de energía, $|R|^2 + |T|^2 = 1$. Pueden obtenerse otras soluciones de (10.7.1).

Espectro discreto. Puede haber un conjunto discreto de autovalores negativos λ que verifiquen (10.7.1) junto a las condiciones de contorno $\phi(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\lambda = -\kappa_n^2 \quad (\text{con } \kappa_n > 0) \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (10.7.4)$$

Las autofunciones correspondientes $\phi_n(x)$ se conocen como **estados acotados** y se pueden elegir de modo que verifiquen

$$\phi_n(x) \sim c_n e^{-\kappa_n x} \quad \text{cuando } x \rightarrow +\infty, \quad (10.7.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^2(x) dx = 1. \quad (10.7.6)$$

Con objeto de que la integral esté acotada, la autofunción debe decaer exponencialmente cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Es posible dar otras normalizaciones distintas de (10.7.6). En general, puede probarse a partir de la ecuación diferencial (10.7.1) que, para los

estados acotados ($\lambda < 0$), si el coeficiente $\lambda - u(x) < 0$ para todo x , entonces la solución se comporta como una exponencial de una misma clase para todos los x y no puede ser un estado acotado. Por tanto, concluimos que una condición necesaria (pero no suficiente) para que exista un estado acotado es que $u(x)$ debe ser menor que cero en alguna parte.

Ejemplo de espectro continuo: función potencial delta. Como ejemplo elemental, supondremos que el potencial $u(x)$ es una delta de Dirac

$$u(x) = U\delta(x), \quad (10.7.7)$$

y que ϕ es continua y $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ verifica la condición de salto correspondiente. La ecuación diferencial es fácil para $x \neq 0$, de modo que (10.7.2) y (10.7.3) son válidas no sólo asintóticamente sino también para $x > 0$ y $x < 0$, respectivamente. La continuidad de $\phi(x)$ en $x = 0$ implica que

$$1 + R(k) = T(k). \quad (10.7.8)$$

La condición de salto $\frac{d\phi}{dx}\Big|_{0-}^{0+} = U\phi(0)$ se convierte en

$$-ik + ikR(k) + ikT(k) = UT(k). \quad (10.7.9)$$

Son necesarios algunos pasos algebraicos para probar que $R(k) = \frac{U}{2ik-U}$ y $T(k) = \frac{2ik}{2ik-U}$. De este modo, en este ejemplo tenemos que $|R|^2 + |T|^2 = 1$, lo que constituye un resultado general.

Ejemplo de autovalores y autofunciones discretos: potencial delta de Dirac. Para el potencial delta de Dirac (10.7.7), la condición (10.7.5) es válida para $x > 0$, mientras que es más sencillo observar que $\phi_n(x) = b_n e^{\kappa_n x}$ para $x < 0$. La continuidad en $x = 0$ implica que $b_n = c_n$. La condición de salto en $x = 0$, $\frac{d\phi}{dx}\Big|_{0-}^{0+} = U\phi_n(0)$, se convierte en $-c_n \kappa_n - c_n \kappa_n = U c_n$. De esto obtenemos que

$$\kappa_n = -\frac{1}{2}U. \quad (10.7.10)$$

Puesto que $\kappa_n > 0$, no existen autovalores discretos para el potencial delta de Dirac si $U > 0$, pero existe exactamente un autovalor discreto negativo si $U < 0$.

$$\lambda = -\kappa_n^2 = -\frac{1}{4}U^2. \quad (10.7.11)$$

Solamente existe un estado acotado para el potencial delta de Dirac con signo negativo, lo que es consistente con la condición necesaria, mencionada más arriba, de que $u(x)$ debe ser menor que cero en alguna parte para que pueda existir tal estado acotado.

Scattering⁹ inverso. Durante mucho tiempo los teóricos se preguntaron si podría determinarse un único potencial a partir de los coeficientes de reflexión y de transmisión. A principios de la década de 1950 a 1959, Gelfand y Levitan [1955] probaron el resultado notable de que el potencial podía ser determinado unívocamente si los coeficientes de reflexión y transmisión fueran obtenidos a partir del conocimiento del espectro discreto. En particular, el potencial podría reconstruirse a partir de

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x), \quad (10.7.12)$$

donde $K(x, y)$ es la única solución de la ecuación integral lineal no homogénea de Gelfand-Levitan-Marchenko

$$K(x, y) + F(x + y) + \int_x^\infty K(x, z)F(y + z) dz = 0, \quad \text{para } y > x. \quad (10.7.13)$$

El término no homogéneo $F(s)$ es la transformada de Fourier generalizada inversa del coeficiente de reflexión $R(k)$, (10.7.2), y por tanto, incluye también contribuciones del espectro discreto (10.7.5),

$$F(s) = \sum_{n=1}^N c_n^2 e^{-\kappa_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k) e^{ikx} dk, \quad (10.7.14)$$

donde $\lambda = -\kappa_n^2$ son los autovalores discretos y los números c_n están relacionados con los estados acotados.

EJERCICIOS 10.7

10.7.1. Considérese el potencial escalón dado por $u(x) = U$ para $-1 < x < 1$ y $u(x) = 0$ en otro caso.

- Encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión si $U < 0$.
- Determinar el espectro discreto ($\lambda = -\kappa^2$ con $\kappa > 0$), resolviendo (10.7.1). *Indicaciones:* (i) puesto que afirmamos que $\lambda - u(x)$ debe ser mayor que cero en algún sitio, se puede suponer que $U < \lambda = -\kappa^2$; (ii) los cálculos son más sencillos si se analizan separadamente los estados acotados pares e impares.
- Encontrar los coeficientes de reflexión y transmisión (para todos los λ positivos) si $U > 0$.

10.7.2. Demostrar que $|R|^2 + |T|^2 = 1$ para la función potencial delta del texto.

10.7.3. (a) Demostrar que el wronskiano, $W(\phi_1, \phi_2) = \phi_1(\phi_2)_x - \phi_2(\phi_1)_x$, de dos soluciones linealmente independientes de (10.7.1) es una constante.

⁹N.T.: el uso de la palabra inglesa *scattering* es aceptado comúnmente entre la comunidad físico-matemática de habla española. Su traducción literal sería "dispersión".

- (b) La función $\phi(x)$ que verifica (10.7.2) y (10.7.3) y su conjugada compleja, $\phi^*(x)$, son dos soluciones linealmente independientes de (10.7.1). Demostrar que $|R|^2 + |T|^2 = 1$, calculando el wronskiano para estas soluciones y usando las condiciones asintóticas cuando $x \rightarrow \pm\infty$.

10.7.4. Condiciones de ortogonalidad

- (a) Demostrar que las autofunciones discretas son ortogonales a las autofunciones del espectro continuo.
- (b) Demostrar que cada autofunción discreta es ortogonal a cualquier otra autofunción discreta.

- 10.7.5. (a) Demostrar que un polo del coeficiente de transmisión en el semiplano complejo superior corresponde a valores del espectro discreto.
- (b) Comprobar que esto ocurre en el ejemplo de la delta de Dirac tratado en el texto.

- 10.7.6. Un **potencial sin reflexión** es aquél en el que el coeficiente de reflexión es nulo para todo k . Encontrar un ejemplo de potencial sin reflexión, resolviendo la ecuación integral de Gelfand-Levitan-Marchenko, (10.7.13). Supóngase que existe un autovalor discreto $\lambda = -\kappa^2$ y que el correspondiente coeficiente c^2 está dado. *Indicación:* la ecuación integral es separable.

Capítulo 11

Función de Green para problemas dependientes del tiempo

11.1. Introducción

En el Capítulo 9 obtuvimos la función de Green para problemas independientes del tiempo usando, principalmente, la función de Green en todo el espacio. Por otro lado, en el Capítulo 10 estudiamos problemas definidos en todo el espacio mediante el uso de la transformada de Fourier. Aquí, aprovecharemos las ideas de esos dos capítulos y analizaremos la función de Green para las ecuaciones del calor y de ondas, tanto en una dimensión espacial como en dimensiones dos y tres.

11.2. Función de Green para la ecuación de ondas

11.2.1. Introducción

En esta sección, resolveremos la ecuación de ondas con una fuente dependiente tanto de la variable espacial como del tiempo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u + Q(\mathbf{x}, t), \quad (11.2.1)$$

con las dos condiciones iniciales,

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad (11.2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}). \quad (11.2.3)$$

Si el problema se define en un dominio acotado, o acotado sólo en alguna dirección (dominio semiinfinito), entonces, en general, $u(\mathbf{x}, t)$ debe satisfacer también alguna condición no homogénea en la frontera. Trataremos a la vez los casos de una, dos y tres dimensiones (en una dimensión el operador laplaciano es $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2$).

Introducimos la función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ como la solución que se obtiene al considerar una fuente concentrada en el punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, y que actúa instantáneamente sólo en el tiempo $t = t_0$:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 G + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0), \quad (11.2.4)$$

donde $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es la delta de Dirac correspondiente a la dimensión considerada. En problemas finitos o semiinfinitos, la función de Green G debe también satisfacer la condición de frontera correspondiente a la condición satisfecha por $u(\mathbf{x}, t)$.

La función de Green se interpreta como la respuesta en el punto \mathbf{x} y en el tiempo t , producida por una fuente localizada en el punto \mathbf{x}_0 y en el tiempo t_0 . Como queremos que esta función G dependa sólo del efecto de la fuente en $t = t_0$, y no de ningún efecto anterior, imponemos que G sea cero en cualquier instante anterior al instante en que actúa la fuente, ($t < t_0$):

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0, \quad \text{para } t < t_0. \quad (11.2.5)$$

Esta condición es conocida como **principio de causalidad** (véase la Sección 9.2).

La función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ depende sólo del tiempo transcurrido desde la acción de la fuente. Si introducimos el **lapso de tiempo** como el intervalo de tiempo transcurrido, $T = t - t_0$,

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} = c^2 \nabla^2 G + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(T),$$

$$G = 0, \quad \text{para } T < 0,$$

entonces se puede ver G como la respuesta debida a la acción de una fuente concentrada en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ y en $T = 0$. Ésta es la propiedad de **traslación**,

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = G(\mathbf{x}, t - t_0; \mathbf{x}_0, 0). \quad (11.2.6)$$

11.2.2. Fórmula de Green

Antes de obtener la función de Green (en varias dimensiones), vamos a mostrar cómo se puede escribir la solución de la ecuación de ondas no homogénea (11.2.1) (con datos inicial y de frontera no nulos) en términos de esta función de Green. En el caso de problemas independientes del tiempo (problemas de tipo Sturm-Liouville o incluso la ecuación de Poisson en varias dimensiones), la idea era usar la fórmula de Green:

Operador de tipo Sturm-Liouville [$L = d/dx(p d/dx) + q$]:

$$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b \quad (11.2.7)$$

Laplaciano en dimensión tres ($L = \nabla^2$):

$$\iiint [uL(v) - vL(u)] d^3x = \iint (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \hat{n} dS, \quad (11.2.8)$$

donde $d^3x = dV = dx dy dz$. Para el laplaciano en dimensión dos se considera la fórmula anterior con las modificaciones obvias.

Para extender estas ideas a la ecuación de ondas no homogénea, introducimos el operador apropiado

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2. \quad (11.2.9)$$

Con esta notación, la ecuación de ondas no homogénea (11.2.1) se escribe

$$L(u) = Q(\mathbf{x}, t), \quad (11.2.10)$$

y la función de Green (11.2.4) satisface a su vez

$$L(G) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0). \quad (11.2.11)$$

Nuestro propósito es deducir una fórmula de Green análoga a (11.2.7) o (11.2.8), válida para el operador de ondas L dado por (11.2.9). Utilizaremos la notación correspondiente a dimensión tres, pero indicaremos, cuando sea preciso, las modificaciones necesarias para tratar los casos de dimensiones uno y dos. Como ahora el operador L depende tanto de la variable espacial \mathbf{x} como del tiempo t , necesitaremos integrar respecto de ambas variables. Observando que el operador de ondas verifica

$$uL(v) - vL(u) = u \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u),$$

las fórmulas de Green anteriores proporcionan la nueva “fórmula de Green”:

$$\int_{t_i}^{t_f} \iiint [uL(v) - vL(u)] d^3x dt = \iiint \left(u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} \right) \Big|_{t_i}^{t_f} d^3x - c^2 \int_{t_i}^{t_f} \left(\oint (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \hat{n} dS \right) dt, \quad (11.2.12)$$

donde \iiint denota integración sobre un dominio tridimensional (en una dimensión se escribe \int_a^b), así como \oint denota integración sobre la frontera del dominio (\int_a^b en una dimensión). Los términos de la derecha representan la contribución de las fronteras: el primero corresponde a los extremos del intervalo temporal ($t = t_i$ y $t = t_f$), integrados en el dominio espacial, y el segundo a la frontera espacial integrada en el intervalo de tiempos. Estas fronteras espacio-temporales se pueden observar (en una dimensión) en la Figura 11.2.1.

Por ejemplo, si ambas funciones u y v satisfacen las condiciones de frontera homogéneas usuales (sobre la frontera espacial y para todos los tiempos), entonces la integral $\oint (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \hat{n} dS$ es cero, mientras que

$$\iiint \left(u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{t_i}^{t_f} d^3x$$

puede no ser cero, debido a la contribución de los tiempos “inicial” t_i y “final” t_f .

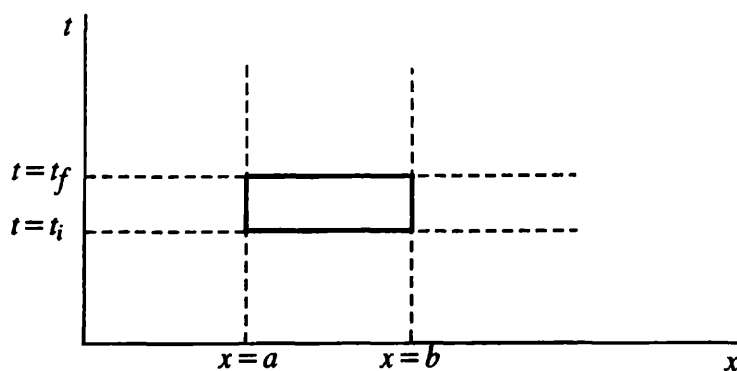


Figura 11.2.1: Frontera espacio-temporal para la ecuación de ondas unidimensional.

11.2.3. Reciprocidad

En los problemas independientes del tiempo, hemos visto que la función de Green es simétrica, $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = G(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$, y la demostración se basaba en el uso de la fórmula de Green con dos funciones de Green diferentes [$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)$ y $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2)$]. Era crucial el hecho de que los términos de frontera en la fórmula de Green se anulaban.

Vamos a ver que la ecuación de ondas verifica una propiedad parecida. La función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ satisface

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0), \tag{11.2.13}$$

además del principio de causalidad,

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0, \quad \text{para } t < t_0. \tag{11.2.14}$$

Así, G será no nula sólo para $t > t_0$. Si queremos utilizar la fórmula de Green para probar una propiedad de reciprocidad, necesitamos una segunda función de Green. Si tomamos $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_A, t_A)$, entonces la contribución sobre la frontera espacial (o en el infinito) $\int_{t_i}^{t_f} \oint (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \, dt$ se anula, mientras que la contribución sobre la frontera temporal

$$\iiint \left(u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{t_i}^{t_f} d^3x$$

no tiene por qué anularse a la vez en $t = t_i$ y en $t = t_f$. De hecho, en la variable t nuestro problema es un problema de valores iniciales, no un problema de contorno. Por otro lado, si tomamos $t_i \leq t_0$ en la fórmula de Green, entonces la contribución “inicial” sí se anula.

Lo que haremos entonces será considerar una función de Green con una fuente variable en el tiempo, $G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t)$, que llamaremos **función de Green de fuente variable**. Utilizando la propiedad de traslación tenemos

$G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t) = G(\mathbf{x}, -t; \mathbf{x}_1, -t_1),$

(11.2.15)

ya que los lapsos de tiempo son iguales $[-t - (-t_1) = t_1 - t]$. Por el principio de causalidad esta función es cero si $t_1 < t$ (o lo que es lo mismo, $-t < -t_1$):

$$G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t) = 0, \quad t > t_1. \tag{11.2.16}$$

Éste es el llamado **principio de causalidad con fuente variable**. Veamos que esto implica que la contribución “final” en la fórmula de Green se anula.

Para ello queremos determinar la ecuación diferencial que verifica la función de Green que acabamos de introducir. Si ponemos $t = -\tau$ en (11.2.15), obtenemos

$$G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t) = G(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}_1, -t_1),$$

es decir, la función de Green normal con fuente localizada en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ y $\tau = -t_1$ ($t = t_1$), y variable temporal τ . Por tanto:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - c^2 \nabla^2 \right) G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \delta(t - t_1).$$

Como $\tau = -t$, la regla de la cadena implica $\partial/\partial\tau = -\partial/\partial t$, mientras que $\partial^2/\partial\tau^2 = \partial^2/\partial t^2$. Esto quiere decir que el operador de ondas es simétrico respecto del tiempo, por lo que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\right) G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t) = L[G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\delta(t - t_1). \quad (11.2.17)$$

Aplicamos ahora la fórmula de Green (11.2.12) con dos funciones de Green, una con tiempo de respuesta variable,

$$u = G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0), \quad (11.2.18)$$

y otra con fuente variable en el tiempo,

$$v = G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t), \quad (11.2.19)$$

pero ambas son soluciones de ecuaciones que involucran el *mismo* operador de ondas, $L = \partial^2/\partial t^2 - c^2\nabla^2$. Integrando en el tiempo desde $-\infty$ hasta $+\infty$ en la fórmula de Green (11.2.12) (es decir, $t_i = -\infty$, $t_f = +\infty$), y utilizando el hecho de que las dos funciones de Green satisfacen las mismas condiciones de frontera homogéneas, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \iiint [u\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\delta(t-t_1) - v\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\delta(t-t_0)] d^3x dt = \iiint \left(u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} d^3x. \quad (11.2.20)$$

El principio de causalidad implica ahora que u y $\partial u/\partial t$ se anulan para $t < t_0$, así como que v y $\partial v/\partial t$ se anulan para $t > t_1$. Por tanto, el miembro de la derecha de (11.2.20) se anula. Finalmente, las propiedades de la delta de Dirac implican que u evaluada en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$, $t = t_1$, es igual a v evaluada en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $t = t_0$:

$$G(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = G(\mathbf{x}_0, t_1; \mathbf{x}_1, t_0), \quad (11.2.21)$$

que es la **fórmula de reciprocidad** para la función de Green de la ecuación de ondas. Si $t_1 > t_0$, la respuesta en \mathbf{x}_1 (en tiempo t_1) producida por una fuente concentrada en \mathbf{x}_0 (y en tiempo t_0) es la misma que la respuesta en \mathbf{x}_0 (en tiempo t_1) debida a una fuente concentrada en \mathbf{x}_1 , siempre que los lapsos de tiempo sean iguales en ambas fuentes. Vemos pues que intercambiar el punto de localización de la fuente y el punto de respuesta no afecta a ésta, propiedad conocida como **ley de reciprocidad de Maxwell** para funciones de Green dependientes del tiempo.

11.2.4. Uso de la función de Green

Igual que en los capítulos precedentes, usando una fórmula de Green apropiada, del tipo de la Fórmula (11.2.12), podemos establecer una relación entre la función de Green y la solución del problema no homogéneo. Sean

$$u = u(\mathbf{x}, t), \tag{11.2.22}$$

$$v = G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t) = G(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}, t), \tag{11.2.23}$$

donde $u(\mathbf{x}, t)$ es la solución de la ecuación de ondas no homogénea

$$L(u) = Q(\mathbf{x}, t),$$

con las correspondientes condiciones iniciales para $u(\mathbf{x}, 0)$ y $\partial u/\partial t(\mathbf{x}, 0)$, y donde $G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t)$ es la función de Green de fuente variable que verifica (11.2.17), es decir:

$$L[G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0),$$

así como el principio de causalidad de fuente variable

$$G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t) = 0, \quad \text{para } t > t_0.$$

La función G satisface las condiciones de frontera homogéneas, pero u no. Aplicamos la fórmula de Green (11.2.12) a estas dos funciones con $t_i = 0$ y $t_f = t_0+$, justo hasta un instante más allá de la aparición de la fuente, concentrada en $t = t_0$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0+} \iiint [u(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0) - G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t)Q(\mathbf{x}, t)]d^3x dt \\ &= \iiint \left(u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} \right) \Big|_0^{t_0+} d^3x - c^2 \int_0^{t_0+} \left[\oiint (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right] dt. \end{aligned}$$

En $t = t_0+$ se tiene $v = 0$ y $\partial v/\partial t = 0$, pues v es la función de Green de fuente variable. Usando la fórmula de reciprocidad (11.2.21) tenemos

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_0, t_0) &= \int_0^{t_0+} \iiint G(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}, t)Q(\mathbf{x}, t) d^3x dt \\ &+ \iiint \left[\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0)G(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}, 0) - u(\mathbf{x}, 0)\frac{\partial}{\partial t}G(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}, 0) \right] d^3x \\ &- c^2 \int_0^{t_0+} \left[\oiint (u(\mathbf{x}, t)\nabla G(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}, t) - G(\mathbf{x}_0, t_0; \mathbf{x}, t)\nabla u(\mathbf{x}, t)) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \right] dt. \end{aligned}$$

El extremo superior t_0+ en la integral temporal se puede reemplazar por t_0 mediante un paso al límite. Intercambiando ahora los papeles de \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 (así como los de t y t_0), obtenemos una fórmula de representación de $u(\mathbf{x}, t)$ en términos de la función

de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$:

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}, t) = & \int_0^t \iiint G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) Q(\mathbf{x}_0, t_0) d^3x_0 dt_0 \\
 & + \iiint \left[\frac{\partial u}{\partial t_0}(\mathbf{x}_0, 0) G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) - u(\mathbf{x}_0, 0) \frac{\partial}{\partial t_0} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0) \right] d^3x_0 \\
 & - c^2 \int_0^t \left[\oiint (u(\mathbf{x}_0, t_0) \nabla_{\mathbf{x}_0} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) - G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \nabla_{\mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}_0, t_0)) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_0 \right] dt_0.
 \end{aligned} \tag{11.2.24}$$

Observemos que $\nabla_{\mathbf{x}_0}$ quiere decir derivada respecto de la posición de la fuente. La Ecuación (11.2.24) expresa la influencia de cada uno de los tres tipos de términos frontera: término de fuente, condiciones iniciales y condiciones de frontera. En particular, al dato posición inicial $u(\mathbf{x}_0, 0)$, le corresponde el término de influencia

$$-\frac{\partial}{\partial t_0} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$$

(es decir, menos la derivada de la función de Green respecto del tiempo variable de la fuente, evaluada en el tiempo inicial), mientras que para el dato velocidad inicial el término de influencia es $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$. Más aún, si, por ejemplo, el dato frontera corresponde a fijar el valor de u allí, entonces G verifica la correspondiente condición homogénea, es decir, $G = 0$ en la frontera. En ese caso, (11.2.24) se simplifica, quedando

$$-c^2 \int_0^t \left[\oiint u(\mathbf{x}_0, t_0) \nabla_{\mathbf{x}_0} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_0 \right] dt_0.$$

El correspondiente término de influencia es $-c^2 \nabla_{\mathbf{x}_0} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}$: $-c^2$ veces la derivada normal exterior de la función de Green respecto del punto donde se concentra la fuente.

11.2.5. Función de Green de todo el espacio

La función de Green para la ecuación de ondas verifica

$$\boxed{\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0),} \tag{11.2.25}$$

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0, \quad \text{para } t < t_0. \tag{11.2.26}$$

En los problemas definidos en todo el espacio, no hay condiciones de frontera. Resolveremos estos problemas mediante la transformada de Fourier.

Transformada de Fourier de la delta de Dirac. En dimensión n , la relación entre una función y su transformada de Fourier es

$$f(\mathbf{x}) = \int F(\boldsymbol{\omega}) e^{-i \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d^n \boldsymbol{\omega}, \quad (11.2.27)$$

$$F(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(\mathbf{x}) e^{i \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{x}. \quad (11.2.28)$$

En el caso de la delta de Dirac se obtiene

$$\mathcal{F}[\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) e^{i \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{x} = \frac{e^{i \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}_0}}{(2\pi)^n}, \quad (11.2.29)$$

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) &= \int \frac{e^{i \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}_0}}{(2\pi)^n} e^{-i \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d^n \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} d^n \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (11.2.30)$$

Estas fórmulas resultan sencillas de obtener y serán de gran utilidad posterior. El módulo complejo, o amplitud, de la transformada de Fourier de la delta de Dirac es $|e^{i \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}_0} / (2\pi)^n| = 1 / (2\pi)^n$ y, por tanto, es constante. Esto implica que la delta de Dirac está compuesta de todos los números de onda (frecuencias espaciales) con el mismo peso (en el sentido de valor absoluto). La Ecuación (11.2.30) es la representación mediante su transformada de Fourier de la delta de Dirac. Aunque en un sentido estricto la Fórmula (11.2.30) no puede ser válida, pues la integral en (11.2.30) no converge a cero para $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, (11.2.30) puede usarse con cierta precaución. Para entender el sentido de (11.2.30), consideremos brevemente el caso unidimensional,

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-x_0)} d\omega.$$

Si $x = x_0$, el integrando es 1, que integrado entre $-\infty$ y $+\infty$, da ∞ , coincidiendo con la delta de Dirac en $x = x_0$. Si $x \neq x_0$, y aunque la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x-x_0)} d\omega$$

no converge cuando los límites tienden a $\pm\infty$, podemos pensar en la exponencial compleja mediante su parte real (un coseno) y su parte imaginaria (un seno), y por tanto las partes positiva y negativa de la integral se cancelan.

Transformada de Fourier de la función de Green. En lugar de calcular la función de Green para este problema, calcularemos su transformada de Fourier. Denotamos entonces por $\overline{G}(\boldsymbol{\omega}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ la transformada de Fourier de la función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$. La ecuación diferencial ordinaria que verifica la transformada \overline{G} se obtiene transformando la ecuación en derivadas parciales (11.2.25) que satisface G :

$$\frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial t^2} + c^2 \boldsymbol{\omega}^2 \overline{G} = \frac{e^{i \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}_0}}{(2\pi)^n} \delta(t - t_0), \quad (11.2.31)$$

donde

$$\omega^2 = \omega \cdot \omega.$$

La transformada de Fourier de (11.2.26) nos da también un principio de causalidad para la transformada:

$$\bar{G}(\omega, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0, \quad \text{para } t < t_0. \quad (11.2.32)$$

La Ecuación (11.2.31) no es difícil de resolver. Para $t > t_0$ se tiene

$$\frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial t^2} + c^2 \omega^2 \bar{G} = 0,$$

y, por tanto,

$$\bar{G} = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ A \cos c\omega(t - t_0) + B \operatorname{sen} c\omega(t - t_0), & t > t_0, \end{cases}$$

donde A y B son funciones de \mathbf{x}_0, t_0 y ω , y quedan determinadas por la condición de salto en $t = t_0$. Como \bar{G} es continua en $t = t_0$, se tiene

$$\bar{G}(\omega, t_0; \mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = A.$$

El salto en la derivada se obtiene integrando (11.2.31), desde $t = t_0 -$ hasta $t = t_0 +$:

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial t}(\omega, t_0 +; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{e^{i\omega \cdot \mathbf{x}_0}}{(2\pi)^n} \Rightarrow \frac{e^{i\omega \cdot \mathbf{x}_0}}{(2\pi)^n} = c\omega B,$$

donde hemos usado el hecho de que $\partial \bar{G} / \partial t = 0$ en $t = t_0 -$. Hemos obtenido así la transformada de Fourier de la función de Green:

$$\bar{G}(\omega, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{e^{i\omega \cdot \mathbf{x}_0}}{(2\pi)^n c\omega} \operatorname{sen} c\omega(t - t_0). \quad (11.2.33)$$

Esto implica la siguiente representación integral de la función de Green:

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{e^{-i[\omega \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)]} \operatorname{sen} c\omega(t - t_0)}{c\omega} d^n \omega, \quad (11.2.34)$$

para $t > t_0$. El cálculo de esta integral depende de la dimensión n .

11.2.6. Función de Green en la recta (solución de d'Alembert)

En dimensión uno, la Fórmula (11.2.33) para la transformada de Fourier de la función de Green de la ecuación de ondas se reduce a

$$\bar{G}(\omega, t; x_0, t_0) = \frac{1}{2c} e^{i\omega x_0} \frac{\operatorname{sen} c\omega(t - t_0)}{\pi\omega}. \quad (11.2.35)$$

La transformada de Fourier inversa de esta función se puede calcular con facilidad: usando nuestras tablas (y el Ejercicio 10.4.6), la transformada inversa de

$$\frac{\text{sen } c\omega(t - t_0)}{\pi\omega} \text{ es } \begin{cases} 0, & |x| > c(t - t_0), \\ 1, & |x| < c(t - t_0). \end{cases}$$

Además, multiplicar por $e^{i\omega x_0}$ se traduce en trasladar de x a $x - x_0$. Por tanto,

$$G(x, t; x_0, t_0) = \begin{cases} 0, & |x - x_0| > c(t - t_0), \\ \frac{1}{2c}, & |x - x_0| < c(t - t_0). \end{cases} \tag{11.2.36}$$

La función de Green es un pulso rectangular que se expande con el tiempo, a derecha e izquierda, a una velocidad c , partiendo de un único punto, $x = x_0$ en el instante inicial ($t = t_0$). La Figura 11.2.2 describe esta función de Green para la ecuación de ondas unidimensional. También podemos escribir esta función mediante una única expresión utilizando la función de salto de Heaviside,

$$H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z > 0, \end{cases}$$

$$G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{2c} \{-H[(x - x_0) - c(t - t_0)] + H[(x - x_0) + c(t - t_0)]\}. \tag{11.2.37}$$

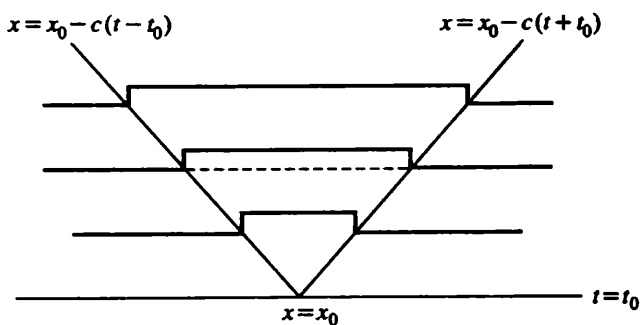


Figura 11.2.2: Función de Green para la ecuación de ondas unidimensional.

Ejemplo. Para ilustrar el uso de esta función de Green, consideremos el problema de valor inicial para la ecuación de ondas sin fuentes, en toda la recta $-\infty < x < \infty$ (véase la Sección 9.7.1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{11.2.38}$$

$$u(x, 0) = f(x), \tag{11.2.39}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \tag{11.2.40}$$

En la Fórmula (11.2.24), la contribución de la frontera¹ se anula, puesto que $G = 0$ para x suficientemente grande (positivo o negativo); véase la Figura 11.2.2. Como tampoco hay fuentes, $u(x, t)$ está determinado únicamente por los datos iniciales:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(x_0)G(x, t; x_0, 0) - f(x_0) \frac{\partial}{\partial t_0} G(x, t; x_0, 0) \right] dx_0.$$

Necesitamos entonces calcular $\partial/\partial t_0 G(x, t; x_0, 0)$ a partir de la Fórmula (11.2.37). Usando las propiedades de la derivada de la función de salto [véase (9.3.31)], se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial t_0} G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{2} [-\delta(x - x_0 + c(t - t_0)) - \delta(x - x_0 - c(t - t_0))]$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial}{\partial t_0} G(x, t; x_0, 0) = \frac{1}{2} [-\delta(x - x_0 + ct) - \delta(x - x_0 - ct)].$$

Finalmente, la solución de nuestro problema es

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x_0) dx_0. \quad (11.2.41)$$

Ésta es la fórmula conocida como **solución de d'Alembert** de la ecuación de ondas. Se puede obtener también, de manera más sencilla, mediante el método de las características (véase el Capítulo 12, donde se discutirá la interpretación física de la ecuación de ondas unidimensional).

Problemas relacionados. Mediante el método de las imágenes se puede obtener la función de Green para la ecuación de ondas en dominios acotados o semiacotados, y resolver así el problema correspondiente. En algunos casos, será necesario utilizar técnicas para transformar series de funciones. El método de las características se revelará más útil en esos casos.

11.2.7. Función de Green en el espacio tridimensional (principio de Huygens)

En la Sección 11.2.5 hemos obtenido la representación integral, mediante su transformada de Fourier, de la función de Green para la ecuación de ondas en dimensión tres:

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{e^{-i[\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)]} \text{sen } c\omega(t - t_0)}{c\omega} d^3\omega. \quad (11.2.42)$$

¹La contribución de la frontera es el límite, cuando $L \rightarrow \infty$, de la contribución en los extremos del intervalo finito $-L < x < L$.

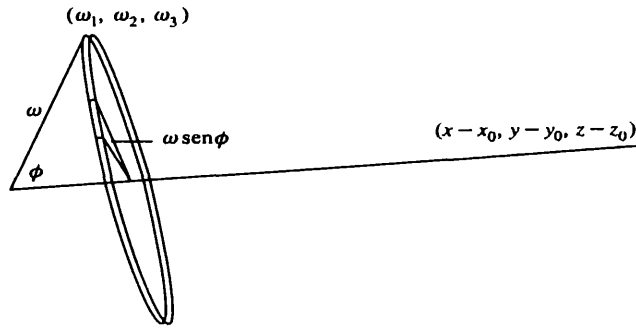


Figura 11.2.3: Coordenadas esféricas.

Coordenadas esféricas. Esta integral se puede calcular en coordenadas esféricas (con centro en el origen $\omega = 0$, “polo norte” $\phi = 0$, y dirección el radio vector $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$) según se ilustra en la Figura 11.2.3. Ésta es una elección conveniente de las coordenadas, pues

$$\omega \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = |\omega| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \cos \phi.$$

Si definimos ω como la longitud del vector ω (la variable de la transformada), es decir

$$\omega = |\omega|, \quad (11.2.43)$$

y ρ como la distancia desde la fuente hasta el punto donde se mide la respuesta,

$$\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|, \quad (11.2.44)$$

tenemos,

$$\omega \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \omega \rho \cos \phi. \quad (11.2.45)$$

Antes de continuar, necesitamos algunas propiedades de las coordenadas esféricas que hemos definido (véase la Figura 11.2.3). Consideremos una esfera de radio ω fijo. Un ángulo con el polo norte ϕ constante, corresponde a un cono que corta a la esfera en un círculo de radio $\omega \sin \phi$. Un punto en el espacio de la variable ω queda determinado de manera única mediante su distancia ω al origen, el ángulo ϕ que forma con el polo norte, y el ángulo polar o *azimutal* θ sobre el círculo de radio $\omega \sin \phi$, definido antes.

Necesitamos también una expresión para el volumen de un elemento diferencial en coordenadas esféricas, al igual que necesitaremos más adelante la expresión para la superficie de un elemento diferencial sobre la esfera (ω constante). Cuando ϕ varía entre ϕ y $\phi + \Delta\phi$, obtenemos una “cinta” delgada de anchura $\omega \Delta\phi$. Al variar θ entre θ y $\theta + \Delta\theta$, obtenemos un pequeño “parche” en la superficie de la esfera. Si $\Delta\theta$ y $\Delta\phi$ son pequeños, el área del parche es aproximadamente el producto “largo” por “ancho”, es decir $(\omega \sin \phi \Delta\theta)(\omega \Delta\phi)$. El volumen comprendido entre dos esferas de radios ω y $\omega + \Delta\omega$ es, aproximadamente, igual al producto del área de su superficie $(\omega \sin \phi \Delta\theta)(\omega \Delta\phi)$ por su anchura $\Delta\omega$. La expresión para el volumen diferencial en

coordenadas esféricas es, entonces

$$d^3\omega = \omega^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta \, d\omega, \quad (11.2.46)$$

así como el área de la superficie diferencial (sobre la esfera) es

$$dS = \omega^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta.$$

Estas expresiones se pueden consultar en numerosos textos de cálculo.

Función de Green. Usando (11.2.45) y (11.2.46), la representación integral (11.2.42) de la función de Green para la ecuación de ondas tridimensional es

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint \frac{e^{-i\omega\rho \cos \phi} \operatorname{sen} c\omega(t - t_0)}{c\omega} \omega^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\omega \, d\theta,$$

donde $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$. La integración sobre todo el espacio corresponde a $0 < \phi < \pi$, $0 < \theta < 2\pi$ y $0 < \omega < \infty$, como se indica en la Figura 11.2.3. Observamos que el integrando no depende del ángulo polar ($\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$) y que la integración en la variable ϕ se puede realizar sin dificultad:

$$\int_0^\pi e^{-i\omega\rho \cos \phi} \omega \operatorname{sen} \phi \, d\phi = \frac{e^{-i\omega\rho \cos \phi}}{i\rho} \Big|_0^\pi = \frac{e^{+i\omega\rho} - e^{-i\omega\rho}}{i\rho} = \frac{2}{\rho} \operatorname{sen} \omega\rho.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) &= \frac{2}{(2\pi)^2 c\rho} \int_0^\infty \operatorname{sen} \omega\rho \operatorname{sen} c\omega(t - t_0) \, d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 c\rho} \int_0^\infty \{ \cos \omega[\rho - c(t - t_0)] - \cos \omega[\rho + c(t - t_0)] \} \, d\omega. \end{aligned}$$

Sabemos, por otro lado [véase (11.2.30)], que $1/2\pi \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega z} \, d\omega = \delta(z)$. La parte real de esta expresión nos da $1/\pi \int_0^\infty \cos \omega z \, d\omega = \delta(z)$, donde hemos utilizado que el coseno es una función par. Así,

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi c\rho} \{ \delta[\rho - c(t - t_0)] - \delta[\rho + c(t - t_0)] \}.$$

Además, como $\rho > 0$ y $t > t_0$, la segunda delta de Dirac es siempre cero. Finalmente, llegamos a

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi c\rho} \delta[\rho - c(t - t_0)], \quad (11.2.47)$$

donde $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$. La función de Green para la ecuación de ondas tridimensional es un impulso esférico que se propaga desde $\rho = 0$ (es decir, desde $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$) con una velocidad radial c y una amplitud que disminuye de manera proporcional a $1/\rho$.

Principio de Huygens. La fórmula anterior muestra que una fuente concentrada en el punto \mathbf{x}_0 y en el tiempo t_0 influye en el punto \mathbf{x} en tiempo t , sólo si $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = c(t - t_0)$, o lo que es lo mismo, la distancia de la fuente al punto de respuesta es igual a c veces el tiempo transcurrido. La fuente puntual emite una onda que se propaga en todas direcciones con una velocidad c . Transcurrido un tiempo $t - t_0$, el efecto de la fuente ha avanzado $c(t - t_0)$, y se localiza en una esfera centrada en la fuente y de radio $c(t - t_0)$. Este fenómeno es parte de lo que se conoce como **principio de Huygens**.

Ejemplo. Para concretar, vamos a analizar el efecto de la fuente $Q(\mathbf{x}, t)$ en la ecuación de ondas tridimensional. Supongamos que los datos iniciales son cero. La fórmula de Green (11.2.24) da para la solución, en este caso,

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \iiint G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) Q(\mathbf{x}_0, t_0) d^3x_0 dt_0 \quad (11.2.48)$$

puesto que no hay contribución en la "frontera". Usando la función de Green para el espacio tridimensional que acabamos de obtener, se sigue que la solución es

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c} \int_0^t \iiint \frac{1}{r} \delta[\rho - c(t - t_0)] Q(\mathbf{x}_0, t_0) d^3x_0 dt_0, \quad (11.2.49)$$

donde $\rho = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$. Las únicas fuentes que influyen en la solución en un punto (\mathbf{x}, t) satisfacen $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = c(t - t_0)$. El efecto en \mathbf{x} en tiempo t está causado por todas las fuentes que verifican esa igualdad; la velocidad de propagación de cada fuente es c .

11.2.8. Resumen

Las funciones de Green para la ecuación de ondas en dimensiones uno y tres son similares. En ambas, la información se propaga con velocidad c . Sin embargo, el efecto de una fuente concentrada se siente en dimensión tres sólo en una esfera que se expande, mientras que en dimensión uno se siente en todo el interior del pulso que se expande, de forma uniforme.

La función de Green para la ecuación de ondas en dimensión dos es más difícil de analizar. En el Ejercicio 11.2.12 se puede ver que la influencia de una fuente concentrada en un punto se hace sentir dentro de un círculo que se expande, también con velocidad radial c . El efecto es mayor en la circunferencia, pero disminuye pasado el pulso. El principio de Huygens sólo es válido en dimensión tres.

EJERCICIOS 11.2

- 11.2.1. (a) Demostrar que $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ satisface $\partial G / \partial t = -\partial G / \partial t_0$.
 (b) Usar el apartado (a) para demostrar que la respuesta producida por el dato posición inicial $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$ es la derivada respecto del tiempo de la respuesta producida por el dato velocidad inicial $\partial u / \partial t(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$.
- 11.2.2. Expresar (11.2.24) en el caso de una dimensión.

11.2.3. Si $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0$ para \mathbf{x} en la frontera, explicar por qué el término correspondiente en (11.2.24) se anula (para todo \mathbf{x}).

11.2.4. Esbozar la gráfica de $G(x, t; x_0, t_0)$ en una dimensión como función de:

(a) x con t fijo (x_0, t_0 fijados);

(b) t con x fijo (x_0, t_0 fijados).

11.2.5. (a) Determinar para qué valores de x_0 (x, t, t_0 fijados) se tiene que es no nula la función de Green para la ecuación de ondas en dimensión uno, $G(x, t; x_0, t_0) \neq 0$.

(b) Repetir el apartado (a) usando la propiedad de reciprocidad.

11.2.6. (a) Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \quad -\infty < x < \infty,$$

con $u(x, 0) = 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$.

*(b) Determinar qué puntos (x, t) de la fuente $Q(x, t)$ influyen en u en el punto (x_1, t_1) .

11.2.7. Rehacer el Ejercicio 11.2.6 para $Q(x, t) = g(x)e^{-i\omega t}$.

*(a) Hallar $u(x, t)$. Demostrar que el término de influencia para la función $g(x)$ es una onda que se propaga hacia fuera.

(b) Determinar, por otro lado, una solución particular de la forma $u(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$ (véase el Ejercicio 8.3.13).

(c) Comparar los apartados (a) y (b).

11.2.8. *(a) Resolver el problema siguiente en todo el espacio tridimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u + g(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$$

con datos iniciales $u(\mathbf{x}, 0) = \partial u / \partial t(\mathbf{x}, 0) = 0$. A partir de la solución calculada, mostrar que el término de influencia para la función $g(\mathbf{x})$ es una onda que se propaga hacia fuera.

(b) Comparar con el Ejercicio 9.5.10.

11.2.9. Considerar la función de Green para la ecuación de ondas $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$. Usando la Fórmula (11.2.24), podemos obtener inmediatamente los términos de influencia para las funciones $Q(\mathbf{x}_0, t_0)$, $u(\mathbf{x}_0, 0)$ y $\partial u / \partial t_0(\mathbf{x}_0, 0)$. Un método alternativo de obtener estos términos de influencia es el siguiente:

(a) Demostrar que para $t > t_0+$ se tiene

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 G, \quad (11.2.50)$$

donde (integrando desde t_0- hasta t_0+)

$$G(\mathbf{x}, t_0+; \mathbf{x}_0, t_0) = 0, \quad (11.2.51)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0+; \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (11.2.52)$$

Utilizando (11.2.32), explicar brevemente por qué el término de influencia para el dato inicial $\partial u / \partial t_0(\mathbf{x}_0, 0)$ es $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)$.

(b) Sea $\phi = \partial G / \partial t$. Demostrar que para $t > t_0+$ se tiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi, \quad (11.2.53)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t_0+; \mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (11.2.54)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0+; \mathbf{x}_0, t_0) = 0. \quad (11.2.55)$$

A partir de (11.2.53) - (11.2.55), explicar brevemente por qué $-\partial G / \partial t_0(\mathbf{x}, t)$ es el término de influencia para el dato inicial $u(\mathbf{x}_0, 0)$.

11.2.10. Considérese el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), & x > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \\ u(0, t) &= h(t). \end{aligned}$$

(a) Determinar la función de Green apropiada mediante el método de las imágenes.

* (b) Calcular la solución $u(x, t)$, si $Q(x, t) = 0$, $f(x) = 0$, y $g(x) = 0$.

(c) ¿Para qué tiempos t influye la función $h(t)$ en el valor de la solución $u(x_1, t_1)$? Dar una breve interpretación física.

11.2.11. Rehacer el Ejercicio 11.2.10:

(a) si $Q(x, t) \neq 0$, pero $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ y $h(t) = 0$;

(b) si $f(x) \neq 0$, pero $Q(x, t) = 0$, $g(x) = 0$ y $h(t) = 0$;

(c) si $g(x) \neq 0$, pero $Q(x, t) = 0$, $f(x) = 0$ y $h(t) = 0$.

- 11.2.12.** Consideremos la función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1)$ para la ecuación de ondas *bidimensional* como la solución de la siguiente ecuación de ondas *tridimensional*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \nabla^2 u + Q(\mathbf{x}, t), \\ u(\mathbf{x}, 0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) &= 0, \\ Q(\mathbf{x}, t) &= \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) \delta(t - t_1).\end{aligned}$$

Este método para calcular la función de Green en dos dimensiones se denomina **método de descenso** (desciende de tres dimensiones a dos).

- *(a)** Calcular $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1)$, usando la solución general de la ecuación de ondas en dimensión tres. La fuente $Q(\mathbf{x}, t)$ se puede interpretar tanto como una fuente puntual en dos dimensiones o como una fuente a lo largo de una recta en tres dimensiones. *Indicación:* la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots dz_0$ se puede calcular introduciendo la distancia tridimensional ρ a la fuente puntual.

$$\rho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_0)^2.$$

- (b)** Demostrar que G sólo depende del lapso de tiempo $t - t_1$ y de la distancia bidimensional r a la recta donde está localizada la fuente.

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

- (c)** Después de transcurrido un tiempo τ , ¿dónde se siente el efecto del impulso? Comparar con los problemas en dimensiones uno y tres.
(d) Esbozar la gráfica de G para $t - t_1$ fijo.
(e) Esbozar la gráfica de G para r fijo.

- 11.2.13.** Consideremos la ecuación de ondas en dimensión tres. Determinar la respuesta producida por una fuente puntual que se mueve con velocidad \mathbf{v} :

$$Q(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t).$$

- 11.2.14.** Resolver la ecuación de ondas en dimensión tres en todo el espacio, sin fuentes y con las condiciones iniciales:

- (a)** $u(\mathbf{x}, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$. La solución se conoce como **fórmula de Kirchoff**, aunque se debe a Poisson (según Weinberger [1965]).
(b) $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0$. *Indicación:* usar (11.2.24).
(c) Rehacer el apartado (b) utilizando el siguiente procedimiento: sea $v(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t)$, donde $u(\mathbf{x}, t)$ verifica el apartado (a). *Indicación:* comprobar que $v(\mathbf{x}, t)$ verifica la ecuación de ondas con $v(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$ y $\frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0$.

- 11.2.15. Deducir la función de Green para la ecuación de ondas en dimensión uno considerando un problema en dimensión tres con fuente $Q(\mathbf{x}, t) = \delta(x - x_1)\delta(t - t_1)$. *Indicación:* para la integración en las variables y_0, z_0 usar coordenadas polares centradas en $y_0 = y, z_0 = z$.

11.3. Función de Green para la ecuación del calor

11.3.1. Introducción

Queremos resolver ahora la ecuación del calor, incluyendo una posible fuente,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u + Q(\mathbf{x}, t), \quad (11.3.1)$$

con el dato inicial $u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$. Analizaremos este problema en dimensiones uno, dos y tres, aunque no especificaremos, en primera instancia, el dominio espacial a considerar, ni las condiciones de contorno, posiblemente no homogéneas. Sólo indicaremos que puede haber tres tipos de términos no homogéneos en el problema: la fuente $Q(\mathbf{x}, t)$, el dato inicial y las condiciones de contorno.

Definimos la **función de Green** $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ como la solución del problema

$$\frac{\partial G}{\partial t} = k\nabla^2 G + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0) \quad (11.3.2)$$

en el mismo dominio que nuestro problema y con las condiciones de contorno homogéneas asociadas. Como la función de Green representa la temperatura obtenida en el punto \mathbf{x} (y en el tiempo t) producida por una fuente térmica concentrada en el punto \mathbf{x}_0 (en tiempo t_0), imponemos que la función de Green sea cero para tiempos anteriores al tiempo en que actúa la fuente térmica:

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0, \quad \text{para } t < t_0, \quad (11.3.3)$$

que es el **principio de causalidad**.

Más aún, vemos que G sólo depende del tiempo a través del lapso de tiempo $t - t_0$ transcurrido desde la acción de la fuente:

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = G(\mathbf{x}, t - t_0; \mathbf{x}_0, 0), \quad (11.3.4)$$

que es la **propiedad de traslación**. Una manera de obtener esta propiedad es definir $T = t - t_0$ y observar que la función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ verifica

$$\frac{\partial G}{\partial T} = k\nabla^2 G + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(T) \quad \text{con} \quad G = 0, \quad \text{si} \quad T < 0.$$

Ésta es precisamente la respuesta producida por una fuente concentrada en el punto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ en tiempo $T = 0$, lo que implica (11.3.4).

En primer lugar vamos a deducir una expresión de la solución de nuestro problema para la ecuación del calor en términos de la función de Green, cuyo cálculo posponemos hasta una sección posterior.

11.3.2. Carácter no autoadjunto de la ecuación del calor

Para relacionar el problema asociado a la ecuación del calor con otros problemas tratados con anterioridad, introducimos el **operador del calor o de difusión**,

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2. \quad (11.3.5)$$

En los problemas precedentes, la relación entre la solución de un problema no homogéneo y la función de Green asociada se ha obtenido mediante las fórmulas de Green, aplicadas a un operador de Sturm-Liouville, al laplaciano, o incluso al operador de ondas.

En el presente caso, vemos que el operador del calor se compone de dos términos: ∇^2 , que se puede analizar con facilidad mediante la fórmula de Green para el laplaciano [véase (11.2.8)], y el término $\partial/\partial t$, que como veremos, y aunque parece inofensivo, es mucho más difícil de tratar que cualquier otro operador estudiado antes. La dificultad que plantean los operadores diferenciales de primer orden queda patente en el siguiente ejemplo. Sea

$$L = \frac{\partial}{\partial t},$$

e intentemos repetir el argumento utilizado para los operadores de Sturm-Liouville de segundo orden, y obtener así la fórmula de Green. Es decir, integremos por partes para simplificar la integral

$$\int [uL(v) - vL(u)]dt = \int \left(u \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt.$$

Vemos que

$$\int_a^b uL(v) dt = \int_a^b u \frac{\partial v}{\partial t} dt = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$

y por tanto

$$\int_a^b \left(u \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt = uv \Big|_a^b. \quad (11.3.6)$$

No hay fórmula para evaluar $\int [uL(v) - vL(u)] dt$, aunque sí se simplificaría la integral que involucra a la suma. La razón es que el operador $L = \partial/\partial t$ no es autoadjunto. En su lugar, consideramos el llamado **operador adjunto**,

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t}. \tag{11.3.7}$$

La Fórmula (11.3.6) implica

$$\int_a^b [uL^*(v) - vL(u)] dt = -uv \Big|_a^b, \tag{11.3.8}$$

que es el análogo a la fórmula de Green para la ecuación del calor².

11.3.3. Fórmula de Green

Volvamos al problema no homogéneo para la ecuación del calor:

$$L(u) = Q(x, t), \tag{11.3.9}$$

$$L(G) = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0), \tag{11.3.10}$$

donde

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2. \tag{11.3.11}$$

Las fórmulas para este problema serán más complicadas porque hemos de introducir el **operador del calor adjunto**,

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2. \tag{11.3.12}$$

Con esta definición tenemos

$$uL^*(v) - vL(u) = -u\frac{\partial v}{\partial t} - v\frac{\partial u}{\partial t} + k(v\nabla^2 u - u\nabla^2 v),$$

²Los operadores de primer orden tienen asociada una única "condición de frontera", $u(a) = 0$. Para que el término frontera producido por la integración por partes se anule, introducimos una *condición de frontera adjunta*, $v(b) = 0$.

y por tanto

$$\int_{t_i}^{t_f} \iiint [uL^*(v) - vL(u)] d^3x dt = - \iiint uv \Big|_{t_i}^{t_f} d^3x + k \int_{t_i}^{t_f} \oint (v\nabla u - u\nabla v) \cdot \hat{n} dS dt. \quad (11.3.13)$$

La integración es en todo el espacio y entre dos tiempos $t = t_i$ y $t = t_f$. Hemos usado (11.3.6) para los términos con el operador $\partial/\partial t$, y la fórmula de Green (11.2.8) para los términos con el operador ∇^2 . La “contribución en la frontera” es de dos tipos, la parte espacial³ (término \oint), y una parte temporal (tiempo inicial $t = t_i$ y tiempo final $t = t_f$). Si u y v satisfacen ambas las mismas condiciones de contorno homogéneas, (condiciones de contorno usuales), entonces la parte espacial es cero,

$$\oint (v\nabla u - u\nabla v) \cdot \hat{n} dS = 0.$$

11.3.4. Función de Green adjunta

Para obtener la fórmula de representación de la solución $u(\mathbf{x}, t)$ en términos de la función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ debemos considerar el efecto de fuentes en distintos tiempos. Por tanto, definimos la **función de Green de fuente variable**,

$$G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t) = G(\mathbf{x}, -t; \mathbf{x}_1, -t_1)$$

usando la propiedad de traslación. Éste es precisamente el método con el que analizamos la ecuación de ondas [véase (11.2.15)]. El principio de causalidad implica que la función de Green es cero si $t > t_1$:

$$G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t) = 0 \quad \text{si } t > t_1. \quad (11.3.14)$$

Si ponemos $\tau = -t$ vemos que la función de Green de fuente variable $G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t)$ verifica

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} - k\nabla^2\right) G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\delta(t - t_1), \quad (11.3.15)$$

así como el principio de causalidad con fuente variable (11.3.14). Esta ecuación no involucra al operador del calor L sino al operador del calor adjunto L^* :

$$L^*[G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\delta(t - t_1). \quad (11.3.16)$$

³En caso de tener dominios acotados o semiacotados, consideramos éstos como límites apropiados de dominios finitos. Los términos en el infinito se anulan si u y v decaen suficientemente deprisa.

Deducimos entonces que la función $G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t)$ es la función de Green del operador del calor adjunto (con el principio de causalidad con fuente variable) y, en ocasiones, recibe el nombre de **función de Green adjunta**, $G^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1)$. Sin embargo, no es necesario calcularla, pues

$$G^*(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_1, t_1) = G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t), \tag{11.3.17}$$

y ambas son cero para $t > t_1$.

11.3.5. Reciprocidad

Al igual que en el problema de la ecuación de ondas, vamos a deducir ahora una fórmula de reciprocidad. En el caso de la ecuación del calor nos encontraremos con algunas diferencias, debido en especial a la aparición en la fórmula de Green (11.3.13) del operador adjunto. Definamos

$$u = G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0), \tag{11.3.18}$$

$$v = G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t), \tag{11.3.19}$$

y apliquemos la fórmula de Green a estas dos funciones. Observemos que la segunda es la función de Green de fuente variable, o función de Green adjunta. Ambas verifican:

$$\begin{aligned} L(u) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0), & L^*(v) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\delta(t - t_1), \\ u &= 0 \text{ si } t < t_0, & v &= 0 \text{ si } t > t_1. \end{aligned}$$

Si en (11.3.13) integramos entre $t_i = -\infty$ y $t_f = +\infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \iiint [G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)\delta(t - t_1) - G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0)] d^3x dt \\ &= - \iiint G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)G(\mathbf{x}, t_1; \mathbf{x}_1, t) \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} d^3x, \end{aligned}$$

ya que u y v satisfacen ambas las mismas condiciones de contorno homogéneas, por lo que

$$\oiint (v\nabla u - u\nabla v) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0.$$

La contribución en $t = \pm\infty$ también se anula debido al principio de causalidad. Usando ahora las propiedades de la delta de Dirac y el principio de **reciprocidad**, concluimos:

$G(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = G(\mathbf{x}_0, t_1; \mathbf{x}_1, t_0).$

(11.3.20)

Al igual que en el caso de la ecuación de ondas [véase (11.2.21)], intercambiar los papeles de la fuente y el punto de respuesta no altera la medida de la respuesta si los lapsos de tiempo son los mismos. En este sentido, la función de Green para la ecuación del calor es simétrica.

11.3.6. Representación de la solución mediante la función de Green

Obtendremos ahora la relación entre la solución de nuestro problema y la función de Green. Para ello, aplicamos la fórmula de Green (11.3.13) a la función u , que satisface (11.3.1) con condiciones de contorno no homogéneas, y a v , la función de Green de fuente variable $v = G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t)$. A partir de las fórmulas (11.3.9) y (11.3.10), que definen a u y a v , la fórmula de Green (11.3.13) se convierte en

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0+} \iiint [u\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0) - G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t)Q(\mathbf{x}, t)] d^3x dt \\ &= \iiint u(\mathbf{x}, 0)G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, 0)d^3x \\ &+ k \oint [G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t)\nabla u - u\nabla G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t)] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS dt, \end{aligned}$$

pues $G = 0$, si $t > t_0$. Despejando u ,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_0, t_0) &= \int_0^{t_0+} \iiint G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t)Q(\mathbf{x}, t) d^3x dt \\ &+ \iiint u(\mathbf{x}, 0)G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, 0)d^3x \\ &+ k \oint [G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t)\nabla u - u\nabla G(\mathbf{x}, t_0; \mathbf{x}_0, t)] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS dt. \end{aligned}$$

El extremo superior de la integral en tiempo t_0+ se puede sustituir por t_0 , mediante paso al límite. Intercambiamos también (igual que antes) las variables \mathbf{x} y \mathbf{x}_0 , así como t y t_0 . Finalmente, aplicamos el principio de reciprocidad y obtenemos la fórmula

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \iiint G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)Q(\mathbf{x}_0, t_0) d^3x_0 dt_0 \\ &+ \iiint G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, 0)u(\mathbf{x}_0, 0)d^3x_0 \\ &+ k \oint [G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)\nabla_{\mathbf{x}_0} u - u(\mathbf{x}_0, t_0)\nabla_{\mathbf{x}_0} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)] \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_0 dt_0. \end{aligned}$$

(11.3.21)

En esta fórmula podemos ver la influencia en la temperatura, en cada punto $u(\mathbf{x}, t)$, de los tres términos no homogéneos de la ecuación. La función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ es el término de influencia asociado a la fuente $Q(\mathbf{x}_0, t_0)$, así como a la distribución inicial de temperaturas $u(\mathbf{x}_0, 0)$ (si la evaluamos en $t_0 = 0$, algo perfectamente razonable). Por otro lado, los términos de influencia asociados a las condiciones de frontera son $k \int_0^t \oint (G\nabla_{\mathbf{x}_0} u - u\nabla_{\mathbf{x}_0} G) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_0 dt_0$. También el principio de causalidad queda reflejado en (11.3.21): en el tiempo t , la fuente y

las condiciones de frontera sólo influyen en la solución para $t_0 < t$. La Ecuación (11.3.21) generaliza los resultados obtenidos mediante el método de desarrollo en autofunciones de la Sección 8.2 para la ecuación del calor unidimensional, en un intervalo acotado con condiciones cero en los extremos.

Ejemplo. De la fórmula de representación parece que son necesarios a la vez los valores en la frontera de u y de su derivada normal. Para dejar claro el efecto de las condiciones de contorno no homogéneas, consideremos el siguiente ejemplo, en el que especificamos la temperatura en toda la frontera:

$$u(\mathbf{x}, t) = u_B(\mathbf{x}, t) \quad \text{en la frontera.}$$

En este caso la función de Green satisface las condiciones de contorno homogéneas asociadas, es decir,

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \text{ en la frontera.}$$

Por tanto, el efecto de la temperatura prescrita es

$$-k \int_0^t \iint u_B(\mathbf{x}_0, t_0) \nabla_{\mathbf{x}_0} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_0 \, dt_0.$$

El término de influencia asociado a las condiciones de contorno no homogéneas es k veces la derivada normal de la función de Green, cambiada de signo (distribución en forma de dipolo).

Caso unidimensional. Para entender mejor la fórmula de representación, puede ser útil especificar cuáles son las modificaciones necesarias para obtener el caso unidimensional. En primer lugar, las integrales de volumen $\iiint d^3x_0$ se convierten en integrales sobre intervalos $\int_a^b dx_0$. Los términos frontera del tipo integral de superficie $\iint dS_0$ se reducen a evaluar el integrando en los dos extremos $x = a$ y $x = b$. Por ejemplo, si prescribimos la temperatura en los extremos, $u(a, t) = A(t)$ y $u(b, t) = B(t)$, entonces

$$-k \iint u_B(\mathbf{x}_0, t_0) \nabla_{\mathbf{x}_0} G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS_0 \, dt_0$$

se convierte en

$$-k \int_0^t \left[B(t_0) \frac{\partial G}{\partial x_0}(x, t; b, t_0) - A(t_0) \frac{\partial G}{\partial x_0}(x, t; a, t_0) \right] dt_0,$$

que coincide con el resultado que se obtendría por el método de desarrollo en autofunciones (véase el Capítulo 9) con condiciones de contorno no homogéneas.

11.3.7. Función de Green para la ecuación del calor en todo el espacio

La función de Green $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ para la ecuación del calor sin fronteras satisface la ecuación

$$\frac{\partial G}{\partial t} = k\nabla^2 G + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\delta(t - t_0) \quad (11.3.22)$$

así como el principio de causalidad

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad \text{si } t < t_0. \quad (11.3.23)$$

Vamos a obtener aquí esta función de Green en dimensiones uno, dos y tres. Para ello introducimos la transformada de Fourier de la función de Green,

$$\bar{G}(\boldsymbol{\omega}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d^n x, \quad (11.3.24)$$

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int \bar{G}(\boldsymbol{\omega}, t; \mathbf{x}_0, t_0) e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}} d^n \boldsymbol{\omega}. \quad (11.3.25)$$

Si transformamos por Fourier la Ecuación (11.3.22) usando las técnicas del Capítulo 10, obtenemos una ecuación diferencial para la transformada de la función de Green:

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = -k\omega^2 \bar{G} + \frac{e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}_0}}{(2\pi)^n} \delta(t - t_0), \quad (11.3.26)$$

donde $\omega^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$. Hemos usado la transformada de Fourier de la delta de Dirac n -dimensional (11.2.29). Transformando también la condición (11.3.23), tenemos

$$\bar{G}(\boldsymbol{\omega}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad \text{si } t < t_0; \quad (11.3.27)$$

es decir, la transformada de Fourier de la función de Green también verifica el principio de causalidad. Hay muchas maneras de resolver la Ecuación (11.3.26). Para $t > t_0$ vemos que la transformada de la función de Green satisface una ecuación diferencial homogénea:

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial t} = -k\omega^2 \bar{G}, \quad (11.3.28)$$

cuya solución general es

$$\bar{G}(\boldsymbol{\omega}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = C(\boldsymbol{\omega}) e^{-k\omega^2(t-t_0)}.$$

El coeficiente $C(\boldsymbol{\omega})$ se calcula usualmente a partir del dato inicial en $t = t_0$. Como $\bar{G} = 0$ para $t < t_0$ y la delta de Dirac actúa en $t = t_0$, en nuestro caso el coeficiente $C(\boldsymbol{\omega})$ queda determinado a partir del salto de \bar{G} en $t = t_0$. Integrando (11.3.26) entre $t = t_0^-$ y $t = t_0^+$, tenemos

$$\bar{G}(t_0^+) - \bar{G}(t_0^-) = \frac{e^{i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}_0}}{(2\pi)^n}.$$

Por otro lado, el principio de causalidad implica $G(t_0-) = 0$. Se sigue que la transformada de Fourier de la función de Green viene dada por

$$\bar{G}(\boldsymbol{\omega}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{e^{i \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}_0}}{(2\pi)^n} e^{-k\boldsymbol{\omega}^2(t-t_0)}.$$

La transformada de Fourier inversa nos da la representación de la función de Green a partir de su transformada:

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int \frac{e^{-k\boldsymbol{\omega}^2(t-t_0)}}{(2\pi)^n} e^{-i \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} d^n \boldsymbol{\omega}.$$

Usando la propiedad de traslación de la transformada de Fourier, tenemos que $G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0)$ es una gaussiana centrada en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$:

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \left[\frac{\pi}{k(t-t_0)} \right]^{n/2} e^{-(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 / 4k(t-t_0)}.$$
(11.3.29)

donde n es la dimensión ($n = 1, 2, 3$). En esta fórmula observamos la simetría de la función de Green en términos del punto de localización de la fuente y el punto de respuesta, siempre que el lapso de tiempo sea el mismo. Como ya vimos en la ecuación unidimensional discutida en la Sección 10.4, el efecto de una fuente de calor concentrada en un punto disminuye exponencialmente según nos alejamos de la fuente. Para tiempos pequeños (t cercano a t_0), el decaimiento es especialmente rápido. Hemos obtenido entonces, para la ecuación del calor con fuentes en todo el espacio

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u + Q(\mathbf{x}, t)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}),$$

la solución, que de acuerdo a (11.3.21) y (11.3.29), es

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int \left[\frac{1}{4\pi k(t-t_0)} \right]^{n/2} e^{-(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 / 4k(t-t_0)} Q(\mathbf{x}_0, t_0) d^n \mathbf{x}_0 dt_0$$
(11.3.30)

$$+ \int \left(\frac{1}{4\pi kt} \right)^{n/2} e^{-(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 / 4kt} f(\mathbf{x}_0) d^n \mathbf{x}_0.$$

Si $Q(\mathbf{x}, t) = 0$, obtenemos la solución calculada previamente en el Capítulo 8 mediante la transformada de Fourier directamente, sin necesidad de usar la función de Green.

11.3.8. Función de Green para la ecuación del calor en una semirrecta

En esta sección, obtendremos la función de Green necesaria para resolver la ecuación del calor no homogénea en un intervalo semiinfinito ($x > 0$), con condiciones de contorno no homogéneas en $x = 0$:

$$\text{EDP : } \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \quad x > 0, \quad (11.3.31)$$

$$\text{CC : } u(0, t) = A(t), \quad (11.3.32)$$

$$\text{CI : } u(x, 0) = f(x). \quad (11.3.33)$$

Si podemos determinar la función de Green para este caso, la solución $u(x, t)$ vendrá determinada por la fórmula de representación (11.3.21). La función de Green $G(x, t; x_0, t_0)$ es la respuesta a una fuente concentrada en el tiempo y en el espacio:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = k \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \delta(x - x_0)\delta(t - t_0),$$

verificando además la condición de frontera homogénea correspondiente,

$$G(0, t; x_0, t_0) = 0,$$

y el principio de causalidad,

$$G(x, t; x_0, t_0) = 0 \quad \text{si } t < t_0.$$

Usando el método de las imágenes (véase la Sección 9.5.8), en lugar de un intervalo semiinfinito con una fuente concentrada en $x = x_0$, consideramos toda la recta con una fuente adicional negativa (la fuente imagen) concentrada en $x = -x_0$. Por simetría, la temperatura G será siempre cero en $x = 0$ para todo t . Tenemos entonces que la función de Green es la suma de dos funciones de Green en toda la recta,

$$G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t - t_0)}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{4k(t - t_0)} \right] - \exp \left[-\frac{(x + x_0)^2}{4k(t - t_0)} \right] \right\}. \quad (11.3.34)$$

Observemos que la condición de frontera en $x = 0$ se satisface de forma automática.

11.3.9. Función de Green para la ecuación del calor en un intervalo acotado

En el Capítulo 9 ya hemos determinado la función de Green para la ecuación del calor en un intervalo acotado $0 < x < L$, haciendo uso del desarrollo en autofunciones. Si la temperatura es cero en ambos extremos, ésta es

$$G(x, t; x_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} e^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)}. \tag{11.3.35}$$

Mediante el método de las imágenes y la función de Green en toda la recta, podemos obtener una expresión alternativa. Por simetría (véase la Figura 11.3.1), las condiciones frontera en $x = 0$ y en $x = L$ se satisfacen si colocamos una sucesión de fuentes positivas concentradas en los puntos $x = x_0 + 2Ln$ y una sucesión de fuentes negativas concentradas en los puntos $x = -x_0 + 2Ln$ (para todos los valores enteros n , $-\infty < n < \infty$). Así pues:

$$G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-x_0-2Ln)^2}{4k(t-t_0)} \right] - \exp \left[-\frac{(x+x_0-2Ln)^2}{4k(t-t_0)} \right] \right\}. \tag{11.3.36}$$

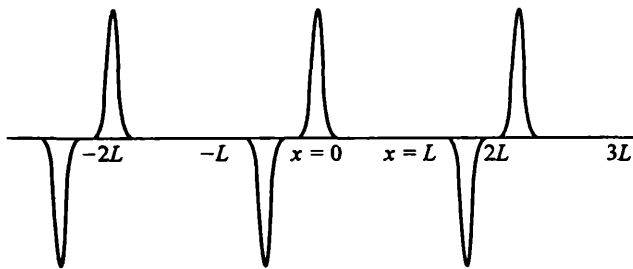


Figura 11.3.1: Múltiples fuentes imagen que determinan la función de Green para la ecuación del calor en una varilla unidimensional.

Cada una de estas dos expresiones tiene sus ventajas. La expresión del desarrollo en autofunciones (11.3.35) es una serie que converge muy rápidamente si $(t-t_0)k/L^2$ es grande. Es, por tanto, más útil si $t \gg t_0$. De hecho, si $t \gg t_0$,

$$G(x, t; x_0, t_0) \approx \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi x_0}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} e^{-k(\pi/L)^2(t-t_0)}.$$

Sin embargo, si el lapso de tiempo $t - t_0$ es pequeño, se necesitan más términos de la serie para aproximar G .

La función de Green obtenida por el método de las imágenes es también una serie infinita, (11.3.36). La función de Green en toda la recta (una vez fijado t) decrece exponencialmente según nos alejamos de la fuente,

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}} e^{-(x-x_0)^2/4k(t-t_0)}.$$

Decrece muy deprisa en la variable espacial si t está próximo a t_0 . En este caso, sólo las fuentes localizadas cerca del punto x influyen de manera apreciable en la temperatura en ese punto; véase la Figura 11.3.1. Así pues, las fuentes imagen se pueden omitir en una primera aproximación, si t está próximo a t_0 (y si x o x_0 no están cerca de las fronteras 0 o L , véase el Ejercicio 11.3.8). Tenemos, pues, la aproximación,

$$G(x, t; x_0, t_0) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}} e^{-(x-x_0)^2/4k(t-t_0)};$$

si t está próximo a t_0 , la función de Green en un intervalo se puede aproximar (lejos de los extremos) por la función de Green en toda la recta. Esto quiere decir que para tiempos pequeños se puede suponer que no hay frontera (lejos de ella).

Para ser más precisos, el efecto de las fuentes imagen es mucho menor que el efecto de la fuente real, si $L^2/k(t-t_0)$ es grande, lo que explica la aproximación para “tiempos pequeños”. La función de Green se puede aproximar por la función de Green en toda la recta, si $t-t_0$ es pequeño (es decir, si $t-t_0 \ll L^2/k$, donde L^2/k es una proporción entre cantidades físicamente medibles). Visto desde otro ángulo, esta aproximación es válida para una “varilla larga” en el sentido de que $L \gg \sqrt{k(t-t_0)}$.

En resumen, el método de las imágenes proporciona una expresión para la función de Green en forma de serie que converge muy rápidamente si $L^2/k(t-t_0) \gg 1$, mientras que el desarrollo en autofunciones proporciona una serie que converge muy rápidamente si $L^2/k(t-t_0) \ll 1$. En el caso en que $L^2/k(t-t_0)$ no es grande ni pequeño, entonces las dos expresiones son comparables y ambas necesitan un número no necesariamente pequeño de términos para aproximarlas con cierta exactitud.

EJERCICIOS 11.3

11.3.1. Demostrar que la función de Green definida por (11.3.2) y (11.3.3) verifica

$$G^*(x, t; x_0, t_0) = G(x_0, t_0; x, t).$$

11.3.2. Considerése el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), & x > 0, \\ u(0, t) &= A(t), \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

- (a) Resolver para $A(t) = 0$, $f(x) = 0$. Simplificar el resultado si $Q(x, t) = 1$.
 (b) Resolver para $Q(x, t) = 0$, $A(t) = 0$. Simplificar el resultado si $f(x) = 1$.
 *(c) Resolver para $Q(x, t) = 0$, $f(x) = 0$. Simplificar el resultado si $A(t) = 1$.

11.3.3. Determinar la función de Green para el problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), & x > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= A(t), \\ u(x, 0) &= f(x).\end{aligned}$$

11.3.4. Sea la función de Green (11.3.34) para el problema (11.3.31). Demostrar que esta función de Green se puede aproximar por la función de Green en toda la recta si

$$\frac{xx_0}{k(t-t_0)} \gg 1, \quad \text{es decir, } t-t_0 \text{ es pequeño.}$$

Explicar físicamente por qué esta aproximación falla si x ó x_0 se encuentran cerca de la frontera.

11.3.5. Considérese el problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= A(t), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= B(t).\end{aligned}$$

- (a) Calcular la función de Green correspondiente mediante el método de desarrollo en autofunciones.
 (b) Aproximar la función de Green del apartado (a). ¿Bajo qué condiciones es válida esta aproximación?
 (c) Calcular la función de Green correspondiente usando la función de Green en toda la recta.
 (d) Aproximar la función de Green del apartado (c). ¿Bajo qué condiciones es válida esta aproximación?
 (e) Expresar la solución $u(x, t)$ en términos de la función de Green.
- 11.3.6.** Determinar la función de Green G para la ecuación del calor con temperatura cero en los extremos $x = 0$ y $x = L$, aplicando directamente el método de desarrollo en autofunciones a la ecuación que define G . *Indicación:* la respuesta es (11.3.35).

Capítulo 12

Método de las características para ecuaciones de ondas lineales y cuasilineales

12.1. Introducción

En los capítulos precedentes hemos obtenido algunos resultados sobre la ecuación de ondas unidimensional,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (12.1.1)$$

con las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \quad (12.1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \quad (12.1.3)$$

En el caso de una cuerda vibrante sujeta por los extremos $x = 0$ y $x = L$, obtuvimos la solución en el Capítulo 4 como una serie de Fourier en senos a partir del método de separación de variables:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right). \quad (12.1.4)$$

Esta solución se puede expresar también como suma de dos ondas avanzando en direcciones opuestas [véase (4.4.14) y los Ejercicios 4.4.7 y 4.4.8]. En particular,

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(x_0) dx_0, \quad (12.1.5)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son las extensiones periódicas impares de las funciones dadas en (12.1.2) y (12.1.3). Esta misma Fórmula (12.1.5) aparecía en el Capítulo 11 para la ecuación de ondas unidimensional en toda la recta, usando la correspondiente función de Green.

En este capítulo vamos a introducir una herramienta más potente, el método de las características, para resolver la ecuación de ondas unidimensional. Mostraremos que se tiene en general la representación $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$, donde F y G son funciones arbitrarias. A partir de ella deduciremos la Fórmula (12.1.5) en toda la recta. Introduciremos las modificaciones necesarias para tratar problemas en la semirrecta o en intervalos acotados. Aplicaremos el método de las características a ecuaciones cuasilineales en la Sección 12.6, donde aparecerán ondas de choque cuando las características se corten.

12.2. Características para ecuaciones de ondas de primer orden

12.2.1. Introducción

La ecuación de ondas unidimensional

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,} \quad (12.2.1)$$

se puede “factorizar” de dos maneras:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,$$

pues los términos de la derivada segunda cruzada se anulan. Si ponemos

$$\boxed{w = \frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x},} \quad (12.2.2)$$

$$\boxed{v = \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x},} \quad (12.2.3)$$

vemos que la ecuación de ondas unidimensional (de segundo orden), da lugar a dos ecuaciones de ondas de primer orden:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + c\frac{\partial w}{\partial x} = 0,} \quad (12.2.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (12.2.5)$$

12.2.2. Método de las características para ecuaciones de primer orden

Comenzaremos analizando una cualquiera de las dos ecuaciones de primer orden anteriores:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (12.2.6)$$

El método que desarrollaremos nos será de utilidad para, posteriormente, estudiar la ecuación de ondas (12.2.1). La idea es considerar la función $w(x(t), t)$ medida por un observador móvil, $x = x(t)$, y estudiar su variación. La regla de la cadena¹ implica

$$\frac{d}{dt} w(x(t), t) = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (12.2.7)$$

El primer término $\partial w / \partial t$ representa la variación de w para una posición fija, mientras que $(dx/dt)(\partial w / \partial x)$ representa la variación debida al hecho de que el observador se mueve a una región en que w es posiblemente diferente. Comparando (12.2.7) con la ecuación diferencial para w , Ecuación (12.2.6), vemos que si el observador se mueve con velocidad c , es decir, si

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad (12.2.8)$$

entonces

$$\frac{dw}{dt} = 0. \quad (12.2.9)$$

Esto implica que w es constante. Un observador que se mueva exactamente con velocidad c no notaría cambios en w .

Características. De esta forma, hemos sustituido la ecuación en derivadas parciales (12.2.6) por dos ecuaciones diferenciales ordinarias, (12.2.8) y (12.2.9). In-

¹La derivada d/dt medida por el observador móvil se denomina derivada material.

tegrando (12.2.8), tenemos la ecuación de la familia de **características**² de (12.2.6),

$$\boxed{x = ct + x_0,} \quad (12.2.10)$$

una familia de rectas paralelas, esbozada en la Figura 12.2.1. Observemos que en $t = 0$ se tiene $x = x_0$. Además, $w(x, t)$ es constante *a lo largo de cada una de estas rectas* (no necesariamente constante en todas partes). La función w **se propaga** como una **onda con velocidad c** [véase (12.2.8)].

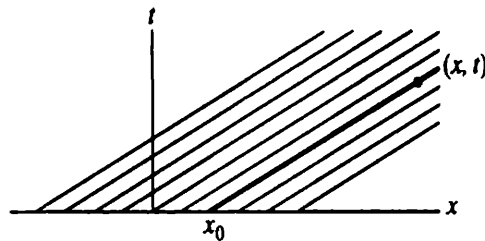


Figura 12.2.1: Características para la ecuación de ondas de primer orden.

Solución general. Si conocemos el valor inicial de $w(x, t)$ para $t = 0$,

$$w(x, 0) = P(x), \quad (12.2.11)$$

entonces podemos determinar el valor de w en el punto (x, t) . Como w es constante a lo largo de la característica que pasa por este punto, se tiene

$$w(x, t) = w(x_0, 0) = P(x_0).$$

Ahora, dados x y t , calculamos x_0 a partir de la ecuación de la característica, $x_0 = x - ct$, por lo que

$$\boxed{w(x, t) = P(x - ct).} \quad (12.2.12)$$

Si pensamos en $P(x)$ como una función arbitraria, hemos obtenido la solución general de (12.2.6), hecho que se puede comprobar sustituyendo (12.2.12) en la ecuación diferencial (12.2.6). Usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dP}{d(x - ct)} \frac{\partial(x - ct)}{\partial x} = \frac{dP}{d(x - ct)}$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{dP}{d(x - ct)} \frac{\partial(x - ct)}{\partial t} = -c \frac{dP}{d(x - ct)}.$$

²Una característica es una curva a lo largo de la cual una EDP se reduce a una EDO.

Es decir, (12.2.12) verifica (12.2.6). La solución general de una ecuación en derivadas parciales de primer orden contiene una función arbitraria, mientras que la solución general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden contiene una constante arbitraria.

Ejemplo. Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 2\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

con la condición inicial

$$w(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 4x, & 0 < x < 1, \\ 0 & x > 1. \end{cases}$$

Hemos visto que w es constante a lo largo de la característica $x - 2t = \text{constante}$, avanzando con velocidad 2 (hacia la derecha), mientras mantiene su forma. En la Figura 12.2.2 se representan las características principales $x = 2t + 0$ y $x = 2t + 1$, así como un esbozo de la solución para varios tiempos. Se tiene $w(x, t) = 0$, si $x > 2t + 1$ ó $x < 2t$. En el resto tenemos

$$w(x, t) = 4(x - 2t), \quad \text{si } 2t < x < 2t + 1.$$

La deducción de esta fórmula, que utiliza la característica que empieza en $x = x_0$,

$$x = 2t + x_0$$

es como sigue: a lo largo de esta característica la solución $w(x, t)$ es constante. Si $0 < x_0 < 1$, entonces

$$w(x, t) = w(x_0, 0) = 4x_0 = 4(x - 2t).$$

Finalmente, la condición $0 < x_0 < 1$ es equivalente a $0 < x - 2t < 1$.

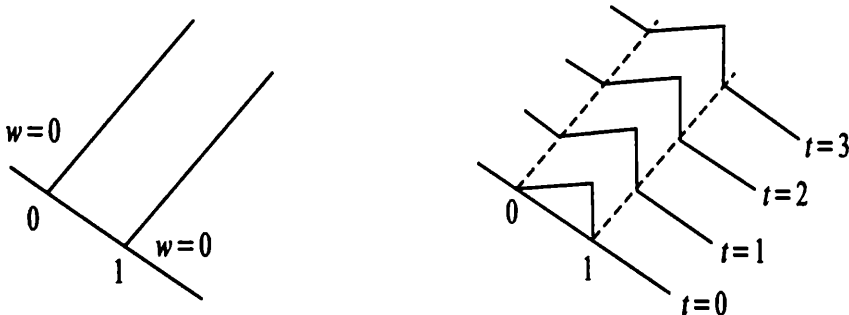


Figura 12.2.2: Propagación para la ecuación de ondas de primer orden.

Forma constante. En general, $w(x, t) = P(x - ct)$. Para cada tiempo fijo t , la solución de la ecuación de ondas de primer orden tiene la misma forma trasladada

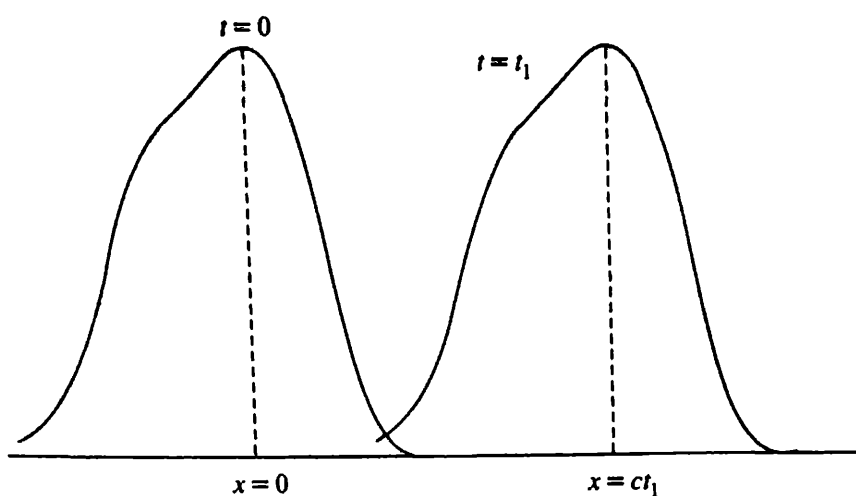


Figura 12.2.3: Invariancia de la forma para una ecuación de ondas de primer orden.

a una distancia ct (distancia = velocidad por tiempo). Se ilustra este hecho en la Figura 12.2.3.

Resumen. El método de las características resuelve completamente la ecuación de ondas de primer orden (12.2.6). En las Secciones 12.3-12.5, aplicaremos este método para resolver la ecuación de ondas (12.1.1). El lector puede omitir estas secciones y dirigirse directamente a la Sección 12.6, donde se describe cómo aplicar este método a ecuaciones en derivadas parciales cuasilineales.

EJERCICIOS 12.2

12.2.1. Demostrar que la ecuación de ondas se puede escribir como el siguiente sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden acopladas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = w, \quad \frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

***12.2.2.** Resolver el problema

$$\frac{\partial w}{\partial t} - 3 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{con } w(x, 0) = \cos x.$$

12.2.3. Resolver el problema

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 4 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{con } w(0, t) = \sin 3t.$$

12.2.4. Resolver el problema

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (c > 0) \quad \text{para } x > 0 \quad \text{y } t > 0, \quad \text{si}$$

$$w(x, 0) = f(x) \quad x > 0, \quad w(0, t) = h(t) \quad t > 0.$$

12.2.5. Resolver mediante el método de las características los siguientes problemas. Si es necesario, consúltese la Sección 12.6.

- (a) $\frac{\partial w}{\partial t} + c \frac{\partial w}{\partial x} = e^{2x}$ con $w(x, 0) = f(x)$.
 *(b) $\frac{\partial w}{\partial t} + x \frac{\partial w}{\partial x} = 1$ con $w(x, 0) = f(x)$.
 (c) $\frac{\partial w}{\partial t} + t \frac{\partial w}{\partial x} = 1$ con $w(x, 0) = f(x)$.
 *(d) $\frac{\partial w}{\partial t} + 3t \frac{\partial w}{\partial x} = w$ con $w(x, 0) = f(x)$.

***12.2.6.** Considérese el problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{con} \quad u(x, 0) = f(x).$$

Demostrar que las características son líneas rectas (consultar la Sección 12.6 si es necesario).

12.2.7. Considérese el problema del Ejercicio 12.2.6 con

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1 + x/L, & 0 < x < L, \\ 2, & x > L. \end{cases}$$

- (a) Obtener las ecuaciones de las características. Esbozar su gráfica.
 (b) Obtener la solución $u(x, t)$. Esbozar la gráfica de $u(x, t)$ para t fijo.

***12.2.8.** Considérese el problema del Ejercicio 12.2.6 con

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 2, & x > 0. \end{cases}$$

Obtener la solución $u(x, t)$ considerando el límite $L \rightarrow 0$ de las características obtenidas en el Ejercicio 12.2.7. Esbozar la gráfica de las características y de la solución $u(x, t)$ para t fijo.

12.2.9. A partir del análisis del observador móvil, resolver la Ecuación (12.2.6) mediante un cambio de variables de (x, t) a un sistema coordenado que se mueva con velocidad c , (ξ, t') , donde $\xi = x - ct$ y $t' = t$.

12.2.10. Considérese la ecuación de primer orden cuasilineal

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = c,$$

donde a , b y c son funciones de x e y , así como de u . Demostrar que el método de las características implica

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}.$$

Consultar la Sección 12.6 si es necesario.

12.3. Método de las características para la ecuación de ondas unidimensional

12.3.1. Introducción

A partir de la ecuación de ondas unidimensional

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,} \quad (12.3.1)$$

hemos obtenido dos ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, $\partial w/\partial t + c\partial w/\partial x = 0$, y $\partial v/\partial t - c\partial v/\partial x = 0$, donde $w = \partial u/\partial t - c\partial u/\partial x$, y $v = \partial u/\partial t + c\partial u/\partial x$. Hemos visto que w mantiene su forma moviéndose con una velocidad c :

$$w = \frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = P(x - ct). \quad (12.3.2)$$

El problema para v es exactamente el mismo, reemplazando c por $-c$. Por tanto, v se traslada con velocidad $-c$ manteniendo su forma :

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = Q(x + ct). \quad (12.3.3)$$

Combinando (12.3.2) y (12.3.3) podemos obtener, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2}[P(x - ct) + Q(x + ct)], \\ 2c \frac{\partial u}{\partial x} &= Q(x + ct) - P(x - ct), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\boxed{u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct),} \quad (12.3.4)$$

donde F y G son funciones arbitrarias ($-cF' = \frac{1}{2}P$ y $cG' = \frac{1}{2}Q$). Este resultado fue obtenido por d'Alembert en 1747.

La solución general es la suma de $F(x - ct)$, una onda que se mueve hacia la derecha con velocidad c , y $G(x + ct)$, una onda que se mueve hacia la izquierda con velocidad $-c$, manteniendo ambas su forma. La solución se puede esbozar si conocemos $F(x)$ y $G(x)$. Trasladamos $F(x)$ hacia la derecha a una distancia ct , hacemos lo mismo con $G(x)$ hacia la izquierda, y sumamos las dos. Aunque la forma de cada onda es constante, la suma de las dos sí varía en general con el tiempo. En la Sección 12.3.2 veremos cómo determinar las funciones $F(x)$ y $G(x)$ a partir de las condiciones iniciales.

Características. Parte de la solución es constante a lo largo de la familia de características $x - ct = \text{constante}$, mientras que una parte diferente de la solución es constante a lo largo de $x + ct = \text{constante}$. Para la ecuación de ondas unidimensional (12.3.1) hay dos familias de curvas características, según se ve en la Figura 12.3.1.

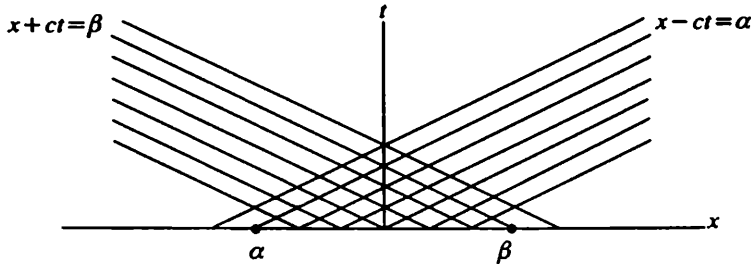


Figura 12.3.1: Características para la ecuación de ondas unidimensional.

12.3.2. Problema de valores iniciales en toda la recta

En la Sección 12.3.1, hemos probado que la solución general de la ecuación de ondas unidimensional es

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct). \tag{12.3.5}$$

Aquí, determinaremos las funciones arbitrarias de manera que se satisfagan las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{12.3.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{12.3.7}$$

Estas condiciones iniciales implican

$$f(x) = F(x) + G(x), \tag{12.3.8}$$

$$\frac{g(x)}{c} = -\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dx}. \tag{12.3.9}$$

Podemos despejar $G(x)$, por ejemplo, sumando la derivada de (12.3.8) con (12.3.9),

$$\frac{dG}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dx} + \frac{g(x)}{c} \right).$$

Integrando a su vez, tenemos

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x} + k \quad (12.3.10)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x} - k \quad (12.3.11)$$

donde la segunda fórmula se deduce directamente de (12.3.8). La constante de integración k se puede eliminar, pues $u(x, t)$ es la suma de ambas fórmulas (12.3.10) y (12.3.11) (trasladadas convenientemente).

Método práctico. Podemos representar la solución $u(x, t)$ a partir de (12.3.5), utilizando el siguiente esquema:

1. Dadas $f(x)$ y $g(x)$, dibujar las gráficas de

$$\frac{1}{2}f(x) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2c} \int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x}.$$

2. Sumando y restando, obtener $F(x)$ y $G(x)$; véanse las fórmulas (12.3.10) y (12.3.11).
3. Trasladar $F(x)$ hacia la derecha a una distancia ct y hacer lo mismo con $G(x)$ a la izquierda.
4. Sumar las dos funciones trasladadas y obtener (12.3.5).

Posición inicial en reposo. Si una cuerda vibrante se encuentra inicialmente en reposo, $[\partial u / \partial t(x, 0) = g(x) = 0]$, entonces (12.3.10) y (12.3.11) implican $F(x) = G(x) = \frac{1}{2}f(x)$. Por tanto,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)]. \quad (12.3.12)$$

El dato inicial $u(x, 0) = f(x)$ se separa en dos partes; la mitad se mueve hacia la izquierda y la otra mitad hacia la derecha.

Ejemplo. Supongamos que una cuerda infinita tiene inicialmente la forma de un pulso rectangular y se encuentra en reposo. Las condiciones iniciales son entonces

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = 0.$$

La solución viene dada por (12.3.12). Sumando estos dos pulsos rectangulares obtenemos la Figura 12.3.2. Los pulsos se solapan hasta que el extremo izquierdo del pulso que se mueve hacia la derecha adelanta al extremo derecho del otro pulso. Como ambos pulsos viajan con velocidad c , se están alejando uno de otro con velocidad $2c$. Los extremos se encuentran inicialmente a una distancia $2h$, por lo que los dos pulsos se separarán después de un tiempo

$$t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{2h}{2c} = \frac{h}{c}.$$

En la Figura 12.3.3 se representan las principales características. F se mantiene constante moviéndose hacia la derecha con velocidad c , mientras que G se mantiene constante moviéndose hacia la izquierda. Las fórmulas (12.3.10) y (12.3.11) nos dan

$$F(x) = G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| < h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

También se puede ver esto en la Figura 12.3.3.

Ejemplo de una cuerda inicialmente no en reposo. Supongamos que una cuerda infinita se encuentra inicialmente en posición de equilibrio, pero con velocidad inicial prescrita, de manera que las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = f(x) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) &= \begin{cases} 1, & |x| < h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases} \end{aligned}$$

En el Ejercicio 12.3.2 se muestra que esta situación corresponde a una fuerza instantánea que actúa sobre todo el intervalo $|x| < h$, como el efecto de un golpe con un martillo ancho. El cálculo de la solución con estos datos iniciales es más complicado que en el ejemplo anterior. A partir de (12.3.10) y (12.3.11), vemos que necesitamos calcular $\int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x}$, que representa el área bajo $g(x)$ entre 0 y x :

$$2cG(x) = -2cF(x) = \int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x} = \begin{cases} -h & x < -h \\ x & -h < x < h \\ h & x > h. \end{cases}$$

La solución $u(x, t)$ es la suma de $F(x)$ trasladada a la derecha (con velocidad c) y $G(x)$ trasladada a la izquierda (también con velocidad c). En la Figura 12.3.4 se esbozan las gráficas de $F(x)$ y $G(x)$, así como de la suma de sus trasladadas. El golpe del martillo produce un desplazamiento creciente de la cuerda allí donde ha sido golpeada, y el efecto se nota en la cuerda a derecha e izquierda de esta región, según avanza el tiempo. Pasado un tiempo, la cuerda alcanza una altura estable. La solución se puede obtener también de manera analítica calculando las integrales requeridas (véase el Ejercicio 12.3.5). Pueden ser de utilidad las características esbozadas en la Figura 12.3.3.

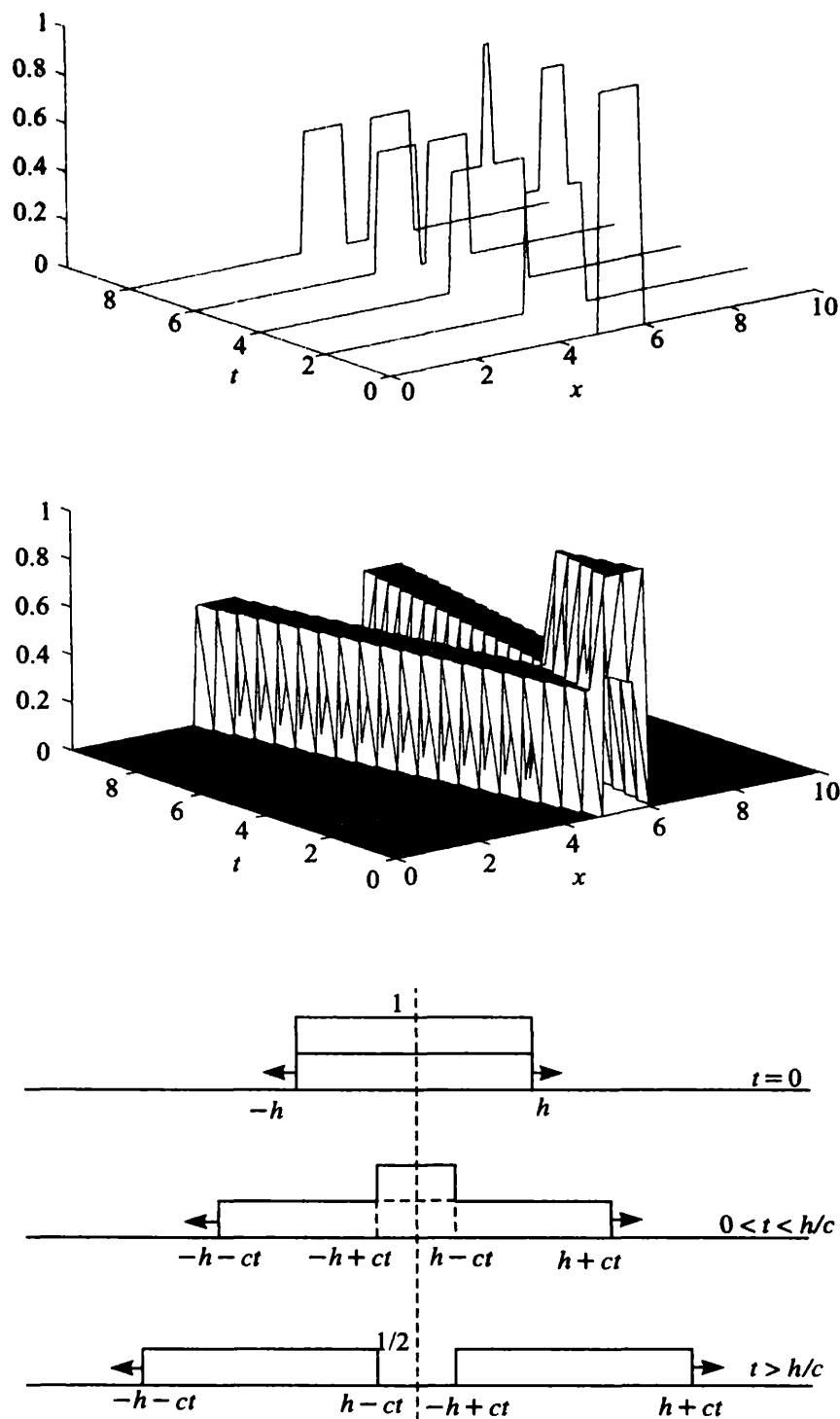


Figura 12.3.2: Problema de valores iniciales para la ecuación de ondas unidimensional.

12.3.3. Solución de d'Alembert

Sustituyendo las fórmulas (12.3.10) y (12.3.11) en la solución general (12.3.5) se obtiene la expresión

$$u(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \left[\int_0^{x+ct} g(\bar{x}) d\bar{x} - \int_0^{x-ct} g(\bar{x}) d\bar{x} \right]$$

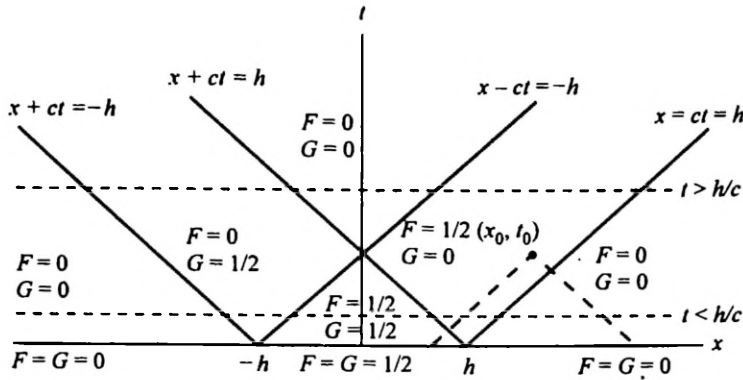


Figura 12.3.3: Método de las características para la ecuación de ondas unidimensional.

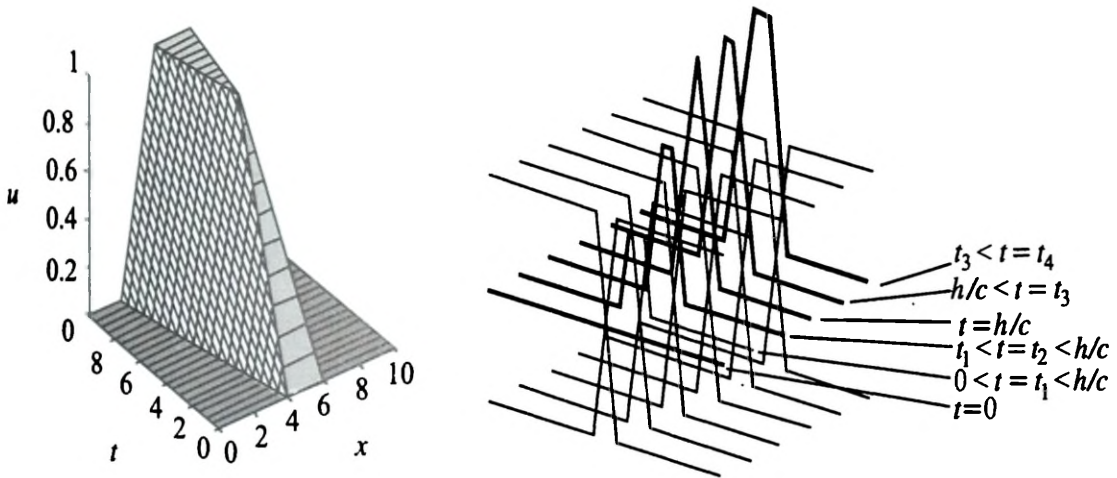


Figura 12.3.4: Evolución de una cuerda golpeada.

que simplificada da

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\bar{x}) d\bar{x}, \tag{12.3.13}$$

conocida como **solución de d'Alembert** (obtenida previamente por Fourier utilizando la transformada que llevaría después su nombre). Es una fórmula elegante, aunque para dibujar las soluciones es a menudo más conveniente utilizar directamente (12.3.10) y (12.3.11), trasladadas de acuerdo a (12.3.5).

Dominio de dependencia y dominio de influencia. La importancia de las características $x - ct = \text{constante}$ y $x + ct = \text{constante}$ ha quedado de manifiesto en los cálculos anteriores. Para conocer la solución en un punto x y en un tiempo t , se necesita el valor de la posición inicial en $x \pm ct$, así como los valores de la velocidad inicial en el intervalo entre $x - ct$ y $x + ct$. Este intervalo $[x - ct, x + ct]$

se denomina **dominio de dependencia** de la solución en (x, t) , según se ve en la Figura 12.3.5. También se refleja en esta figura el **dominio de influencia**, el conjunto afectado por los valores iniciales en un punto dado.

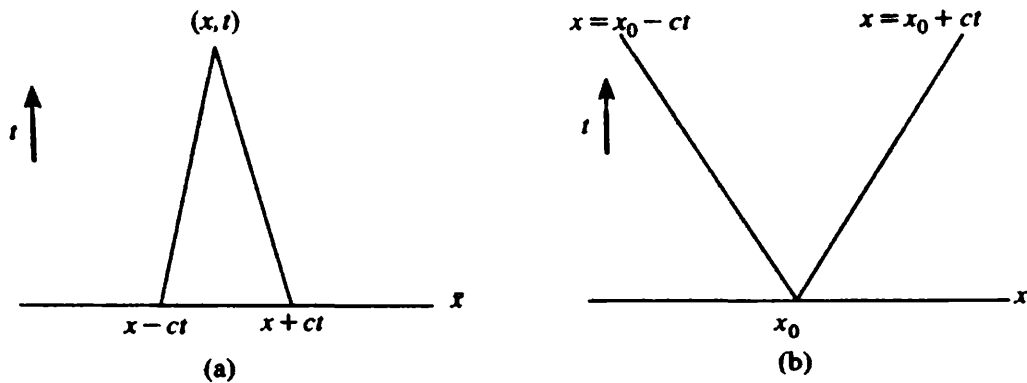


Figura 12.3.5: (a) Dominio de dependencia; (b) dominio de influencia.

EJERCICIOS 12.3

12.3.1. Supongamos que $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$, donde F y G se representan en la Figura 12.3.6. Esbozar la solución para varios tiempos.

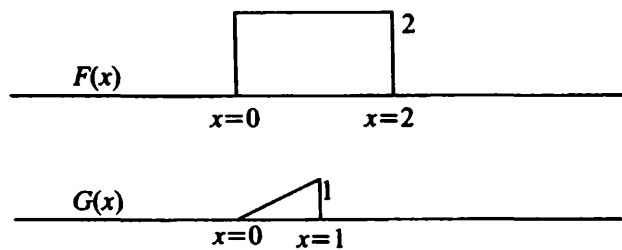


Figura 12.3.6

12.3.2. Supongamos que una cuerda se encuentra en equilibrio (horizontal, $u = 0$) y en reposo ($\partial u / \partial t = 0$). Si se aplica una fuerza instantánea en $t = 0$, el problema de valores iniciales es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x)\delta(t),$$

$$u(x, t) = 0, \quad t < 0.$$

(a) Sin usar las fórmulas explícitas de la solución, comprobar que este problema es equivalente a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0,$$

con las condiciones iniciales $u(x, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \alpha(x)$.

Quiere esto decir que la velocidad inicial $\alpha(x)$ es equivalente a una fuerza instantánea.

$$\text{CI1 : } \boxed{u(x, 0) = f(x),} \quad (12.4.2)$$

$$\text{CI2 : } \boxed{\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x).} \quad (12.4.3)$$

Necesitamos una condición en la frontera $x = 0$. Supongamos que la cuerda está fija en ese extremo $x = 0$:

$$\text{CC : } \boxed{u(0, t) = 0.} \quad (12.4.4)$$

Aunque podemos usar la transformada de Fourier de senos, preferimos utilizar la solución general y el método de las características:

$$\boxed{u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct).} \quad (12.4.5)$$

Al igual que en la Sección 12.3, las condiciones iniciales implican

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x}, \quad x > 0, \quad (12.4.6)$$

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x}, \quad x > 0. \quad (12.4.7)$$

Sin embargo, y en contra de lo que sucede para una cuerda infinita, las igualdades (12.4.6) y (12.4.7) son solo válidas para $x > 0$; es decir, las funciones arbitrarias quedan determinadas únicamente si el argumento es positivo. En la solución general el término $G(x + ct)$ requiere sólo argumentos positivos de G (pues $x > 0$ y $t > 0$). Por otro lado, el argumento de $F(x - ct)$ es positivo si $x > ct$, y negativo si $x < ct$. Como se ilustra en el diagrama espacio-tiempo de la Figura 12.4.1, la información de que existe una frontera fija en $x = 0$ viaja con una velocidad c . Por tanto, en un punto (x, t) con $x > ct$, no ha llegado tal información y la cuerda ignora que exista ninguna frontera. En ese caso ($x > ct$), la solución es la misma que antes [usando (12.4.6) y (12.4.7)],

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\bar{x}) d\bar{x}, \quad x > ct, \quad (12.4.8)$$

la solución de d'Alembert. Veamos qué ocurre para $x < ct$. El sumando correspondiente a G es el mismo que antes, pues $x + ct > 0$,

$$G(x + ct) = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Para obtener el valor de F cuando su argumento es negativo, no podemos usar los datos iniciales, sino el dato frontera. La condición de contorno $u(0, t) = 0$ implica [a partir de (12.4.5)]

$$0 = F(-ct) + G(ct), \quad \text{si } t > 0. \tag{12.4.9}$$

Por tanto, F para un argumento negativo es $-G$ para el correspondiente argumento positivo:

$$F(z) = -G(-z), \quad \text{si } z < 0. \tag{12.4.10}$$

Así, la solución para $x - ct < 0$ es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x - ct) + G(x + ct) = G(x + ct) - G(ct - x) \\ &= \frac{1}{2}[f(x + ct) - f(ct - x)] + \frac{1}{2c} \left[\int_0^{x+ct} g(\bar{x}) d\bar{x} - \int_0^{ct-x} g(\bar{x}) d\bar{x} \right] \\ &= \frac{1}{2}[f(x + ct) - f(ct - x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} g(\bar{x}) d\bar{x}. \end{aligned}$$

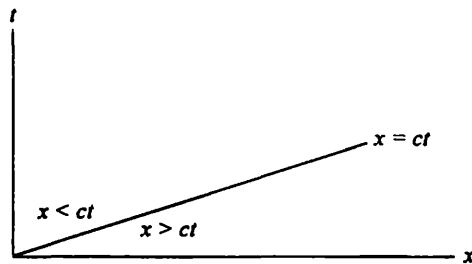


Figura 12.4.1: Característica que parte del extremo $x = 0$.

Para interpretar la solución obtenida, es de gran ayuda el método de las características. Recordemos que para el problema en toda la recta, la solución $u(x, t)$ es la suma de F (moviéndose hacia la derecha) y G (moviéndose hacia la izquierda). En el problema en el intervalo semiinfinito, la frontera no afecta a las características si $x > ct$ (véase la Figura 12.4.2). Por otro lado, y para $x < ct$, la Figura 12.4.3 muestra la característica que se mueve hacia la izquierda (G constante), que no se ve afectada por la frontera, y la característica que se crea en la frontera. Como F es constante moviéndose hacia la derecha, la condición de contorno implica $F + G = 0$ en $x = 0$, es decir, la onda que se mueve hacia la derecha es igual a la onda que se mueve hacia la izquierda cambiada de signo. Las ondas se invierten al “rebotar” en la frontera. La onda resultante $-G(ct - x)$, que se mueve hacia la derecha, se denomina **onda reflejada**. Si $x < ct$, la solución es, en total, la suma de la onda reflejada que se mueve hacia la derecha y la onda sin reflejar que se mueve hacia la izquierda:

$$u(x, t) = G(x + ct) - G(-(x - ct)).$$

La onda reflejada se comporta como si inicialmente, en $t = 0$, fuera $-G(-x)$. Si no hubiera frontera, la onda que se mueve hacia la derecha, $F(x - ct)$, sería

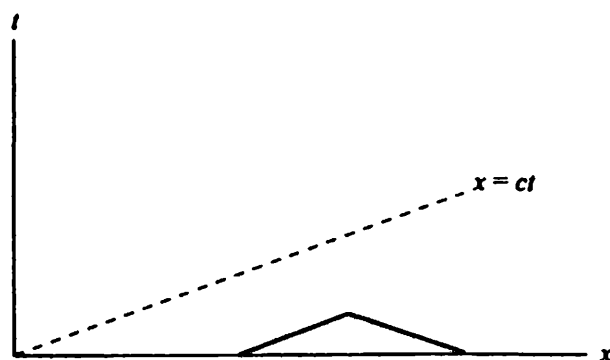


Figura 12.4.2: Características.

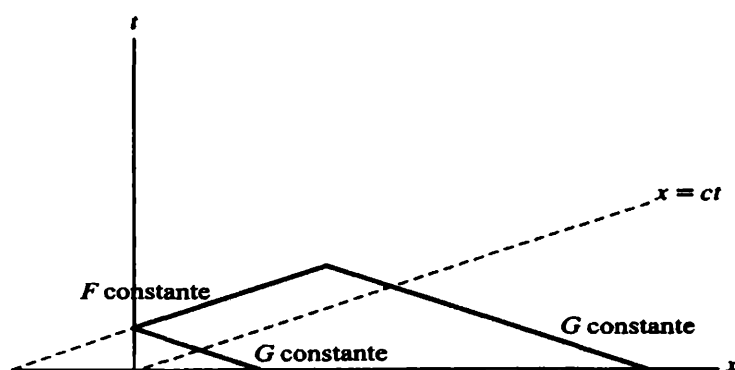


Figura 12.4.3: Características reflejadas.

inicialmente $F(x)$. Por tanto la onda reflejada es exactamente la onda producida por el dato inicial definido por

$$F(x) = -G(-x), \quad \text{si } x < 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x} = -\frac{1}{2}f(-x) - \frac{1}{2c} \int_0^{-x} g(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Vemos así que podíamos haber obtenido esta fórmula si consideramos el dato posición inicial $f(x)$, extendido de forma impar a $x > 0$ [tal que $f(-x) = -f(x)$], al igual que la velocidad inicial $g(x)$ [de manera que la integral $\int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x}$, es una función par]. **En resumen, la solución del problema semiinfinito con $u = 0$ en $x = 0$ es la misma que la solución del problema definido en toda la recta, con los datos iniciales extendidos de forma impar.**

Supongamos que $u(x, t)$ es una solución cualquiera de la ecuación de ondas. Como esta ecuación permanece inalterada si reemplazamos x por $-x$, se tiene que $u(-x, t)$ (y cualquier múltiplo de ella) es también una solución de la ecuación de ondas. Si los datos iniciales son funciones impares de x , entonces tanto $u(x, t)$ como $-u(-x, t)$ verifican estos datos. La unicidad implica $u(x, t) = -u(-x, t)$; es decir, $u(x, t)$, que es impar inicialmente, lo es para todo tiempo, o lo que es lo mismo: condiciones iniciales impares dan lugar a una solución con valor cero en $x = 0$.

Ejemplo. Consideremos una cuerda semiinfinita $x > 0$, con un extremo fijado $u(0, t) = 0$, que se encuentra inicialmente en reposo, $\partial u / \partial t(x, 0) = 0$, y cuya posición inicial es un pulso rectangular,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 4 < x < 5, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Como $g(x) = 0$, se sigue que

$$F(x) = G(x) = \frac{1}{2}f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 4 < x < 5, \\ 0, & \text{en el resto (con } x > 0). \end{cases}$$

F se mueve hacia la derecha, mientras que G se mueve hacia la izquierda, reflejándose negativa al atravesar $x = 0$. Esto se puede interpretar como una condición inicial (en toda la recta), con $f(x)$ y $g(x)$ extendidas de forma impar. La Figura 12.4.4 ilustra esta solución. Notemos la reflexión *negativa*.

Con el mismo método se pueden analizar problemas con condiciones de contorno no homogéneas en $x = 0$.

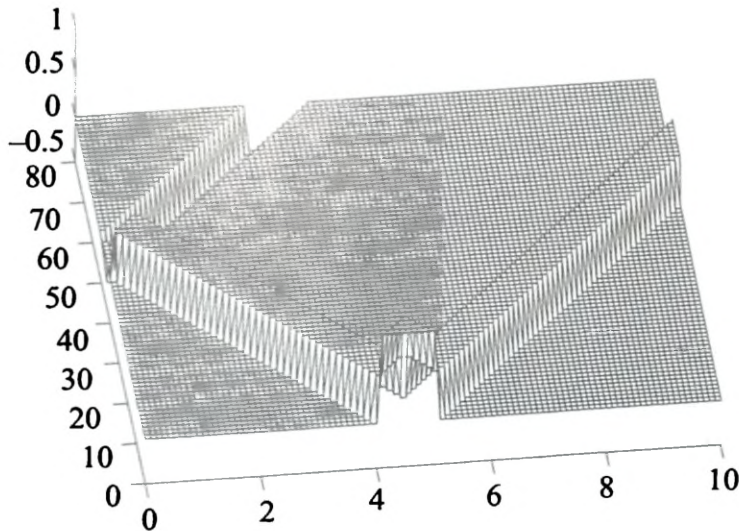


Figura 12.4.4: Pulso reflejado.

EJERCICIOS 12.4

*12.4.1. Resolver por el método de las características la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0,$$

con los datos $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ y $u(0, t) = h(t)$.

*12.4.2. Determinar $u(x, t)$ en el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{para } x < 0,$$

donde $u(x, 0) = \cos x$ si $x < 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ si $x < 0$, $u(0, t) = e^{-t}$ para $t > 0$. No esbozar la solución, pero sí las características principales en un diagrama espacio-tiempo.

12.4.3. Considérese la ecuación de ondas en un intervalo semiinfinito

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{para } 0 < x < \infty,$$

con el dato frontera $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 2, \\ 1, & 2 < x < 3, \\ 0, & x > 3, \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Determinar la solución. Esbozar la solución para varios tiempos (suponer que u es continua en $x = 0$, $t = 0$).

12.4.4. (a) Resolver para $x > 0$, $t > 0$ (usando el método de las características)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \end{aligned} \right\} x > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

(Suponer que u es continua en $x = 0$, $t = 0$.)

(b) Comprobar que la solución del apartado (a) se puede obtener extendiendo la posición y velocidad iniciales como funciones pares (alrededor de $x = 0$).

(c) Esbozar la solución si $g(x) = 0$ y

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 4 < x < 5, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

12.4.5. (a) Demostrar que si $u(x, t)$ y $\partial u / \partial t$ son inicialmente pares alrededor de $x = x_0$, lo mismo se verifica para todo tiempo posterior.

(b) Demostrar que este tipo de datos iniciales da lugar a una solución con derivada cero en $x = x_0$.

***12.4.6.** Resolver (para $x > 0$, $t > 0$) la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con las condiciones $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = h(t)$.

*12.4.7. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

con $u(x, 0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = h(t)$ (supóngase que u es continua en $x = 0$, $t = 0$).

12.4.8. Resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{con } u(x, 0) = 0 \text{ y } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0,$$

además de la condición $u(x, t) = g(t)$, para $x = \frac{c}{2}t$ ($c > 0$).

12.5. Método de las características para una cuerda de longitud finita

En el Capítulo 2 consideramos el siguiente problema para una cuerda vibrante de longitud finita

$$\text{EDP : } \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \quad (12.5.1)$$

$$\text{CC : } \boxed{\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= 0, \end{aligned}} \quad (12.5.2)$$

$$\text{CI : } \boxed{\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \end{aligned}} \quad (12.5.3)$$

que resolvimos mediante desarrollos en series de Fourier. Usando la solución general de la ecuación de ondas unidimensional, podemos obtener una expresión alternativa para esta solución, que será incluso de mayor utilidad en algunos casos:

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct). \quad (12.5.4)$$

Los datos iniciales están dados únicamente para $0 < x < L$ y, por tanto, las fórmulas para $F(x)$ y $G(x)$ que hemos obtenido antes son sólo válidas en ese intervalo:

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x}, \quad (12.5.5)$$

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (12.5.6)$$

Si $0 < x - ct < L$ y $0 < x + ct < L$, la solución de d'Alembert es válida, como puede verse en la Figura 12.5.1:

$$u(x, t) = \frac{f(x - ct) + f(x + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\bar{x}) d\bar{x}. \quad (12.5.7)$$

En esta región la cuerda no tiene información de que exista frontera alguna, pues esta información viaja con velocidad c desde $x = 0$ y $x = L$.

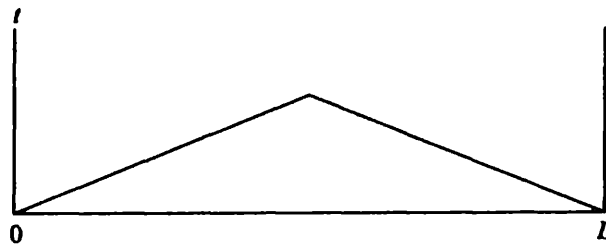


Figura 12.5.1: Características.

Sin embargo, si un punto (x, t) es tal que la señal desde la frontera ya ha llegado, debemos realizar algunas modificaciones en la Fórmula (12.5.7). La condición de contorno en $x = 0$ implica que

$$0 = F(-ct) + G(ct), \quad \text{si } t > 0, \quad (12.5.8)$$

mientras que en $x = L$ tenemos

$$0 = F(L - ct) + G(L + ct), \quad \text{si } t > 0. \quad (12.5.9)$$

Todo esto implica múltiples reflexiones, como puede verse en la Figura 12.5.2.

De forma alternativa, se puede considerar la solución definida en toda la recta verificando que es simétrica impar alrededor de $x = 0$, así como alrededor de $x = L$, como puede verse en la Figura 12.5.3. De esta manera, se verifica la condición cero en ambos extremos $x = 0$ y $x = L$. Observemos que $u(x, t)$ es periódica con periodo $2L$. De hecho, ignoramos la simetría impar alrededor de $x = L$, ya que

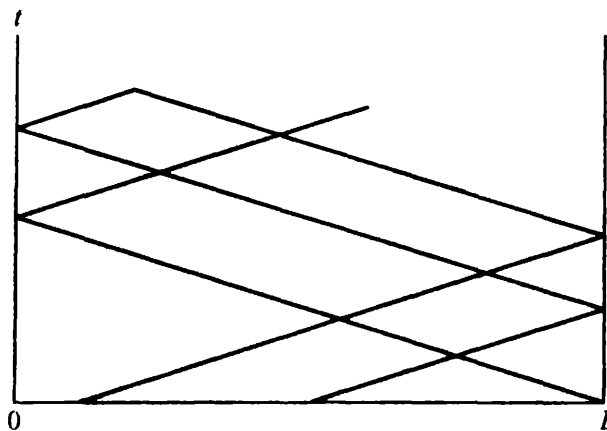


Figura 12.5.2: Características reflejadas múltiples veces.

las funciones periódicas que son impares alrededor de $x = 0$ son automáticamente impares alrededor de $x = L$. Por tanto, la manera más sencilla de obtener la solución es **extender los datos iniciales como funciones impares (alrededor de $x = 0$) y periódicas (con periodo $2L$)**. Con estas condiciones iniciales periódicas impares, podemos utilizar el método de las características y la Fórmula (12.5.7).

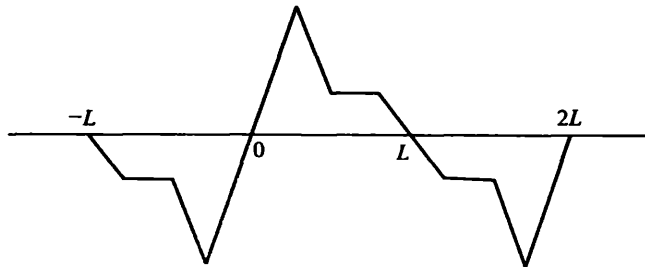


Figura 12.5.3: Extensión periódica impar.

Ejemplo. Consideremos una cuerda, que se encuentra inicialmente en reposo y en la posición $u(x, 0) = f(x)$, manteniéndose fija por los extremos $x = 0$ y $x = L$. En lugar de utilizar el método de desarrollo en serie de Fourier, extendemos los datos iniciales de forma impar alrededor de $x = 0$ y $x = L$, o lo que es lo mismo, introducimos la *extensión periódica impar* (que también ha sido utilizada en el desarrollo en series de Fourier de senos). Como la cuerda se encuentra inicialmente en reposo, se tiene $g(x) = 0$, y la extensión periódica impar de esta función es $g(x) = 0$ para todo x . Por tanto, la solución de la ecuación de ondas unidimensional es la suma de dos ondas simples:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)],$$

donde $f(x)$ es la extensión periódica impar de la posición inicial dada. Esta expresión de la solución es mucho más sencilla que la suma de cien términos del desarrollo en serie de Fourier de senos.

EJERCICIOS 12.5

12.5.1. Considérese el problema

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \left. \begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x), \end{aligned} \right\} & 0 < x < L, \\ u(0, t) &= 0, & u(L, t) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(a) Obtener la solución mediante serie de Fourier.

* (b) Comprobar que la solución obtenida en el apartado (a) es equivalente a los resultados del Capítulo 12, si $g(x) = 0$.

- (c) Comprobar que la solución obtenida en el apartado (a) es equivalente a los resultados del Capítulo 12, si $f(x) = 0$.

12.5.2. Resolver mediante el método de las características el problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = h(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

12.5.3. Considérese el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 10,$$

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1, & 4 < x < 5, \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad u(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$$

- (a) Esbozar la solución mediante el método de las características.
 (b) Obtener la solución mediante desarrollo en serie de Fourier.
 (c) Obtener la solución convirtiendo el problema en un problema definido en toda la recta.

12.5.4. ¿Cómo se debería extender los datos iniciales si $\partial u / \partial x(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$?

12.6. El método de las características para ecuaciones en derivadas parciales cuasilineales

12.6.1. Método de las características

La mayor parte de este texto describe métodos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales lineales (separación de variables, desarrollo en autofunciones, transformadas de Laplace y de Fourier, funciones de Green) que no pueden aplicarse a problemas no lineales. Sin embargo, el método de las características, usado para resolver la ecuación de ondas, sí puede aplicarse a ecuaciones en derivadas parciales de la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} = Q, \quad (12.6.1)$$

donde c y Q son funciones que pueden depender de x , t y ρ . Cuando el coeficiente c depende de la incógnita ρ , la Ecuación (12.6.1) es no lineal y no se puede aplicar el principio de superposición. Sin embargo, (12.6.1) se denomina **cuasilineal** pues es

lineal en las derivadas primeras, $\partial\rho/\partial t$ y $\partial\rho/\partial x$. Para resolver (12.6.1), consideramos de nuevo un observador móvil, que se mueve a lo largo de cierta curva prescrita $x(t)$. Comparando (12.2.7) y (12.6.1), obtenemos

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = Q(\rho, x, t),} \tag{12.6.2}$$

si

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = c(\rho, x, t).} \tag{12.6.3}$$

La ecuación en derivadas parciales (12.6.1) se reduce a un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, a lo largo de la trayectoria definida por (12.6.3), conocida como **curva característica** o, simplemente como **característica**. La velocidad definida por (12.6.3) se denomina **velocidad característica** o **velocidad local de la onda**. En la Figura 12.6.1 se ilustra una característica que empieza en $x = x_0$, que viene determinada por el par de ecuaciones diferenciales ordinarias (12.6.2) y (12.6.3) con la condición inicial $\rho(x, 0) = f(x)$. A lo largo de cada característica la solución ρ varía de acuerdo a (12.6.2). Cada posición inicial da lugar a una característica, obteniéndose en conjunto una familia de características.

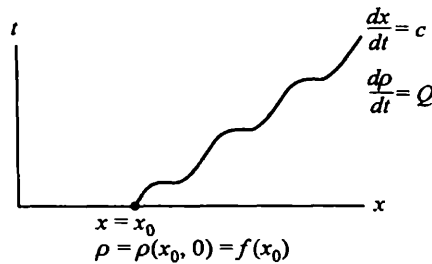


Figura 12.6.1: Característica que empieza en $x = x_0$ para $t = 0$.

Ejemplo. Si la velocidad local c es constante y $Q = 0$, entonces la ecuación cuasilineal (12.6.1) se reduce a la ecuación lineal (12.2.6), que aparece en el estudio de la ecuación de ondas. En ese caso, las características se pueden obtener integrando (12.6.3) directamente sin usar (12.6.2). Las características tienen la misma velocidad constante y obtenemos, por tanto, la familia de características formada por las rectas paralelas que se ilustran en la Figura 12.2.1.

Ecuaciones cuasilineales en el espacio bidimensional. Si las variables independientes son x e y en lugar de x y t , entonces la ecuación cuasilineal de primer orden se suele escribir en la forma

$$a \frac{\partial\rho}{\partial x} + b \frac{\partial\rho}{\partial y} = c, \tag{12.6.4}$$

donde a , b y c pueden depender de x e y , así como de ρ . El método de las características da

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{c}{a}, \quad (12.6.5)$$

si

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}. \quad (12.6.6)$$

Estas dos ecuaciones se escriben con frecuencia en la siguiente forma equivalente,

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{d\rho}{c}, \quad (12.6.7)$$

que es más fácil de memorizar.

12.6.2. Las ecuaciones del tráfico

Densidad de vehículos y flujo de vehículos. De forma aproximada y simplificada, es posible modelizar el tráfico de vehículos en una vía congestionada, esencialmente unidireccional, mediante una ecuación cuasilineal en derivadas parciales. Introducimos los conceptos de **densidad del tráfico** o **densidad de vehículos** $\rho(x, t)$, como el número de vehículos por unidad de longitud (kilómetro) en un tiempo t y en un punto x , y de **flujo de vehículos** $q(x, t)$, como el número de éstos que atraviesan por un punto dado x , por unidad de tiempo (hora), en un instante de tiempo t . Este segundo concepto corresponde a una cantidad más fácilmente medible.

Conservación del número de vehículos. Consideramos una sección arbitraria de la vía, entre $x = a$ y $x = b$. Si no hay entradas ni salidas en este segmento de carretera, entonces el número de vehículos entre $x = a$ y $x = b$ ($N = \int_a^b \rho(x, t) dx$, la integral definida de la densidad) puede variar debido únicamente a los vehículos que entran por a y salen por b . Es decir, la variación del número de vehículos, dN/dt , es igual al número de vehículos que entran por $x = a$ por unidad de tiempo (el flujo de vehículos $q(a, t)$ en ese punto) menos el número de vehículos que salen por $x = b$ por unidad de tiempo (el flujo de vehículos $q(b, t)$ allí):

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x, t) dx = q(a, t) - q(b, t). \quad (12.6.8)$$

La Ecuación (12.6.8) es la forma integral de la llamada **ley de conservación del número de vehículos**. Al igual que hicimos al estudiar el flujo de calor, a partir de (12.6.8) podemos obtener una ecuación en derivadas parciales por distintos procedimientos. Uno de ellos es observar que la contribución en la frontera se puede expresar como una integral sobre todo el intervalo:

$$q(a, t) - q(b, t) = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x, t) dx. \quad (12.6.9)$$

Así, intercambiando la derivada respecto del tiempo con la integral (convirtiendo la derivada en derivada parcial) y usando (12.6.9) se sigue que

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0,} \quad (12.6.10)$$

pues a y b son arbitrarios (véase la Sección 1.2). Llamaremos a (12.6.10) la **ley de conservación del número de vehículos**.

Velocidad del tráfico. El número de vehículos que pasan por un determinado punto cada hora es igual a la densidad del tráfico multiplicada por la velocidad del mismo. Introducimos entonces la **velocidad del tráfico** $u(x, t)$, para tener

$$\boxed{q = \rho u.} \quad (12.6.11)$$

A mediados de los años cincuenta, Lighthill y Whitham³ y de forma independiente Richards⁴ formularon una hipótesis para simplificar el modelo: la velocidad del tráfico depende exclusivamente de la densidad del mismo, $u = u(\rho)$, de manera que la velocidad disminuye según aumenta la densidad, es decir, $du/d\rho \leq 0$. Para una discusión más detallada del modelo, el lector puede consultar las obras de Whitham [1974] y de Haberman [1977]. Bajo esta hipótesis, el flujo de vehículos es una función sólo de la densidad de vehículos, $q = q(\rho)$. En ese caso, la ley de conservación del número de vehículos (12.6.10) se convierte en

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,} \quad (12.6.12)$$

donde $c(\rho) = q'(\rho)$. Ésta es una ecuación en derivadas parciales cuasilineal [véase (12.6.1)], con $Q = 0$. El coeficiente $c(\rho)$ es una función dada de la incógnita ρ . Más generalmente, la Ecuación (12.6.12) modeliza cualquier proceso físico en el que la densidad ρ se conserva y el flujo q es una función de la propia densidad.

12.6.3. Método de las características ($Q = 0$)

La densidad ρ es constante a lo largo de cada curva característica $x = x(t)$, es decir, a partir de (12.6.12) se obtiene

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad (12.6.13)$$

³Lighthill, M. J. y Whitham, G. B., "On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads", *Proc. Roy. Soc. A*, 229, 317-345 (1955).

⁴Richards, P. I., "Shock waves on the highway", *Operations Research* 4, 42-51(1956).

para

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho). \quad (12.6.14)$$

La velocidad c de la característica no es constante, sino que depende de la densidad ρ , y se denomina **velocidad de la onda de densidad**. Usando (12.6.13), vemos que la densidad ρ se mantiene constante a lo largo de cada característica, aunque éstas son todavía desconocidas. La velocidad de cada característica, $c(\rho)$, es entonces constante, pues ρ lo es. Así, cada característica es una recta (al igual que en el caso en el que $c(\rho)$ es una constante c_0). Sin embargo, las distintas características se mueven con una velocidad distinta, ya que pueden empezar con densidades distintas. Por tanto, aunque todas ellas son rectas, las características no son paralelas. Consideremos la característica que comienza en el punto $x = x_0$, como muestra la Figura 12.6.2. A lo largo de la curva $dx/dt = c(\rho)$, se tiene $d\rho/dt = 0$, es decir, ρ es constante. Como el valor inicial de ρ es el que toma en $x = x_0$ (en $t = 0$), se tiene que en esa característica se cumple

$$\rho(x, t) = \rho(x_0, 0) = f(x_0), \quad (12.6.15)$$

que es un valor dado. La velocidad de la onda es, entonces, $dx/dt = c(f(x_0))$. Por tanto, la característica es la recta

$$x = c(f(x_0))t + x_0, \quad (12.6.16)$$

pues $x = x_0$ para $t = 0$. Los diferentes valores de x_0 dan lugar a diferentes rectas características, de un modo similar al ilustrado en la Figura 12.6.2. A lo largo de cada característica, la densidad del tráfico ρ es una constante; véase (12.6.15). La densidad en cada tiempo posterior se determina mediante la característica que pasa por el correspondiente punto de espacio-tiempo, utilizando x_0 como parámetro a partir de la Fórmula (12.6.16).

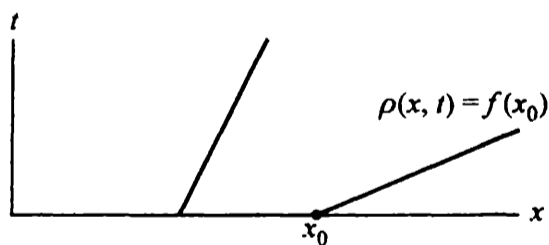


Figura 12.6.2: Rectas características posiblemente no paralelas.

Solución gráfica. Obtener explícitamente x_0 a partir de (12.6.16) como una fórmula de x y t no es en general sencillo y, en la práctica, no es particularmente interesante. Es más instructivo en general utilizar un procedimiento gráfico para determinar $\rho(x, t)$. Supongamos que la densidad viene dada por una gráfica como la de la Figura 12.6.3. Como sabemos que cada densidad ρ_0 se mantiene constante moviéndose con una velocidad determinada $c(\rho_0)$, en cada tiempo t , la densidad

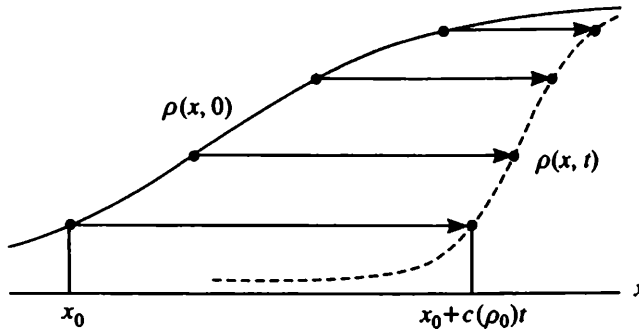


Figura 12.6.3: Solución gráfica.

ρ_0 habrá avanzado una distancia $c(\rho_0)t$, según la flecha de la misma Figura 12.6.3. Repitiendo este procedimiento para un gran número de puntos (cosa que puede hacer de forma elemental un ordenador), podemos obtener la densidad en el tiempo t .

Características de tipo abanico. Como ejemplo del método de las características consideremos el siguiente problema de valores iniciales:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 2\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 3, & x < 0, \\ 4, & x > 0. \end{cases}$$

La densidad $\rho(x, t)$ es constante según se avanza con velocidad 2ρ :

$$\frac{dx}{dt} = 2\rho.$$

Por tanto, las características vienen dadas por

$$x = 2\rho(x_0, 0)t + x_0. \tag{12.6.17}$$

Si $x_0 > 0$, entonces $\rho(x_0, 0) = 4$, mientras que si $x_0 < 0$, entonces $\rho(x_0, 0) = 3$. En la Figura 12.6.4 se muestran estas características, que implican

$$\rho(x, t) = \begin{cases} 4, & x > 8t, \\ 3, & x < 6t, \end{cases}$$

según se ve en la Figura 12.6.5. La distancia entre las características con $\rho = 3$ y $\rho = 4$ aumenta; decimos entonces que la solución es una **onda expansiva**. Pero, ¿qué pasa en los puntos $6t < x < 8t$? La dificultad proviene de la discontinuidad del dato inicial en $x = 0$. Podemos pensar que inicialmente ρ toma en x_0 todos los valores entre 3 y 4. Así, habrá una característica para cada uno de estos valores. Como estas características empiezan en $x = 0$ para $t = 0$, se sigue de (12.6.17) que su ecuación es

$$x = 2\rho t, \quad \text{para } 3 < \rho < 4,$$

En la Figura 12.6.4 se representan también estas características. De esta manera obtenemos la densidad en la región en forma de cuña

$$\rho = \frac{x}{2t}, \quad \text{si } 6t < x < 8t,$$

que es lineal en x (para cada t fijo). Observemos que las características se abren en forma de abanico desde la recta $x = 6t$ hasta $x = 8t$, y es por ello que se denominan **características de tipo abanico**. En la Figura 12.6.5 se esboza la densidad resultante, que se podía haber obtenido también por el procedimiento gráfico descrito antes.

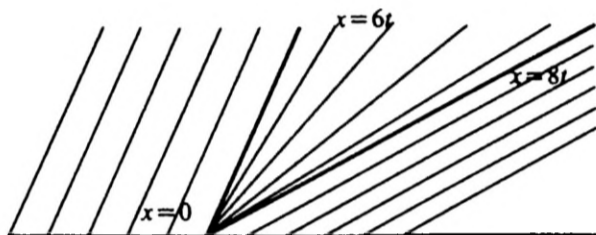


Figura 12.6.4: Características (incluyendo las características de tipo abanico).

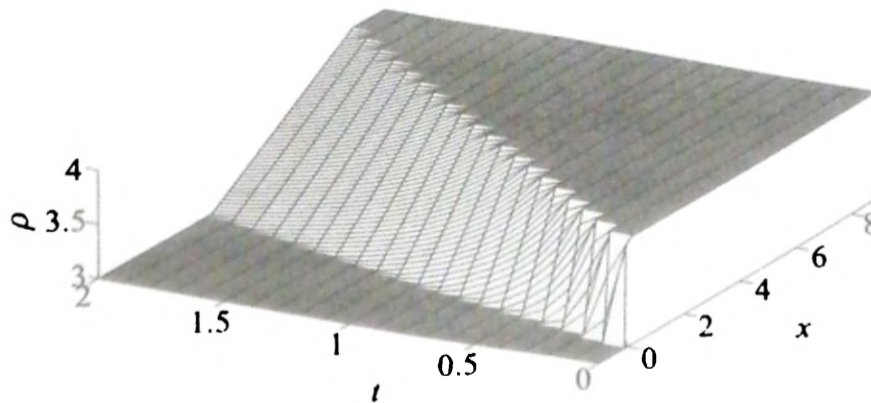
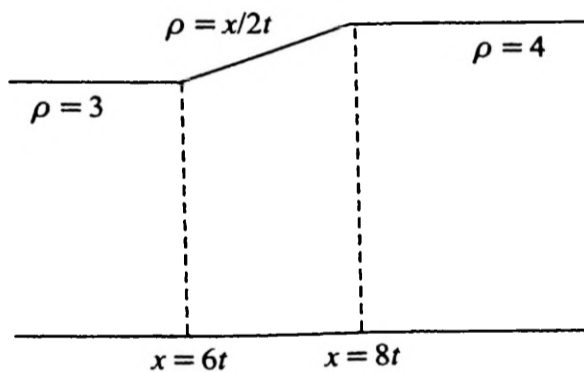


Figura 12.6.5: Onda expansiva.

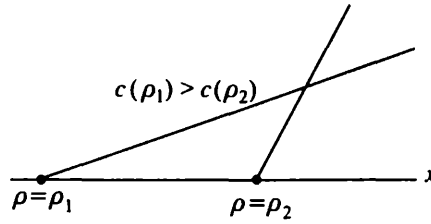


Figura 12.6.6: Intersección de características.

12.6.4. Ondas de choque

Intersección de características. Como hemos visto antes, el método de las características no siempre funciona. De hecho, en las ecuaciones cuasilineales es típico que las características se corten, por lo que para describir la solución es necesario introducir el concepto de discontinuidades móviles, denominadas *ondas de choque*. Para que la presentación matemática resulte relativamente sencilla, nos restringiremos a ecuaciones cuasilineales con $Q = 0$, en cuyo caso

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (12.6.18)$$

En la Figura 12.6.6 se esbozan dos características, una con inicio en $x = x_1$, y densidad $\rho = f(x_1, 0) \equiv \rho_1$, y la otra empezando en $x = x_2$ y con $\rho = f(x_2, 0) \equiv \rho_2$. Estas características se cortan si $c(\rho_1) > c(\rho_2)$, puesto que la más rápida alcanza a la más lenta. La densidad es constante a lo largo de las características, pero a medida que el tiempo pasa, la distancia entre estas dos características disminuye. Esto es lo que se denomina una **onda de compresión**. En la Figura 12.6.7(a) se representa el dato inicial. La distribución de densidades se hace cada vez más pronunciada según evoluciona el tiempo [Figura 12.6.7(b) y (c)]. En un tiempo dado las características se cortarán; según la teoría, la densidad debe tomar en el punto de corte simultáneamente los valores ρ_1 y ρ_2 . Si continuamos aplicando el mismo método, la característica más rápida adelantará a la más lenta y obtendríamos el dibujo de la Figura 12.6.7(d). Así se deduciría que la densidad es una función “multivaluada”, como puede verse en la Figura 12.6.7(d), donde para cada punto se obtienen tres valores de la densidad. Decimos que la onda de densidades *se rompe*. Sin embargo, en las aplicaciones físicas (tales como el flujo del tráfico), no tiene sentido hablar de funciones multivaluadas⁵. La densidad debe ser una función univaluada de la posición.

Soluciones discontinuas. La ecuación cuasilineal (12.6.18) parece predecir de forma matemática el fenómeno físicamente imposible de que aparezca una densidad multivaluada. Como el método de las características está bien justificado, es la propia ecuación la que falla, no es del todo válida. Alguna de las hipótesis o sim-

⁵Las ecuaciones que describen la altura de las olas cerca de la playa (en aguas poco profundas), son similares a las ecuaciones del tráfico. En esta situación, la predicción de que las ondas se rompan es muy significativa.

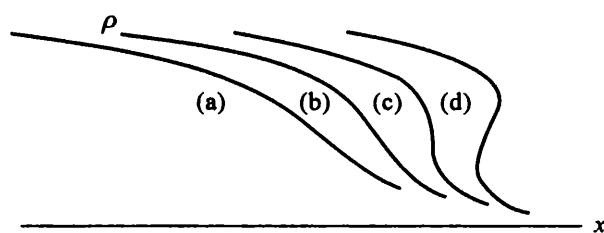


Figura 12.6.7: La onda de densidades se hace cada vez más pronunciada (la densidad pasaría a tomar tres valores).

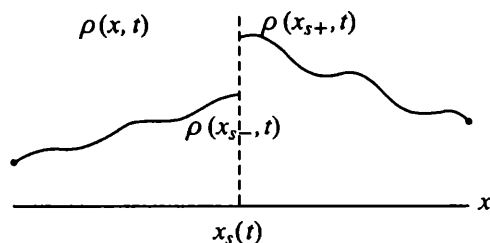


Figura 12.6.8: Discontinuidad de la densidad en $x = x_s(t)$.

plificaciones hechas para deducirla debe ser revisada. Debemos considerar entonces densidades y velocidades discontinuas, con un salto (como puede verse en la Figura 12.6.8), que denominamos **onda de choque**⁶, o siguiendo la terminología estándar en inglés, **shock**. El shock ocurre en una determinada posición x_s , que hay que calcular, y se propaga en el tiempo, por lo que tenemos $x_s(t)$. Introducimos la notación x_{s-} y x_{s+} para indicar la posición del shock a ambos lados de la discontinuidad. La velocidad del shock es dx_s/dt , una nueva incógnita del problema.

Velocidad de la onda de choque. La ecuación cuasilineal que estamos considerando, $\partial\rho/\partial t + c(\rho)\partial\rho/\partial x = 0$, aunque no tiene sentido en el shock, sí se verifica a cada lado del mismo. Recordemos que $c(\rho) = dq(\rho)/d\rho$. Necesitamos determinar cómo se propaga la discontinuidad. Si ρ se conserva, incluso en una discontinuidad, entonces el flujo relativo al movimiento del shock a uno y otro lado del mismo debe ser igual. Esta afirmación se escribe

$$\rho(x_{s-}, t) \left[u(x_{s-}, t) - \frac{dx_s}{dt} \right] = \rho(x_{s+}, t) \left[u(x_{s+}, t) - \frac{dx_s}{dt} \right], \quad (12.6.19)$$

⁶La terminología *onda de choque* procede de la analogía con la dinámica de gases. En este contexto, las variaciones de presión y densidad del aire, por ejemplo, se propagan y son percibidas (escuchadas) por el oído humano. Se denominan *ondas sonoras*. Cuando las fluctuaciones de la presión y la densidad son pequeñas, las ecuaciones que describen las ondas sonoras se pueden linealizar. El sonido se propaga entonces con una velocidad constante, conocida como *velocidad del sonido*. Sin embargo, si la amplitud de las fluctuaciones de la presión y densidad son suficientemente grandes, entonces las ecuaciones son cuasilineales y las características se pueden cortar. En ese caso, la presión y la densidad se pueden modelizar matemáticamente como funciones discontinuas, dando lugar a las *ondas de choque*. Ejemplos de tales fenómenos son el sonido emitido a partir de una explosión o el trueno que acompaña al rayo. La onda de choque que se produce al atravesar la barrera del sonido se denomina *boom sónico*.

ya que el flujo es igual a la densidad multiplicada por la velocidad (velocidad relativa). Despejando la **velocidad de la onda de choque** de (12.6.19), tenemos

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{q(x_{s+}, t) - q(x_{s-}, t)}{\rho(x_{s+}, t) - \rho(x_{s-}, t)} = \frac{[q]}{[\rho]}, \quad (12.6.20)$$

donde recordemos que $q = \rho u$, y donde hemos introducido la notación $[q]$ y $[\rho]$ para escribir los saltos de q y ρ , respectivamente. La Fórmula (12.6.20) es conocida en la dinámica de gases como condición de Rankine-Hugoniot. **En resumen, para la ley de conservación $\partial\rho/\partial t + \partial q/\partial x = 0$ (si la cantidad $\int \rho dx$ se conserva), la velocidad de la onda de choque es igual al salto del flujo dividido por el salto de la densidad de la magnitud conservada.** En los puntos de discontinuidad esta condición de salto sustituye a la ecuación en derivadas parciales, que es válida en el resto de los puntos. Sin embargo, todavía no hemos explicado dónde se produce el shock y cómo calcular $\rho(x_{s+}, t)$ y $\rho(x_{s-}, t)$.

Ejemplo. Consideremos el problema de valores iniciales:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + 2\rho\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0,$$

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 4, & x < 0, \\ 3, & x > 0. \end{cases}$$

Suponemos que ρ es una densidad que se conserva. Escribiendo la ecuación en forma de ley de conservación ($\partial\rho/\partial t + \partial q/\partial x = 0$), vemos que el flujo es $q = \rho^2$. Entonces, si existe alguna discontinuidad, la velocidad de la onda de choque debe satisfacer la igualdad $dx/dt = [q]/[\rho] = [\rho^2]/[\rho]$. La densidad $\rho(x, t)$ es constante desplazándose con una velocidad 2ρ :

$$\frac{dx}{dt} = 2\rho.$$

Por tanto, la ecuación de las características es

$$x = 2\rho(x_0, 0)t + x_0.$$

Si $x_0 < 0$, entonces $\rho(x_0, 0) = 4$. Este conjunto de características paralelas interseca al conjunto de características paralelas que empiezan en $x_0 > 0$ (pues $\rho(x_0, 0) = 3$) formando la región estrellada de la Figura 12.6.9(a). El método de las características da lugar a una función multivaluada como posible solución de la ecuación en derivadas parciales. Se puede eliminar esta dificultad introduciendo una onda de choque [Fig. 12.6.9(b)], una onda que se propaga señalando el camino por el que las densidades y velocidades varían de forma abrupta (es decir, son discontinuas). El método de las características implica que a un lado del shock la densidad es constante, $\rho = 4$, mientras que en el otro lado se obtiene $\rho = 3$. No conocemos todavía dónde está localizado el shock, pero la teoría implica que la curva que define éste

debe cumplir la condición del shock (12.6.20). Sustituyendo los saltos del flujo y de la densidad obtenemos la siguiente ecuación para la velocidad de la onda de choque:

$$\frac{dx_s}{dt} = \frac{q(4) - q(3)}{4 - 3} = \frac{4^2 - 3^2}{4 - 3} = 7,$$

ya que en este caso $q = \rho^2$. Por tanto, la onda de choque se mueve con velocidad constante. La posición inicial del shock viene dada por el dato inicial de la ecuación en derivadas parciales, obteniendo así una condición inicial para la ecuación diferencial ordinaria de primer orden que define el shock. Como el shock se inicia en $x_s = 0$ para $t = 0$, obtenemos, integrando, la ecuación del shock,

$$x_s = 7t.$$

En la Figura 12.6.9(c) se representa el correspondiente diagrama espacio-tiempo. En cada tiempo $t > 0$, la densidad del tráfico tiene una discontinuidad, como puede verse en la Figura 12.6.10.

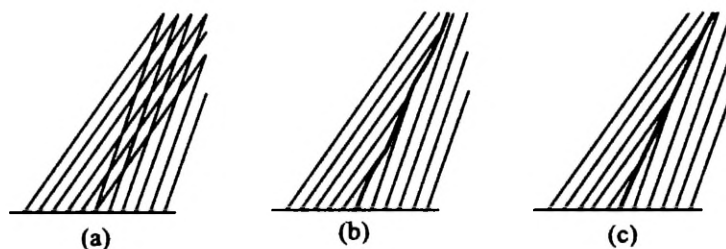


Figura 12.6.9: Shock causado por la intersección de las características.

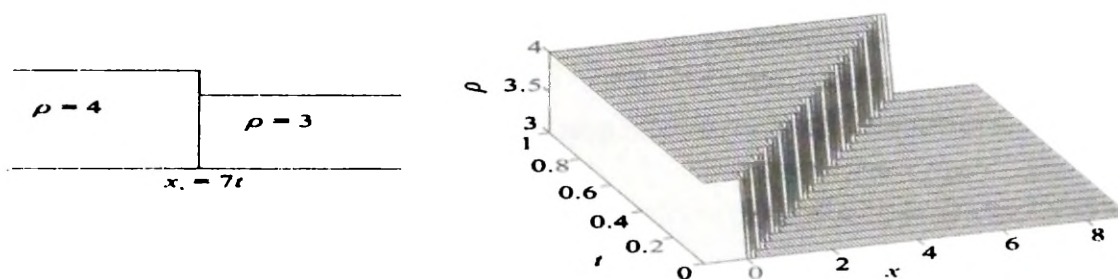


Figura 12.6.10: Onda de choque en la variable densidad.

Formación de una onda de choque. Hemos descrito cómo se propaga una onda de choque. En el ejemplo analizado la densidad era discontinua inicialmente, y el shock se formaba instantáneamente. Sin embargo, veremos ahora que puede pasar un tiempo hasta que se produzca una onda de choque si el dato inicial es continuo. Supongamos que el primer shock se produce en un tiempo $t = \tau$, debido a la intersección de dos características que se encuentran inicialmente a una distancia

Δx (no necesariamente pequeña). Pero esto implicaría que todas las características que se encuentren entre ambas deberían encontrarse, casi seguramente antes de ese tiempo $t = \tau$. Por tanto, las ondas de choque no pueden formarse a partir de características que se encuentren separadas una distancia Δx . Por el contrario, el primer shock se produce debido a la intersección de características adyacentes (el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$). Veremos que, incluso aunque $\Delta x \rightarrow 0$, la primera intersección se produce pasado un tiempo positivo. La densidad ρ es constante a lo largo de las características, verificando $dx/dt = c(\rho)$. Analicemos dos características cercanas, es decir, consideremos la característica que empieza en $x = x_0$ para $t = 0$, donde $\rho(x, 0) = f(x)$,

$$x = c[f(x_0)]t + x_0, \quad (12.6.21)$$

y la característica que empieza en $x = x_0 + \Delta x$ para $t = 0$,

$$x = c[f(x_0 + \Delta x)]t + x_0 + \Delta x.$$

Estas características se cortan (en un tiempo positivo) sólo si $c[f(x_0)] > c[f(x_0 + \Delta x)]$. Eliminando x para despejar el punto de intersección, tenemos

$$c[f(x_0)]t + x_0 = c[f(x_0 + \Delta x)]t + x_0 + \Delta x.$$

Por tanto, el tiempo para el que estas características cercanas se cortan es

$$t = \frac{\Delta x}{c[f(x_0)] - c[f(x_0 + \Delta x)]} = \frac{1}{\{c[f(x_0)] - c[f(x_0 + \Delta x)]\}/\Delta x}.$$

Las características son los caminos a lo largo de los cuales un observador móvil observa una densidad constante, por lo que esta ecuación nos dice que el tiempo en que las dos características se cortan es la distancia inicial entre ambas dividida por la velocidad relativa entre las mismas. Aunque la distancia entre las características sea pequeña, la velocidad relativa también lo es. Para considerar características adyacentes tomamos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\boxed{t = \frac{-1}{dc/dx_0}}. \quad (12.6.22)$$

Así, las características se cortan (en un tiempo $t > 0$), sólo si $(d/dx_0)c[f(x_0)] < 0$. De aquí se deduce que todas las características adyacentes que parten de regiones donde la velocidad es *localmente* decreciente, deben cortarse. El primer tiempo en que ocurre una intersección (shock), se obtiene minimizando el tiempo de intersección para todas las posibles intersecciones de características adyacentes, es decir, calculando el mínimo *absoluto* del tiempo t dado por la Ecuación (12.6.22). Este cálculo se puede realizar igualando la segunda derivada a cero, $(d^2/dx_0^2)c[f(x_0)] = 0$.

Dinámica de las ondas de choque. Vamos a ver ahora que la pendiente de la solución se hace infinita cuando dos características adyacentes se encuentran. Como $\rho(x, t) = \rho(x_0, 0)$, tenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{d\rho}{dx_0} \frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{d\rho}{dx_0} \left[1 + \frac{dc}{dx_0} t \right]^{-1},$$

donde hemos usado la derivación parcial respecto de x de la Ecuación (12.6.21):

$$1 = \frac{\partial x_0}{\partial x} \left[1 + \frac{dc}{dx_0} t \right].$$

La pendiente se hace infinita en aquellos puntos que verifiquen (12.6.22). Esto muestra que los puntos de retorno de la solución multivaluada (con tres valores), corresponden a la intersección de características adyacentes (la envolvente de las características). En la región interior a esta envolvente la solución tomaría tres valores. Se sabe que la envolvente de las características tiene forma de cuña, como se observa en la Figura 12.6.11. Sin embargo, la solución en el interior de esta región, como debería tomar tres valores, no tiene sentido. En su lugar, como hemos comentado antes, se obtiene una onda de choque que verifica (12.6.20) y que comienza en el extremo de la cuña. El shock se encuentra situado en el interior de la envolvente. Su localización exacta se puede determinar a partir de la solución que se obtendría por el método de las características, la función que debería tomar tres valores. El método descrito por Whitham [1974] es el siguiente: cada recta vertical en esta región corta a la gráfica de esta función en tres puntos, dando lugar a dos regiones cerradas; la localización exacta del shock viene determinada por aquella recta que produce dos áreas iguales (Figura 12.6.12). La razón es que el método de las características implica la conservación del número de vehículos y cuando aparece una onda de choque, el número de vehículos (representado por el área $\int \rho dx$) debe ser también igual al número inicial de vehículos.

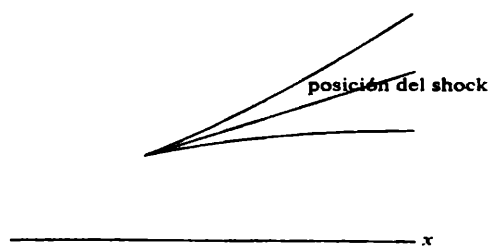


Figura 12.6.11: Envolvente de las características, conjunto de intersecciones de características adyacentes.

12.6.5. Ejemplo cuasilineal

Consideremos el siguiente ejemplo de ecuación cuasilineal

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = -2\rho, \quad (12.6.23)$$

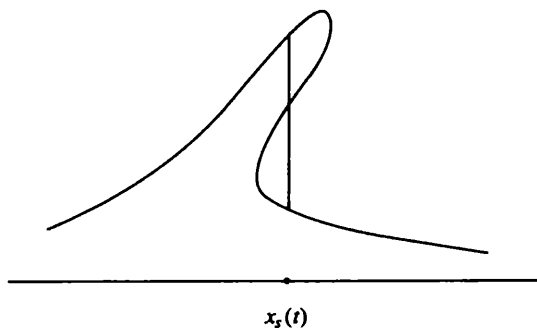


Figura 12.6.12: Principio de igual área de Whitham.

con el dato inicial

$$\rho(x, 0) = f(x). \quad (12.6.24)$$

Podemos pensar en este problema como modelo del flujo de tráfico (donde ρ es la densidad en una cierta escala) en el que el número de vehículos no se conserva, sino que éstos abandonan la vía (por las salidas) de manera proporcional a la densidad (los vehículos evitan la congestión).

El método de las características implica

$$\frac{d\rho}{dt} = -2\rho, \quad (12.6.25)$$

a lo largo de la característica

$$\frac{dx}{dt} = -\rho. \quad (12.6.26)$$

Estas ecuaciones se escriben también a veces en la forma equivalente

$$\frac{d\rho}{-2\rho} = \frac{dx}{-\rho} = dt. \quad (12.6.27)$$

En algunas ocasiones este sistema se puede resolver de manera explícita, en cuyo caso se debe comenzar integrando primero la ecuación ordinaria para ρ y utilizar su solución para determinar la característica x . Sea x_0 un parámetro representando el punto donde comienza la característica (en $t = 0$). Usando (12.6.25), a lo largo de la característica obtenemos

$$\rho(x, t) = \rho(x_0, 0)e^{-2t} = f(x_0)e^{-2t}. \quad (12.6.28)$$

El parámetro x_0 es constante para cada característica. La solución (la densidad) decrece exponencialmente con el tiempo. De aquí se obtiene que la velocidad de la característica es

$$\frac{dx}{dt} = -f(x_0)e^{-2t}.$$

Integrando la velocidad obtenemos la posición de la característica:

$$x = \frac{1}{2}f(x_0)e^{-2t} - \frac{1}{2}f(x_0) + x_0, \quad (12.6.29)$$

pues x es igual a x_0 para $t = 0$. Vemos que aquí las características no son líneas rectas. La solución en forma paramétrica se puede obtener a partir de (12.6.28), donde x_0 debe ser entendida como función de x y t según la relación (12.6.29). Sin embargo, la representación explícita de la solución es poco práctica en general.

Solución explícita de un problema de valores iniciales. Supongamos que el dato inicial en (12.6.24), es

$$\rho(x, 0) = f(x) = x.$$

En este caso, de (12.6.29) se obtiene que las características satisfacen

$$x = \frac{1}{2}x_0e^{-2t} + \frac{1}{2}x_0.$$

La solución explícita es entonces

$$x_0 = \frac{2x}{1 + e^{-2t}}.$$

Observemos que para cada x y cada t existe una única característica x_0 (el dato inicial se ha escogido para que la familia de características no se corte a sí misma). La Ecuación (12.6.28) da la solución

$$\rho(x, t) = \frac{2xe^{-2t}}{1 + e^{-2t}} = \frac{2x}{1 + e^{2t}}.$$

Solución general. Las ecuaciones cuasilineales tienen también soluciones generales, como las ecuaciones lineales. Si no especificamos ningún dato inicial, integrando (12.6.25) y (12.6.26) tenemos

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= c_1e^{-2t}, \\ x &= c_1e^{-2t} + c_2. \end{aligned}$$

Cada constante puede ser una función arbitraria de la otra constante. La **solución general** de (12.6.23) es

$$x = \rho + f(\rho e^{2t}).$$

EJERCICIOS 12.6

12.6.1. En las siguientes ecuaciones, determinar la solución $\rho(x, t)$ que verifica la condición inicial $\rho(x, 0) = f(x)$ si

$$\begin{aligned} * \text{ (a) } \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0, & \text{ (b) } \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -3\rho + 4e^{7t}, \\ * \text{ (c) } \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -3x\rho, & \text{ (d) } \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} &= x^2t\rho. \end{aligned}$$

***12.6.2.** Determinar la solución de la ecuación $\partial\rho/\partial t = \rho$, que verifica $\rho(x, t) = 1 + \sin x$ a lo largo de $x = -2t$.

12.6.3. Supongamos que $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$, donde c_0 es una constante.

- *(a) Determinar $\rho(x, t)$ si $\rho(x, 0) = \text{sen } x$.
- *(b) Si $c_0 > 0$, determinar $\rho(x, t)$ para $x > 0$ y $t > 0$, donde $\rho(x, 0) = f(x)$ para $x > 0$ y $\rho(0, t) = g(t)$ para $t > 0$.
- (c) Demostrar que el apartado (b) no se puede resolver si $c_0 < 0$.

*12.6.4. Si $u(\rho) = \alpha + \beta\rho$, determinar α y β tales que $u(0) = u_{\text{máx}}$ y $u(\rho_{\text{máx}}) = 0$.

- (a) ¿Cuál es el flujo en función de la densidad? Dibujar esta función.
- (b) ¿Para qué valor de la densidad es mayor el flujo? ¿Cuál es la velocidad correspondiente? ¿Cuál es el flujo máximo (llamado *capacidad*)?

12.6.5. Rehacer el Ejercicio 12.6.4, si $u(\rho) = u_{\text{máx}}(1 - \rho^3/\rho_{\text{máx}}^3)$.

12.6.6. Considérese el problema de flujo de tráfico

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Supóngase que $u(\rho) = u_{\text{máx}}(1 - \rho/\rho_{\text{máx}})$. Hallar $\rho(x, t)$ si el dato inicial es:

- (a) $\rho(x, 0) = \rho_{\text{máx}}$, para $x < 0$ y $\rho(x, 0) = 0$ para $x > 0$. Esta situación se corresponde con una línea infinita de vehículos parados ante un semáforo, a partir de que el semáforo cambia de rojo a verde.
- (b) $\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_{\text{máx}}, & x < 0, \\ \frac{\rho_{\text{máx}}}{2}, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$
- (c) $\rho(x, 0) = \begin{cases} \frac{3\rho_{\text{máx}}}{5}, & x < 0, \\ \frac{\rho_{\text{máx}}}{5}, & x > 0. \end{cases}$

12.6.7. Resolver los siguientes problemas:

- (a) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \rho(x, 0) = \begin{cases} 3, & x < 0, \\ 4, & x > 0. \end{cases}$
- (b) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + 4\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \rho(x, 0) = \begin{cases} 2, & x < 1, \\ 3, & x > 1. \end{cases}$
- (c) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \rho(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 2, & 0 < x < 1, \\ 4, & x > 1. \end{cases}$

- (d) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + 6\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$, para $x > 0$ sólo, $\rho(x, 0) = 5, \quad x > 0,$
 $\rho(0, t) = 2, \quad t > 0.$

12.6.8. Resolver los siguientes problemas si el dato inicial es $\rho(x, 0) = f(x)$:

- * (a) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} = e^{-3x}$, (b) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3x \frac{\partial \rho}{\partial x} = 4$,
 * (c) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + t \frac{\partial \rho}{\partial x} = 5$, (d) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + 5t \frac{\partial \rho}{\partial x} = 3\rho$,
 * (e) $\frac{\partial \rho}{\partial t} - t^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho$, (f) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + t^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$,
 * (g) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + x \frac{\partial \rho}{\partial x} = t$.

12.6.9. Obtener una representación paramétrica de la solución con dato inicial $\rho(x, 0) = f(x)$ para los problemas:

- * (a) $\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 3\rho$, (b) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = t$,
 * (c) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + t^2 \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho$, (d) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = -x\rho$.

12.6.10. Resolver $\frac{\partial \rho}{\partial t} + t^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 4\rho$ para $x > 0$ y $t > 0$ con $\rho(0, t) = h(t)$ y $\rho(x, 0) = 0$.

12.6.11. Resolver $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (1+t) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 3\rho$, para $t > 0$ y $x > -t/2$, con $\rho(x, 0) = f(t)$ para $x > 0$ y $\rho(x, t) = g(t)$, a lo largo de $x = -t/2$.

12.6.12. Considérese la igualdad (12.6.8) cuando existe un shock x que verifica que $a < x_s(t) < b$. Derivando la integral [con integrando discontinuo en $x_s(t)$], deducir la Fórmula (12.6.20).

12.6.13. Supóngase que en lugar de $u = U(\rho)$, la velocidad del tráfico viene dada por

$$u = U(\rho) - \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

donde ν es una constante.

- (a) ¿Qué signo debe tener ν para que esta expresión sea físicamente razonable?
 (b) ¿Qué ecuación describe en esta situación la ley de conservación del número de vehículos?
 (c) Supongamos que $U(\rho) = u_{\text{máx}}(1 - \rho/\rho_{\text{máx}})$. Deducir la **ecuación de Burgers**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_{\text{máx}} \left[1 - \frac{2\rho}{\rho_{\text{máx}}} \right] \frac{\partial \rho}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

12.6.14. Considérese la ecuación de Burgers obtenida en el Ejercicio 12.6.13. Supongamos que existe una solución que es una onda de densidades que se mueven sin cambiar su forma, con velocidad V , es decir, $\rho(x, t) = f(x - Vt)$.

- * (a) ¿Qué ecuación diferencial satisface f ?

- (b) Integrar una vez esta ecuación. Obtener gráficamente una solución tal que $f \rightarrow \rho_2$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y $f \rightarrow \rho_1$ cuando $x \rightarrow -\infty$, sólo si $\rho_2 > \rho_1$. Esbozar esta solución y dar una interpretación física del resultado.
- *(c) Demostrar que la velocidad V de propagación de la onda es la misma que la velocidad de la onda de choque que separa $\rho = \rho_1$ de $\rho = \rho_2$ (que se obtendría para $\nu = 0$).

12.6.15. Considérese la ecuación de Burgers obtenida en el Ejercicio 12.6.13. Demostrar que el cambio de variables

$$\rho = \frac{\nu \rho_{\text{máx}} \phi_x}{u_{\text{máx}} \phi},$$

introducido independientemente por E. Hopf y J. D. Cole, transforma la ecuación de Burgers en una ecuación de difusión, $\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_{\text{máx}} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$. Utilizar este hecho para resolver el problema de valores iniciales $\rho(x, 0) = f(x)$ para $-\infty < x < \infty$ [en Whitham [1974] se muestra que esta solución exacta se puede analizar asintóticamente para $\nu \rightarrow 0$ mediante el método de Laplace para estimar integrales de exponenciales, obteniendo que $\rho(x, t)$ está próxima a la solución obtenida para $\nu = 0$ por el método de las características con ondas de choque].

12.6.16. Supóngase que la densidad inicial del tráfico es $\rho(x, 0) = \rho_0$ para $x < 0$, y $\rho(x, 0) = \rho_1$ para $x > 0$. Consideremos los dos casos, $\rho_0 < \rho_1$ y $\rho_1 < \rho_0$. ¿Para cuál de los dos casos se obtiene una onda de choque? Explicar brevemente.

12.6.17. Considérese el problema del tráfico con $u(\rho) = u_{\text{máx}}(1 - \rho/\rho_{\text{máx}})$. Determinar $\rho(x, t)$ si

$$* \text{ (a) } \rho(x, 0) = \begin{cases} \frac{\rho_{\text{máx}}}{5}, & x < 0, \\ \frac{3\rho_{\text{máx}}}{5}, & x > 0. \end{cases} \quad \text{(b) } \rho(x, 0) = \begin{cases} \frac{\rho_{\text{máx}}}{3}, & x < 0, \\ \frac{2\rho_{\text{máx}}}{3}, & x > 0. \end{cases}$$

12.6.18. Supóngase que $u(\rho) = u_{\text{máx}}(1 - \rho^2/\rho_{\text{máx}}^2)$. Determinar la densidad del tráfico ρ , si inicialmente se tiene $\rho(x, 0) = \rho_1$ para $x < 0$, y $\rho(x, 0) = \rho_2$ para $x > 0$, en los siguientes casos:

$$\text{(a) } \rho_2 > \rho_1. \quad * \text{ (b) } \rho_2 < \rho_1.$$

12.6.19. Resolver los siguientes problemas, suponiendo conservación de la densidad ρ :

$$\begin{aligned} \text{(a) } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, & \rho(x, 0) &= \begin{cases} 4, & x < 0, \\ 3, & x > 0. \end{cases} \\ \text{(b) } \frac{\partial \rho}{\partial t} + 4\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, & \rho(x, 0) &= \begin{cases} 3, & x < 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases} \\ \text{(c) } \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, & \rho(x, 0) &= \begin{cases} 4, & x < 0, \\ 2, & 0 < x < 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$(d) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + 6\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \text{para } x > 0 \text{ sólo,} \quad \begin{aligned} \rho(x, 0) &= 2, & x > 0, \\ \rho(0, t) &= 5, & t > 0. \end{aligned}$$

12.6.20. Rehacer el Ejercicio 12.6.19 suponiendo que la magnitud conservada es ρ^2 .

12.6.21. Compárense los Ejercicios 12.6.19(a) y 12.6.20(a), mostrando que las ondas se mueven con velocidades distintas.

12.7. Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden no lineales

12.7.1. Deducción de la ecuación eikonal a partir de la ecuación de ondas

Consideremos, por simplicidad, la ecuación de ondas en dimensión dos

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \right). \quad (12.7.1)$$

En la Sección 4.6, analizamos la aparición de ondas planas y sus reflexiones. Por otro lado, en muchas situaciones aparecen ondas casi planas. Si el coeficiente c no es constante, pero varía de forma lenta, entonces, en un margen de algunas pocas longitudes de onda, la onda percibe c como constante. Sin embargo, para distancias largas (respecto a longitudes de onda cortas), el efecto de c variable puede ser interesante. Otra situación en la que aparecen ondas casi planas es en la reflexión de una onda plana sobre una superficie curva (o la reflexión y refracción sobre una interfase curva entre dos medios con diferentes índices de refracción). Supongamos que el radio de curvatura de la frontera es mucho mayor que las longitudes de onda típicas. En muchas de estas situaciones la frecuencia temporal ω es fija (fijada por una onda plana que se acerca). Así,

$$E = A(x, y)e^{-i\omega t}, \quad (12.7.2)$$

donde la función $A(x, y)$ satisface la **ecuación de Helmholtz** o **ecuación de ondas reducida**:

$$-\omega^2 A = c^2 \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right). \quad (12.7.3)$$

De nuevo, la frecuencia temporal ω es fija (y está dada) pero $c = c(x, y)$ si el medio no es homogéneo, mientras que $c = \text{constante}$ si el medio es uniforme. En medios uniformes ($c = \text{constante}$), existen ondas planas de la forma $E = A_0 e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)}$, o incluso

$$A = A_0 e^{i(k_1 x + k_2 y)}, \quad (12.7.4)$$

siempre que

$$\omega^2 = c^2(k_1^2 + k_2^2). \quad (12.7.5)$$

Para buscar ondas casi planas, introducimos la fase $u(x, y)$ de la ecuación de ondas reducida:

$$A(x, y) = R(x, y)e^{iu(x, y)}. \quad (12.7.6)$$

Los números de onda k_1 y k_2 en medios uniformes se denominan usualmente p y q respectivamente, y están definidos por

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (12.7.7)$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (12.7.8)$$

Mediante métodos perturbativos se puede demostrar que los números de onda (que varían lentamente) verifican (12.7.5), que corresponde a la frecuencia temporal dada asociada a las ondas planas,

$$\omega^2 = c^2(p^2 + q^2). \quad (12.7.9)$$

Ésta es una ecuación en derivadas parciales para la fase $u(x, y)$ que no es lineal (ni siquiera es cuasilineal) y es conocida como **ecuación eikonal**

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \quad (12.7.10)$$

donde ω es una frecuencia temporal fija de referencia, $c = c(x, y)$, si el medio no es homogéneo, y $c = \text{constante}$ si el medio es uniforme. En ocasiones es interesante introducir el **índice de refracción** $n(x, y)$ como una constante por $1/c$. La amplitud $R(x, y)$ satisface unas ecuaciones llamadas de transporte (ecuaciones que no discutiremos), que describen la propagación de la energía de esas ondas casi planas.

12.7.2. Ecuación eikonal en medios uniformes y ondas reflejadas

El ejemplo de ecuación eikonal más simple aparece cuando el medio es uniforme ($c = \text{constante}$):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (12.7.11)$$

donde ω y c son constantes. Más que hallar $u(x, y)$ directamente, vamos a ver que es más fácil hallar primero $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $q = \frac{\partial u}{\partial y}$. Consideremos entonces la ecuación

$$p^2 + q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (12.7.12)$$

Derivando esta ecuación [o la Ecuación (12.7.12)] respecto de x , tenemos

$$p \frac{\partial p}{\partial x} + q \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Como $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$, se tiene que p satisface una ecuación en derivadas parciales de primer orden cuasilineal,

$$p \frac{\partial p}{\partial x} + q \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (12.7.13)$$

que puede resolverse por el método de las características [véase en particular (12.6.7)],

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dp}{0}. \quad (12.7.14)$$

Si p satisface alguna condición de contorno, entonces (12.7.14) puede resolverse, pues usando (12.7.12) se tiene $q = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - p^2}$. Además, (12.7.14) muestra que p es constante a lo largo de cada característica, por lo que éstas son líneas rectas. Así, podemos obtener p . Sin embargo, dado $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, no es del todo directo integrar para calcular u .

Si en lugar de derivar la ecuación eikonal respecto de x , derivamos ahora respecto de y , obtenemos:

$$p \frac{\partial p}{\partial y} + q \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Utilizando además la igualdad de las derivadas cruzadas, es decir, $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$, obtenemos una ecuación en derivadas parciales de primer orden cuasilineal para q :

$$p \frac{\partial q}{\partial x} + q \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \quad (12.7.15)$$

Así, $\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dq}{0}$, que en combinación con (12.7.14) da como resultado la expresión más general

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0}. \quad (12.7.16)$$

En general, lo que queremos es determinar cómo varía u a lo largo de esta característica: $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = p dx + q dy = p^2 \frac{dx}{p} + q^2 \frac{dy}{p} = (p^2 + q^2) \frac{dx}{p} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{dx}{p}$, donde hemos usado (12.7.16) y (12.7.12). Por tanto, para la ecuación eikonal se verifica

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{0} = \frac{du}{\omega^2/c^2}. \quad (12.7.17)$$

Las características son rectas, pues p y q son constantes a lo largo de ellas.

Ondas reflejadas. Consideremos una onda plana elemental (acercándose), de la forma $e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$, donde \mathbf{k}_I representa el vector de números de onda constantes y donde $\omega = c|\mathbf{k}_I|$. Suponemos que la onda plana se refleja sobre una frontera curva (como se ilustra en la Figura 12.7.1), que representamos con un parámetro τ , es

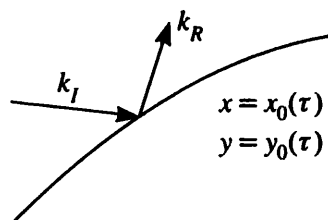


Figura 12.7.1: Ondas reflejadas sobre una frontera curva.

decir, $x = x_0(\tau)$, $y = y_0(\tau)$. Introducimos la onda reflejada como una incógnita $R(x, y)e^{iu(x, y)}e^{-i\omega t}$, y queremos determinar la fase $u(x, y)$ de la onda reflejada. Se puede interpretar la ecuación eikonal

$$p^2 + q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = |\mathbf{k}_I|^2$$

mediante la siguiente frase: el vector (p, q) de números de onda que varían lentamente tiene la misma longitud que el vector de números de onda constantes de la onda plana que se acerca (físicamente la onda reflejada tiene siempre la misma longitud que la onda incidente). Suponemos que la condición de contorno sobre la superficie curva es fijar el campo total a cero (otros tipos de condiciones darían las mismas ecuaciones para la fase): $0 = e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + R(x, y)e^{iu(x, y)}e^{-i\omega t}$. Por tanto, en la frontera, la fase de la onda que se acerca y la fase de la onda reflejada deben ser las mismas:

$$u(x_0, y_0) = \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{x}_0. \tag{12.7.18}$$

Derivando (12.7.18) respecto del parámetro τ , vemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx_0}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy_0}{d\tau} = p \frac{dx_0}{d\tau} + q \frac{dy_0}{d\tau} = \mathbf{k}_R \cdot \frac{d\mathbf{x}_0}{d\tau} = \mathbf{k}_I \cdot \frac{d\mathbf{x}_0}{d\tau}, \tag{12.7.19}$$

donde queda de manifiesto que el vector (p, q) es el vector desconocido \mathbf{k}_R de números de onda reflejada (ya que p y q son constantes a lo largo de las características). Como $d\mathbf{x}_0/d\tau$ es un vector tangente a la frontera, (12.7.19) muestra que la componente tangencial de la onda que se acerca y la onda reflejada deben ser iguales. Por otro lado, la magnitud de ambos vectores debe ser la misma, por lo que las componentes normales deben apuntar en direcciones opuestas. Por tanto, el ángulo de reflexión sobre la superficie curva es el mismo que el ángulo de incidencia. Así, los valores de p y q para la onda reflejada en cada punto de la superficie quedan determinados. Como $q = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - p^2}$, hay dos soluciones de la ecuación eikonal, una representa la onda incidente, la otra (la que nos interesa) es la onda reflejada. Para obtener la fase de la onda reflejada debemos resolver las ecuaciones de las características (12.7.17) para la ecuación eikonal, con las condiciones de borde especificadas en (12.7.18). Como en un medio uniforme se tiene que $\frac{\omega^2}{c^2} = |\mathbf{k}_I|^2$ es constante, la ecuación diferencial para u a lo largo de las características, $\frac{du}{dx} = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{p} = \frac{|\mathbf{k}_I|^2}{p}$,

se puede integrar (pues p es constante) usando las condiciones de contorno, para obtener

$$u(x, y) = \frac{|\mathbf{k}_I|^2}{p}(x - x_0) + \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{x}_0,$$

a lo largo de cada característica. La ecuación de las características $p(y - y_0) = q(x - x_0)$ corresponde a la identidad entre los ángulos de incidencia y reflexión. Usando finalmente $p^2 + q^2 = |\mathbf{k}_I|^2$, obtenemos la forma más sencilla de representar la fase (la solución de la ecuación eikonal) a lo largo de cada característica:

$$u(x, y) = p(x - x_0) + q(y - y_0) + \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{x}_0, \quad (12.7.20)$$

donde $u(x_0, y_0) = \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{x}_0$ es la fase de la onda incidente en la frontera.

12.7.3. Ecuaciones de primer orden no lineales

La forma general de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden no lineales es

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (12.7.21)$$

Al igual que para la ecuación eikonal de la sección precedente, vamos a ver que las variables $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $q = \frac{\partial u}{\partial y}$ verifican cierta ecuación cuasilineal y, por tanto, (12.7.21) puede resolverse por el método de las características. Usando la notación p y q , la Ecuación (12.7.21) es

$$F(x, y, u, p, q) = 0. \quad (12.7.22)$$

Derivando esta ecuación respecto de x , tenemos

$$F_x + F_u p + F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

donde utilizamos la notación de subíndice para indicar derivación parcial. Por ejemplo, $F_u \equiv \frac{\partial F}{\partial u}$, manteniendo x, y, p, q constantes. Como $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$, deducimos la ecuación cuasilineal para p :

$$F_p \frac{\partial p}{\partial x} + F_q \frac{\partial p}{\partial y} = -F_x - F_u p.$$

El método de las características implica ahora para p

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dp}{-F_x - F_u p}. \quad (12.7.23)$$

De forma análoga, derivando (12.7.22) respecto de y , se obtiene

$$F_y + F_u q + F_p \frac{\partial p}{\partial y} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} = 0,$$

que, después de utilizar la identidad $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$, se convierte en una ecuación cuasilineal para q :

$$F_p \frac{\partial q}{\partial x} + F_q \frac{\partial q}{\partial y} = -F_y - F_u q.$$

La dirección característica es la misma que en (12.7.23), por lo que (12.7.23) se convierte en

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dp}{-F_x - F_u p} = \frac{dq}{-F_y - F_u q}. \quad (12.7.24)$$

A lo largo de las características se tiene que u verifica:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = p dx + q dy = p F_p \frac{dx}{F_p} + q F_q \frac{dy}{F_q} = (p F_p + q F_q) \frac{dx}{F_p}.$$

El sistema completo a resolver para las variables p , q y u es, finalmente,

$$\boxed{\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dp}{-F_x - F_u p} = \frac{dq}{-F_y - F_u q} = \frac{du}{p F_p + q F_q}} \quad (12.7.25)$$

Capítulo 13

Breve introducción a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales mediante la transformada de Laplace

13.1. Introducción

Hasta ahora hemos presentado una serie de técnicas para resolver ecuaciones en derivadas parciales: el método de separación de variables nos ha motivado el uso de series y transformadas de Fourier en dominios sencillos, prestando especial atención a las condiciones de contorno, así como a si el dominio era acotado o no; en algunos problemas hemos utilizado la función de Green; para la ecuación de ondas unidimensional hemos desarrollado el método de las características. Independientemente de lo apropiado que pueda ser cada uno de estos métodos en cada problema concreto, hemos discutido también algunos métodos numéricos que se han mostrado también eficientes.

En este capítulo desarrollaremos otro método de resolución basado en el uso de la transformada de Laplace. *La mayoría de las ecuaciones que se pueden resolver mediante transformada de Laplace se pueden analizar también por algunas de las técnicas mencionadas antes y los resultados son en esencia equivalentes.* Por otro lado, el uso de la transformada de Laplace es defendido por aquéllos que ven en él una gran simplicidad. En lugar de tomar partido por uno u otro método, presentamos aquí los aspectos más relevantes del uso de la transformada de Laplace para familiarizar al lector con su aplicación. Existen grandes textos dedicados exclusivamente al uso de esta técnica en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales¹. Por tanto, en este capítulo nos concentraremos en estudiar de forma breve las propiedades de la transformada de Laplace y su aplicación a la resolución de algunos

¹Por ejemplo, Churchill [1972].

ejemplos de ecuaciones.

13.2. Propiedades elementales de la transformada de Laplace

13.2.1. Introducción

Definición. Una de las técnicas que se usa a menudo en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (en general con coeficientes constantes) es la introducción de la **transformada de Laplace de $f(t)$** como sigue:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (13.2.1)$$

Para que la transformada de Laplace esté bien definida, la integral en (13.2.1) debe converger. El conjunto de valores de s para los cuales esto es cierto depende de cada función $f(t)$. Por ejemplo, si $f(t)$ tiende a una constante para $t \rightarrow \infty$, entonces la integral converge para todo $s > 0$. Si s toma valores complejos, es decir $s = \text{Re}(s) + i\text{Im}(s)$ y, por tanto, $e^{-st} = e^{-\text{Re}(s)t} [\cos(\text{Im}(s)t) - i \text{sen}(\text{Im}(s)t)]$, entonces la convergencia requiere la condición $\text{Re}(s) > 0$.

Supondremos que el lector ha estudiado (al menos de manera introductoria) la transformada de Laplace y nos limitaremos a recordar brevemente las propiedades más importantes de la misma. Existe una gran cantidad de tablas al respecto² e incluimos una resumiendo los aspectos más importantes para su uso aquí. La transformada de Laplace de las funciones elementales se puede obtener por integración directa. Algunas de sus propiedades se pueden deducir a partir de la definición. Resumimos éstas y algunas otras en la Tabla 13.2.1.

A partir de la definición de la transformada de Laplace, vemos que sólo es necesario considerar la función $f(t)$ para valores $t > 0$, por lo que sin pérdida de generalidad podemos definir ésta como cero para $t < 0$. En la tabla mencionada antes, Fórmula (13.2.21), aparece la función de salto de Heaviside. Recordemos su definición:

$$H(t - b) = \begin{cases} 0 & t < b \\ 1 & t > b. \end{cases} \quad (13.2.2)$$

Transformada inversa de Laplace. Si lo que queremos es calcular $f(t)$ dada una función $F(s)$, podemos también hacer uso de la misma tabla. La función $f(t)$ se denomina **transformada inversa de Laplace de $F(s)$** y se suele representar mediante la notación $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$. Por ejemplo, vemos en las tablas que la transformada inversa de Laplace de $1/(s - 3)$ es e^{3t} , $\mathcal{L}^{-1}[1/(s - 3)] = e^{3t}$.

²Destacamos Churchill [1972]; CRC Standard Mathematical Tables [1981] (elaborada a partir de la tabla de Churchill); Abramowitz y Stegun [1965] (también incluye la tabla de Churchill); Roberts y Kaufman [1966].

No todas las funciones de s tienen transformada inversa de Laplace. La definición (13.2.1) implica que si $f(t)$ es cualquier función elemental, entonces $F(s) \rightarrow 0$ para $s \rightarrow \infty$. Todas las funciones de nuestra tabla verifican esta propiedad.

13.2.2. Singularidades de la transformada de Laplace

Si $f(t)$ es una exponencial, $f(t) = e^{at}$, el exponente a es también el punto en el que su transformada, $F(s) = 1/(s - a)$, tiene una singularidad. La transformada de Laplace tiende a ∞ para $s \rightarrow a$. Esta propiedad, denominada **propiedad de singularidad** de la transformada de Laplace, puede servir como comprobación en los cálculos: **las singularidades de la transformada de Laplace $F(s)$ (los ceros de su denominador) se corresponden (de alguna manera) con el crecimiento exponencial de $f(t)$** . A lo largo de este capítulo veremos varios ejemplos de esta correspondencia, que probaremos usando variable compleja.

TRANSFORMADA DE LAPLACE (breve tabla de fórmulas y propiedades)

	$f(t)$	$F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$	
Funciones elementales (Ejercicios 13.2.1 y 13.2.2)	1	$\frac{1}{s}$	(13.2.2a)
	$t^n (n > -1)$	$n!s^{-(n+1)}$	(13.2.2b)
	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	(13.2.2c)
	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	(13.2.2d)
	$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	(13.2.2e)
	$\text{senh } at = \frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$	(13.2.2f)
$\text{cosh } at = \frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$	$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2 - a^2}$	(13.2.2g)	
Propiedades fundamentales (Sección 13.2.3 y Ejercicio 13.2.3)	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$	(13.2.2h)
	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - \frac{df}{dt}(0)$	(13.2.2i)
	$-tf(t)$	$\frac{dF}{ds}$	(13.2.2j)
	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	(13.2.2k)
Convolución (Sección 13.2.4)	$H(t-b)f(t-b)$	$e^{-bs}F(s) \quad (b > 0)$	(13.2.2l)
	$\int_0^t f(t-\bar{t})g(\bar{t}) d\bar{t}$	$F(s)G(s)$	(13.2.2m)
Delta de Dirac (Sección 13.2.4)	$\delta(t-b)$	$e^{-bs} (b \geq 0)$	(13.2.2n)
Transformada inversa (Sección 13.7)	$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds$	$F(s)$	(13.2.2o)
Miscelánea (Ejercicio 13.2.9)	$t^{-1/2}e^{-a^2/4t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}} e^{-a\sqrt{s}} \quad (a \geq 0)$	(13.2.2p)
	$t^{-3/2}e^{-a^2/4t}$	$\frac{2\sqrt{\pi}}{a} e^{-a\sqrt{s}} \quad (a > 0)$	(13.2.2q)

Ejemplos. Veamos algunos ejemplos. Las transformadas de Laplace $\omega/(s^2 + \omega^2)$ y $s/(s^2 + \omega^2)$ tienen ambas dos singularidades en los puntos en que $s^2 + \omega^2 = 0$, es decir

$s = \pm i\omega$. Por tanto, sus transformadas inversas deben involucrar las exponenciales e^{st} , con $s = \pm i\omega$. De acuerdo con la tabla anterior, vemos que estas transformadas inversas son $\sin \omega t$ y $\cos \omega t$, que sabemos, por la fórmula de Euler, que se pueden expresar como combinaciones lineales de $e^{\pm i\omega t}$.

Consideremos también la transformada de Laplace $F(s) = 3/[s(s^2 + 4)]$. Una manera de determinar $f(t)$ es usar fracciones simples (con coeficientes reales):

$$\frac{3}{s(s^2 + 4)} = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{s^2 + 4} = \frac{3/4}{s} + \frac{-(3/4)s}{s^2 + 4}.$$

Usando la Tabla 13.2.1 tenemos:

$$f(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cos 2t.$$

Como comprobación vemos que $3/[s(s^2 + 4)]$ tiene singularidades en $s = 0$ y $s = \pm 2i$. La propiedad de singularidad de la transformada de Laplace implica que su transformada inversa de Laplace debe ser una combinación lineal de e^{0t} y $e^{\pm 2it}$, como hemos obtenido.

Fracciones simples. A la hora de calcular transformadas inversas de Laplace, a menudo nos encontraremos con cocientes de polinomios $q(s)/p(s)$. Para que estas funciones sean transformadas de Laplace de alguna función, su límite para $s \rightarrow \infty$ debe ser cero. Esto implica que el grado del denominador p debe ser mayor que el del numerador q . Si descomponemos este cociente en fracciones simples, la Tabla 13.2.1 nos dará la transformada inversa de forma automática. Describiremos a continuación esta técnica en el caso en que las raíces del denominador son simples. Primero descomponemos el denominador en un producto:

$$p(s) = \alpha(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n),$$

donde s_1, \dots, s_n son las n raíces *distintas* de $p(s)$, también llamados **polos simples** de $q(s)/p(s)$. La descomposición en fracciones simples de $q(s)/p(s)$ es

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{c_n}{s - s_n}. \quad (13.2.3)$$

Los coeficientes c_i de la descomposición se pueden obtener mediante operaciones algebraicas más o menos largas. Un método alternativo más elegante hace uso de las singularidades s_i del cociente $q(s)/p(s)$. Para determinar c_i multiplicamos (13.2.3) por $s - s_i$ y tomamos límites para $s \rightarrow s_i$. Todos los sumandos se anulan excepto el correspondiente a c_i , que implica:

$$c_i = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{(s - s_i)q(s)}{p(s)}. \quad (13.2.4)$$

Este límite es, en general, fácil de evaluar, pues $s - s_i$ es un factor de $p(s)$, por lo que el cociente (13.2.4) se simplifica.

Ejemplo. Usando las raíces complejas de $s^2 + 4$, tenemos la siguiente descomposición en fracciones simples,

$$\frac{3}{s(s^2 + 4)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s + 2i} + \frac{c_3}{s - 2i},$$

donde

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{3}{s(s^2 + 4)} = \frac{3}{4}, \\ c_2 &= \lim_{s \rightarrow -2i} (s + 2i) \frac{3}{s(s^2 + 4)} = \lim_{s \rightarrow -2i} (s + 2i) \frac{3}{s(s + 2i)(s - 2i)} = -\frac{3}{8}, \\ c_3 &= \lim_{s \rightarrow 2i} (s - 2i) \frac{3}{s(s^2 + 4)} = \lim_{s \rightarrow 2i} (s - 2i) \frac{3}{s(s + 2i)(s - 2i)} = -\frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Polos simples. En algunos problemas las operaciones se pueden simplificar aún más. El límite (13.2.4) es de la forma indeterminada $0/0$ pues $p(s_i) = 0$ [siendo $s = s_i$ una raíz de $p(s)$]. Usando la regla de L'Hôpital para evaluar este límite, obtenemos

$$c_i = \lim_{s \rightarrow s_i} \frac{d/ds[(s - s_i)q(s)]}{d/ds p(s)} = \frac{q(s_i)}{p'(s_i)}. \quad (13.2.5)$$

Esta ecuación es válida únicamente en caso de tener polos simples.

Una vez que tenemos la descomposición en fracciones simples, la transformada inversa de Laplace es fácil de obtener: dada la función

$$F(s) = \frac{q(s)}{p(s)}, \quad (13.2.6)$$

calculando la transformada inversa de (13.2.3) tenemos

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{q(s_i)}{p'(s_i)} e^{s_i t}, \quad (13.2.7)$$

donde hemos supuesto que $p(s)$ tiene únicamente polos simples en $s = s_i$.

Ejemplo. Para aplicar esta fórmula a $q(s)/p(s) = 3/[s(s^2 + 4)]$, ponemos $q(s) = 3$ y $p(s) = s(s^2 + 4) = s^3 + 4s$. Calculamos la derivada $p'(s) = 3s^2 + 4$. Así, para

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 4)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s + 2i} + \frac{c_3}{s - 2i},$$

se tiene

$$c_1 = \frac{q(0)}{p'(0)} = \frac{3}{4}, \quad c_2 = \frac{q(-2i)}{p'(-2i)} = \frac{3}{-8} \quad y \quad c_3 = \frac{q(2i)}{p'(2i)} = -\frac{3}{8},$$

como antes. Finalmente,

$$f(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{8}e^{-2it} - \frac{3}{8}e^{2it} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos 2t.$$

Completar el cuadrado. La transformada inversa de Laplace de un cociente en el que el denominador es una expresión cuadrática

$$F(s) = \frac{\alpha s + \beta}{as^2 + bs + c}$$

se puede obtener por el método anterior tanto si los polos son reales como si son complejos. Sin embargo, cuando los polos son complejos puede ser más sencillo completar el cuadrado del denominador. Por ejemplo, consideremos el cociente

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 8} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 7},$$

cuyos polos están en $s = -1 \pm i\sqrt{7}$. Como esta expresión es una función de $s + 1$, utilizamos el teorema de traslación:

$$F(s) = G(s + 1), \quad \text{donde} \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 7}.$$

De acuerdo con este teorema, la transformada inversa de $G(s+1)$ es (usando $a = -1$) $f(t) = e^{-t}g(t)$, donde $g(t)$ es la transformada inversa de $1/(s^2 + 7)$. A partir de la Tabla 13.2.1, $g(t) = (1/\sqrt{7})\text{sen } \sqrt{7}t$, y, por tanto,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{7}}e^{-t}\text{sen } \sqrt{7}t.$$

Este resultado es consistente con la propiedad de singularidad; la solución es una combinación lineal de e^{st} , donde $s = -1 \pm i\sqrt{7}$.

13.2.3. Transformada de derivadas

Una de las propiedades más importantes y útiles de la transformada de Laplace es la forma en que actúa sobre las derivadas. Integrando por partes en la definición,

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right]} = \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-st} dt = f e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f e^{-st} dt = sF(s) - f(0). \quad (13.2.8)$$

Análogamente,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] - \frac{df}{dt}(0) = s(sF(s) - f(0)) - \frac{df}{dt}(0) = s^2F(s) - sf(0) - \frac{df}{dt}(0). \quad (13.2.9)$$

Esta propiedad muestra que la transformada de las derivadas de una función se puede calcular en términos de la transformada de la propia función. En la fórmula aparece una cierta condición “inicial”. Por ejemplo, para calcular la transformada de la primera derivada df/dt , se necesita el valor de $f(0)$. Igualmente, para calcular la transformada de la derivada segunda d^2f/dt^2 , se necesitan los valores de $f(0)$ y $(df/dt)(0)$. Ésta es precisamente la clase de información que se conoce en los problemas si la variable t es el tiempo y éste es también el caso general en el que se suele aplicar la transformada de Laplace. Más aún, la transformada de Laplace se simplifica en gran medida cuando las condiciones iniciales son cero.

Aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

La utilidad de la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias reside en el hecho de que reduce la ecuación diferencial a una ecuación algebraica. Consideremos, por ejemplo, el problema

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} + 4y &= 3, \\ y(0) &= 1, \\ \frac{dy}{dt}(0) &= 5. \end{aligned}$$

Tomando transformada de Laplace, obtenemos

$$s^2Y(s) - s - 5 + 4Y(s) = \frac{3}{s},$$

donde $Y(s)$ es la transformada de Laplace de $y(t)$. Así,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 4} \left(\frac{3}{s} + s + 5 \right) = \frac{3}{s(s^2 + 4)} + \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{5}{s^2 + 4}.$$

Las transformadas inversas de $s/(s^2 + 4)$ y $5/(s^2 + 4)$ se pueden obtener de la Tabla 13.2.1. Por otro lado, hemos calculado ya la transformada inversa de $3/[s(s^2 + 4)]$ por varios métodos distintos. Finalmente,

$$y(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cos 2t + \cos 2t + \frac{5}{2} \sin 2t.$$

13.2.4. Teorema de convolución

Otro método para calcular la transformada inversa de Laplace de $3/[s(s^2 + 4)]$ es usar el teorema de convolución, que pasamos a enunciar y que se aplica al cálculo de la transformada inversa de un producto de transformadas. Al igual que en este ejemplo, frecuentemente buscamos una función cuya transformada de Laplace es el producto de dos funciones, $F(s)G(s)$, de las que conocemos sus transformadas inversas. El **teorema de convolución** establece que

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = g * f = \int_0^t g(\bar{t})f(t - \bar{t}) d\bar{t}, \quad (13.2.10)$$

donde $g * f$ se denomina **convolución** de g y f . De forma equivalente,

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t g(\bar{t})f(t - \bar{t}) d\bar{t} \right] = F(s)G(s). \quad (13.2.11)$$

La convolución de dos funciones ha sido ya introducida previamente (véase la Sección 9.5), aunque allí se consideraba en una forma ligeramente distinta,

$$g * f \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \bar{t})g(\bar{t}) d\bar{t}.$$

Sin embargo, en el contexto de la transformada de Laplace, las dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ son cero para $t < 0$, por lo que se obtiene (13.2.10) a partir de esta última expresión, pues $f(t - \bar{t}) = 0$ para $\bar{t} > t$ y $g(\bar{t}) = 0$ para $\bar{t} < 0$.

Transformada de Laplace de la delta de Dirac. Para demostrar el teorema de convolución, podemos usar la transformada de Laplace de la delta de Dirac:

$$\mathcal{L}[\delta(t - b)] = \int_0^{\infty} \delta(t - b)e^{-st} dt = e^{-sb}, \quad (13.2.12)$$

con $b > 0$. Por tanto, la transformada inversa de Laplace de una exponencial es una delta de Dirac:

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-sb}] = \delta(t - b). \quad (13.2.13)$$

Tomando límite para $b \rightarrow 0$, obtenemos también

$$\mathcal{L}[\delta(t - 0)] = 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^{-1}[1] = \delta(t - 0). \quad (13.2.14)$$

Deducción del teorema de convolución. Consideremos dos funciones $F(s)$ y $G(s)$, sus transformadas inversas de Laplace, $f(t)$ y $g(t)$, y el producto $F(s)G(s)$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (13.2.15)$$

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt, \quad (13.2.16)$$

$$F(s)G(s) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\bar{t})g(T)e^{-s(\bar{t}+T)} dT d\bar{t}. \quad (13.2.17)$$

Sea $h(t)$ la transformada inversa de este producto, que es la que queremos calcular:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\bar{t})g(T)\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-s(\bar{t}+T)}\right] d\bar{t} dT.$$

En la fórmula para $h(t)$ hemos utilizado la linealidad de la transformada de Laplace (y de su inversa). Como la transformada inversa de una exponencial es una delta de Dirac, obtenemos

$$h(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\bar{t})g(T)\delta[t - (\bar{t} + T)] d\bar{t} dT.$$

Integrando en la variable T , la delta de Dirac produce una contribución sólo en el punto $T = t - \bar{t}$, por lo que por la definición de la delta de Dirac, la integral es

$$h(t) = \int_0^t f(\bar{t})g(t - \bar{t}) d\bar{t},$$

que es el teorema de convolución para la transformada de Laplace. Poniendo $t - \bar{t} = w$, obtenemos también la conmutatividad de convolución, $g * f = f * g$.

Ejemplo. Vamos a determinar, mediante el teorema de convolución, la función cuya transformada de Laplace es $3/[s(s^2 + 4)]$. Ponemos

$$F(s) = \frac{3}{s} \quad (\text{es decir } f(t) = 3) \quad \text{y} \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + 4} \quad (\text{es decir } g(t) = \frac{1}{2} \text{sen } 2t).$$

Por el teorema de convolución, la transformada inversa de $(3/s) \cdot [1/(s^2 + 4)]$ es $\int_0^t f(t - \bar{t})g(\bar{t}) d\bar{t}$, que queda

$$\int_0^t 3 \cdot \frac{1}{2} \text{sen } 2\bar{t} d\bar{t} = -\frac{3}{4} \cos 2\bar{t} \Big|_0^t = \frac{3}{4}(1 - \cos 2t),$$

cuyo resultado coincide con el obtenido previamente mediante descomposición en fracciones simples.

EJERCICIOS 13.2

13.2.1. Usando la definición de transformada de Laplace (es decir, integrando explícitamente), determinar la transformada de Laplace de las funciones siguientes:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| (a) 1, | (b) e^{at} , |
| (c) $\text{sen } \omega t$, | (d) $\text{cos } \omega t$, |
| (e) $\text{senh } at$, | (f) $\text{cosh } at$, |
| (g) $H(t - t_0), t_0 > 0$. | |

Indicaciones: $\text{sen } \omega t = \text{Im}(e^{i\omega t})$, $\text{cos } \omega t = \text{Re}(e^{i\omega t})$.

13.2.2. Mediante la función gamma $\Gamma(x)$ definida en el Ejercicio 9.4.14, demostrar que $\mathcal{L}[t^n] = \Gamma(n + 1)/s^{n+1}$, para $n > -1$. ¿Por qué la fórmula no es válida si $n \leq -1$?

13.2.3. Demostrar las siguientes propiedades fundamentales de la transformada de Laplace:

- | |
|--|
| (a) $\mathcal{L}[-tf(t)] = dF/ds$, |
| (b) $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s - a)$, |
| (c) $\mathcal{L}[H(t - b)f(t - b)] = e^{-bs}F(s)$ ($b > 0$). |

***13.2.4.** Usando la Tabla 13.2.1, determinar la transformada de Laplace de $\int_0^t f(\bar{t}) d\bar{t}$ en términos de $F(s)$.

13.2.5. Usando la Tabla 13.2.1, determinar la transformada de Laplace de las funciones siguientes:

- | | |
|---------------------------------|--|
| (a) $t^3 e^{-2t}$. | * (b) $t \text{sen } 4t$. |
| (c) $H(t - 3)$. | * (d) $e^{3t} \text{sen } 4t$. |
| (e) $te^{-4t} \text{cos } 6t$. | * (f) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 5, \\ t^2, & 5 < t < 8, \\ 0, & 8 < t. \end{cases}$ |
| (g) $t^2 H(t - 1)$. | * (h) $(t - 1)^4 H(t - 1)$. |

13.2.6. Usando la Tabla 13.2.1, determinar la transformada inversa de Laplace de

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) $\frac{1}{s^2 + 4}$. | (b) $\frac{e^{-3s}}{s^2 - 4}$. |
| (c) s^{-3} . | (d) $(s - 4)^{-7}$. |
| * (e) $\frac{s}{s^2 + 8s + 7}$. | (f) $\frac{2s + 1}{s^2 - 4s + 9}$. |
| (g) $\frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$. | (h) $\frac{s}{s^2 - 4s - 5}$. |

$$(i) \frac{s}{s^2-4s-5}(1-4e^{-7s}), \quad * (j) \frac{s+2}{s(s^2+9)}(1-5e^{-4s}).$$

$$(k) \frac{1}{(s+1)^2}, \quad (l) \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

13.2.7. Resolver, usando la transformada de Laplace, los siguientes problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(a) \frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + y = t^3, \text{ con } y(0) = 7 \text{ y } \frac{dy}{dt}(0) = 5.$$

$$*(b) \frac{dy}{dt} + y = 1, \text{ con } y(0) = 2.$$

$$(c) \frac{dy}{dt} + 3y = \begin{cases} 4e^{-t}, & t < 8, \\ 2, & t > 8. \end{cases}, \text{ con } y(0) = 1.$$

$$*(d) \frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} - 6y = \begin{cases} 0, & 0 < t < 3, \\ e^{-t}, & t > 3, \end{cases} \text{ con } y(0) = 3 \text{ y } \frac{dy}{dt}(0) = 7.$$

$$(e) \frac{d^2y}{dt^2} + y = \cos t, \text{ con } y(0) = 0 \text{ y } \frac{dy}{dt}(0) = 0.$$

$$*(f) \frac{d^2y}{dt^2} + 4y = \sin t, \text{ con } y(0) = 0 \text{ y } \frac{dy}{dt}(0) = 0.$$

13.2.8. Demostrar el teorema de convolución para la transformada de Laplace sin usar la delta de Dirac. *Indicación:* introducir la variable $z = \bar{t} + T$ a la hora de evaluar la integral doble (13.2.17).

13.2.9. En este problema vamos a calcular

$$I = \mathcal{L}\{t^{-3/2}e^{-a^2/4t}\} \quad \text{y} \quad J = \mathcal{L}\{t^{-1/2}e^{-a^2/4t}\}.$$

- Determinar una relación entre I y J utilizando el cambio de variable $u = s^{1/2}t^{1/2} - (a/2)t^{-1/2}$ en la fórmula $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.
- Determinar una relación entre I y J utilizando el cambio de variable $sw = (a^2/4)t^{-1}$ en la definición de I .
- Deducir que $I = (2\sqrt{\pi}/a)e^{-a\sqrt{s}}$ y $J = (\sqrt{\pi/s})e^{-a\sqrt{s}}$, usando los apartados (a) y (b).

13.3. Función de Green para problemas de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias

El teorema de convolución es muy útil a la hora de resolver problemas no homogéneos. Por ejemplo, consideremos el problema

$$\alpha \frac{d^2y}{dt^2} + \beta \frac{dy}{dt} + \gamma y = f(t), \quad (13.3.1)$$

con datos iniciales triviales³,

$$y(0) = 0, \quad (13.3.2)$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = 0. \quad (13.3.3)$$

Tomando la transformada de Laplace de la Ecuación (13.3.1), se tiene

$$(\alpha s^2 + \beta s + \gamma)Y(s) = F(s), \quad \text{es decir} \quad Y(s) = F(s) \cdot \frac{1}{\alpha s^2 + \beta s + \gamma}, \quad (13.3.4)$$

donde $Y(s)$ y $F(s)$ son las transformadas de Laplace de $y(t)$ y $f(t)$, respectivamente. Usando el teorema de convolución, se puede obtener la siguiente expresión de la solución $y(t)$,

$$y(t) = \int_0^t f(t_0)q(t-t_0) dt_0, \quad (13.3.5)$$

donde $q(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $1/(\alpha s^2 + \beta s + \gamma)$. Ésta se puede determinar a partir de la Tabla 13.2.1 y/o mediante fracciones simples. El resultado de evaluar (13.3.5) es equivalente a la solución del problema no homogéneo obtenido por el método de variación de los parámetros, tal y como aparece en la mayoría de los textos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Existe una interpretación alternativa de este resultado. La función $q(t)$ es la solución de (13.3.1) en el caso $F(s) = 1$. Como la transformada inversa de Laplace de $F(s) = 1$ es $f(t) = \delta(t-0)$ [véase (13.2.14)], se sigue que $q(t)$ es la respuesta debida a un impulso producido en $t = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d^2 q}{dt^2} + \beta \frac{dq}{dt} + \gamma q &= \delta(t-0), \\ q(0) &= 0, \\ \frac{dq}{dt}(0) &= 0. \end{aligned} \quad (13.3.6)$$

Si introducimos la terminología usada en los Capítulos 9 y 10, llamaremos a $q(t)$ la **función de Green para el problema de valores iniciales**, es decir, la respuesta en el tiempo t debida a una fuente concentrada en el tiempo $t = 0$,

$$q(t) = G(t, 0).$$

En el teorema de convolución aparece el término $q(t-t_0)$:

$$q(t-t_0) = G(t-t_0, 0).$$

Sin embargo, como el problema (13.3.6) tiene coeficientes constantes, la **respuesta en t debida a un impulso en t_0** , $G(t, t_0)$, es la misma que la respuesta a un impulso producido en $t = 0$ si el lapso de tiempo transcurrido es el mismo, es decir,

$$G(t, t_0) = G(t-t_0, 0), \quad (13.3.7)$$

³Si los datos iniciales no son triviales, la solución se puede obtener sumando una solución apropiada del problema homogéneo asociado.

que es la **propiedad de traslación** de la función de Green. Así,

$$q(t - t_0) = G(t, t_0).$$

Esto implica que (13.3.5) se puede escribir como

$$y(t) = \int_0^t f(t_0)G(t, t_0) dt_0, \quad (13.3.8)$$

que es una representación de la solución del problema no homogéneo de valores iniciales (13.3.1) - (13.3.3) en términos de la función de Green, obtenida ésta mediante la transformada de Laplace. La solución es una suma (superposición) de todas las fuentes que actúan antes del tiempo considerado t , lo que ilustra el **principio de causalidad** para el problema de valores iniciales asociado a una ecuación diferencial ordinaria. Escrito en estos términos, el resultado es el análogo a los resultados obtenidos en capítulos precedentes relativos a la función de Green para problemas de contorno y de valores iniciales asociados a ecuaciones ordinarias y en derivadas parciales. Aquí, la función de Green $h(t) = G(t, 0)$ no es más que la transformada inversa de Laplace de la función $1/(\alpha s^2 + \beta s + \gamma)$.

Ejemplo. Consideremos la ecuación diferencial

$$\alpha^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - \gamma^2 y = f(t). \quad (13.3.9)$$

Si imponemos datos iniciales nulos, la solución es

$$y(t) = \int_0^t f(t_0)G(t, t_0) dt_0,$$

donde la función de Green $G(t, t_0)$ verifica $q(t - t_0) = G(t, t_0)$. La transformada de Laplace de $q(t)$ es

$$\mathcal{L}[q(t)] = \frac{1}{\alpha^2 s^2 - \gamma^2} = \frac{1}{\alpha^2 (s^2 - \gamma^2/\alpha^2)},$$

por lo que, usando la Tabla 13.2.1, obtenemos la función de Green $G(t, 0)$,

$$G(t, 0) = q(t) = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\alpha}{\gamma} \sinh \frac{\gamma}{\alpha} t.$$

La solución de (13.3.9) es, entonces,

$$y(t) = \frac{1}{\alpha \gamma} \int_0^t f(t_0) \sinh \frac{\gamma}{\alpha} (t - t_0) dt_0, \quad (13.3.10)$$

que verifica $y(0) = 0$ y $dy/dt(0) = 0$.

EJERCICIOS 13.3

13.3.1. Usando la transformada de Laplace, determinar el efecto de los datos iniciales en términos de la función de Green para el problema

$$\alpha \frac{d^2 y}{dt^2} + \beta \frac{dy}{dt} + \gamma y = 0,$$

$$\text{con } y(0) = y_0 \text{ y } \frac{dy}{dt}(0) = v_0.$$

***13.3.2.** Calcular la función de Green para el problema

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = f(t)$$

$$\text{con } y(0) = 0 \text{ y } \frac{dy}{dt}(0) = 0. \text{ Calcular la solución } y(t).$$

13.3.3. (a) Rehacer el Ejercicio 8.3.25(a).

(b) Rehacer el Ejercicio 8.3.25(b).

13.3.4. Demostrar que la función $G(t, t_0)$ definida para el problema (13.3.1) - (13.3.3) verifica para $t > t_0$,

$$\alpha \frac{d^2 G}{dt^2} + \beta \frac{dG}{dt} + \gamma G = 0$$

$$\text{con } G(t_0, t_0) = 0 \text{ y } \frac{dG}{dt}(t_0, t_0) = \frac{1}{\alpha}.$$

13.3.5. Rehacer el Ejercicio 13.3.2 usando el Ejercicio 13.3.4.

13.4. Un ejemplo elemental para la ecuación de ondas

El uso de la transformada de Laplace para resolver ecuaciones en derivadas parciales requiere a menudo grandes dosis de ingenio. Presentaremos aquí, únicamente, ejemplos relativamente simples⁴. Consideremos una cuerda semiinfinita ($x > 0$), cuyo movimiento está causado por el efecto de una única fuerza en el extremo izquierdo $x = 0$, donde imponemos una condición de contorno dependiente del tiempo.

$$\text{EDP : } \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \quad (13.4.1)$$

$$\text{CC : } \boxed{u(0, t) = f(t)}, \quad (13.4.2)$$

⁴Se puede encontrar ejemplos más complicados en Churchill [1972] y Weinberger [1965].

$$\text{CI : } \boxed{\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0. \end{aligned}} \quad (13.4.3)$$

La cuerda se encuentra inicialmente en reposo en posición horizontal. El extremo izquierdo se mueve en sentido vertical (manteniendo la tensión total). Necesitamos otra condición de contorno en el “extremo derecho”, es decir, para $x \rightarrow \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0. \quad (13.4.4)$$

Como las condiciones iniciales son cero, se espera que el uso de la transformada de Laplace produzca una expresión sencilla de la solución:

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \bar{U}(x, s) = \int_0^{\infty} u(x, t)e^{-st} dt.$$

Al igual que en los ejemplos de ecuaciones ordinarias, tomamos la transformada de Laplace de la Ecuación (13.4.1).

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = s^2 \mathcal{L}[u] - su(x, 0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = s^2 \mathcal{L}[u]. \quad (13.4.5)$$

La transformada de Laplace de las derivadas respecto de x se pueden calcular observando que

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} u(x, t)e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}[u]. \quad (13.4.6)$$

Obtenemos así una ecuación diferencial “ordinaria”

$$s^2 \bar{U}(x, s) = c^2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2}, \quad (13.4.7)$$

definida en el conjunto $0 < x < \infty$. En $x = 0$, la solución $u(x, t)$ viene dada por la función $f(t)$, por lo que su transformada de Laplace produce el primer dato de frontera necesario para la Ecuación (13.4.7),

$$\bar{U}(0, s) = \int_0^{\infty} u(0, t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s), \quad (13.4.8)$$

donde $F(s)$ es la transformada de Laplace de la condición de contorno. Por otro lado, como $u(x, t) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$ (para cada t fijo), tenemos la misma propiedad para su transformada de Laplace,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{U}(x, s) = 0, \quad (13.4.9)$$

el segundo dato de frontera.

La solución general de (13.4.7) es

$$\bar{U}(x, s) = A(s)e^{-(s/c)x} + B(s)e^{(s/c)x},$$

donde $A(s)$ y $B(s)$ son funciones arbitrarias de la variable s . La condición de decaimiento para $x \rightarrow \infty$, (13.4.9), implica $B(s) = 0$ para $s > 0$ [más precisamente para $\text{Re}(s) > 0$]. La condición en $x = 0$, (13.4.8), nos da $A(s) = F(s)$, con lo que

$$\bar{U}(x, s) = F(s)e^{-(s/c)x}. \quad (13.4.10)$$

Para calcular la transformada inversa de esta función usamos el teorema de la convolución. Antes de ello, una mirada rápida a la Tabla 13.2.1 nos dice que la presencia de una exponencial en la transformada produce una traslación en la solución. Esto implica

$$u(x, t) = H\left(t - \frac{x}{c}\right) f\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad (13.4.11)$$

donde H es la función de Heaviside. La solución es cero para $x > ct$. De hecho, la solución es constante para cada valor constante de $x - ct$. La solución viaja como una onda con forma fija a una velocidad c . Un resultado similar fue obtenido en el Capítulo 12, usando el método de las características. La Figura 13.4.1 ilustra esta propiedad en un diagrama espacio-tiempo. La señal se propaga con una velocidad c , y así, en un tiempo t ha viajado sólo hasta una distancia ct . Si $x > ct$, la cuerda no ha notado todavía el movimiento en $x = 0$.

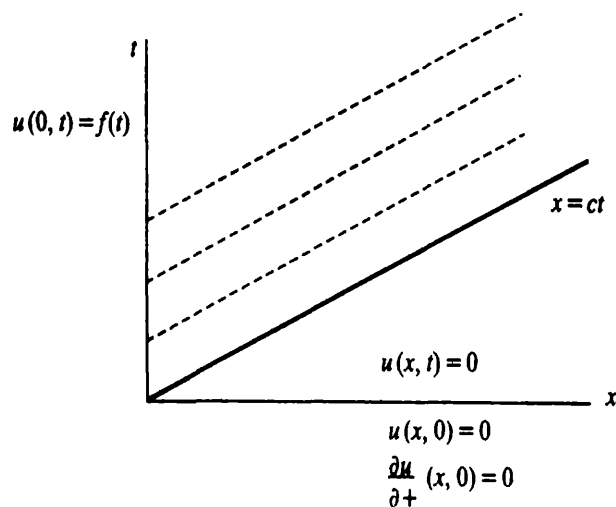


Figura 13.4.1: El problema de la propagación de una señal en una dimensión.

Es, por otro lado, instructivo obtener el mismo resultado mediante el teorema de la convolución. Como $\bar{U}(x, s) = F(s)e^{-(s/c)x}$,

$$u(x, t) = \int_0^t f(t_0)g(t - t_0) dt_0,$$

donde $e^{-(s/c)x}$ es la transformada de Laplace de $g(t)$. Usando la Tabla 13.2.1, vemos que $g(t) = \delta(t - x/c)$. Entonces

$$u(x, t) = \int_0^t f(t_0) \delta\left(t - t_0 - \frac{x}{c}\right) dt_0 = \begin{cases} 0, & t < x/c, \\ f(t - x/c), & t > x/c, \end{cases}$$

que es equivalente a (13.4.11).

EJERCICIOS 13.4

13.4.1. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con las condiciones $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = f(t)$, $u(x, 0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$.

13.4.2. Resolver el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= c \frac{\partial w}{\partial x}, & c > 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ w(0, t) &= f(t), \\ w(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

*13.4.3. Resolver el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) &= \text{sen } x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

*13.4.4. Considérese el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= f(t). \end{aligned}$$

Determinar la transformada de Laplace de la solución $u(x, t)$. Calcular la transformada inversa para obtener $u(x, t)$. *Indicación:* consultar una tabla de transformadas.

13.4.5. Rehacer el Ejercicio 13.4.4 si las condiciones inicial y de contorno son

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = f(t).$$

13.4.6. Rehacer el Ejercicio 13.4.4, si $f(t) = Ae^{i\sigma_0 t}$ (véase el Ejercicio 10.5.17).

- (a) Determinar una expresión para $u(x, t)$ usando transformada de Laplace.
 (b) Simplificar el apartado (a) mediante el cambio de variables $w = x/2\sqrt{t - \bar{t}}$, donde \bar{t} es la variable de integración en el apartado (a).
 (c) Aproximar la solución $u(x, t)$ para t grande.

13.5. Propagación de una señal en una cuerda de longitud finita

Cuando se aplica la transformada de Laplace a las ecuaciones en derivadas parciales, es frecuente que las funciones a las que hay que calcular la transformada inversa no sean tan sencillas como en la Sección 13.4. Un ejemplo de este hecho aparece al considerar la vibración de una cuerda de longitud finita. Sea entonces una cuerda de longitud L , que se encuentra inicialmente en reposo en posición horizontal, sometida a una fuerza dependiente del tiempo en el extremo $x = L$:

$$\text{EDP : } \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}, \quad (13.5.1)$$

$$\text{CC : } \boxed{\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(L, t) &= b(t), \end{aligned}} \quad (13.5.2)$$

$$\text{CI : } \boxed{\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0. \end{aligned}} \quad (13.5.3)$$

El hecho de que las condiciones iniciales sean ambas nulas facilita la aplicación de la transformada de Laplace en t de $u(x, t)$:

$$\bar{U}(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt. \quad (13.5.4)$$

Transformando (13.5.1), tenemos que $\bar{U}(x, s)$ es solución de una ecuación ordinaria

$$s^2 \bar{U} = c^2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2}, \quad (13.5.5)$$

sujeta a las condiciones de contorno

$$\bar{U}(0, s) = 0, \quad (13.5.6)$$

$$\bar{U}(L, s) = B(s), \quad (13.5.7)$$

donde $B(s)$ es la transformada de Laplace de $b(t)$. La solución de esta ecuación es:

$$\bar{U}(x, s) = B(s) \frac{\sinh(s/c)x}{\sinh(s/c)L}, \tag{13.5.8}$$

y, por tanto, el teorema de convolución implica

$$u(x, t) = \int_0^t b(t_0) f(t - t_0) dt_0, \tag{13.5.9}$$

donde $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{\sinh(s/c)x}{\sinh(s/c)L}. \tag{13.5.10}$$

La obtención de esta transformada inversa no es inmediata. La aparición de exponenciales en esta función,

$$\frac{\sinh(s/c)x}{\sinh(s/c)L} = \frac{e^{(s/c)x} - e^{-(s/c)x}}{e^{(s/c)L} - e^{-(s/c)L}} = \frac{e^{(s/c)x} - e^{-(s/c)x}}{e^{(s/c)L}(1 - e^{-(2s/c)L})},$$

nos lleva a intentar usar la Tabla 13.2.1 y las propiedades de las exponenciales. Sin embargo, el denominador dificulta este trabajo. En su lugar, desarrollamos el cociente mediante una serie geométrica, basándonos en el desarrollo $1/(1 - x) = 1 + x + x^2 + \dots$, si $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{e^{(s/c)x} - e^{-(s/c)x}}{e^{(s/c)L}(1 - e^{-(2s/c)L})} \\ &= e^{-(s/c)L} (e^{(s/c)x} - e^{-(s/c)x}) (1 + e^{-(2L/c)s} + e^{-(4L/c)s} + \dots) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \exp \left[-s \left(\frac{2nL - x + L}{c} \right) \right] - \exp \left[-s \left(\frac{2nL + x + L}{c} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{13.5.11}$$

Todas estas exponenciales son decrecientes, pues $x < L$, y por tanto podemos invertir las usando la Fórmula (13.2.2n) de la Tabla 13.2.1. La transformada de Laplace es una combinación lineal de las funciones

$$\exp \left[-s \left(\frac{2nL \pm x + L}{c} \right) \right] \quad (n \geq 0).$$

La transformada inversa de Laplace de $F(s)$ es, entonces, una combinación lineal de deltas de Dirac, $\delta[t - (2nL \pm x + L)/c]$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\delta \left(t - \frac{2nL - x + L}{c} \right) - \delta \left(t - \frac{2nL + x + L}{c} \right) \right].$$

Como $f(t - t_0)$ en (13.5.9) es la influencia de la condición de contorno, cada sumando representa una señal en un tiempo $(2nL \pm x + L)/c$, transcurrido después del

instante t_0 de la señal. La interpretación física es una suma de señales y sus reflejadas en las fronteras $x_0 = 0$ y $x_0 = L$. La condición de contorno no homogénea se impone en el extremo $x_0 = L$, por lo que podemos imaginar las señales originándose en ese punto (para $t = t_0$). La señal se propaga a cada punto de diversas maneras, como puede verse en la Figura 13.5.1. La señal directa debe viajar una distancia $L - x$, a una velocidad c , dando lugar al tiempo de retraso $(L - x)/c$ (correspondiente a $n = 0$). También llega a x una señal adicional producida por un número entero de circuitos completos, que dan lugar a una distancia recorrida $2Ln$. Los otros términos corresponden a ondas que se reflejan en la pared $x_0 = 0$ antes de afectar a x . En ese caso, la distancia total recorrida es $L + x + 2nL$ ($n \geq 0$). Los detalles se dejan para los ejercicios.

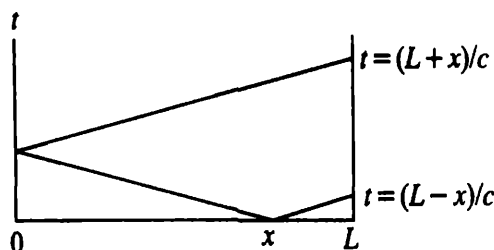


Figura 13.5.1: Recorridos, en el espacio-tiempo, de la señal.

El uso de la transformada de Laplace (y de la inversión que hemos descrito en esta sección) da lugar a una representación de la solución mediante una sucesión infinita de ondas reflejadas. Resultados similares se habían obtenido ya en el Capítulo 12 por el método de las características o (en algunos casos) por el método de las imágenes (sucesiones de funciones de Green en toda la recta).

En las secciones siguientes describiremos, de forma alternativa, el uso de integrales de contorno en el plano complejo para obtener transformadas inversas. Por este método la expresión final de la solución será significativamente diferente a la obtenida por otros métodos.

EJERCICIOS 13.5

13.5.1. Considérese el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) &= f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

Resolverlo en los siguientes casos usando la transformada de Laplace:

- (a) $g(x) = 0$,
- (b) $f(x) = 0$.

13.5.2. (a) Usando los resultados de esta sección, invertir (13.5.8) mediante el teorema de convolución. Calcular $u(x, t)$.

- (b) Determinar la solución $u(x, t)$ a partir de (13.5.8) y (13.5.11), sin usar el teorema de convolución.

***13.5.3.** Resolver mediante el uso de la transformada de Laplace el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, & u(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= b(t), & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

13.5.4. Rehacer el Ejercicio 13.5.3, si los datos iniciales son ahora

- (a) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ y $u(L, t) = b(t)$,
 (b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = b(t)$.

13.5.5. Resolver mediante el uso de la transformada de Laplace el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x).$$

Indicación: consultar una tabla de transformadas.

13.5.6. Resolver, usando la transformada de Laplace, la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

sujeta a las condiciones $u(x, 0) = f(x)$, $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$. ¿Qué otros métodos se pueden aplicar para obtener la misma representación de la solución?

13.6. La ecuación de ondas y su función de Green

La transformada de Laplace puede usarse también para establecer una relación entre la solución de una ecuación en derivadas parciales no homogénea y la correspondiente función de Green. Consideremos la ecuación de ondas en un intervalo acotado ($0 < x < L$) con una fuente y unos datos de contorno dependientes del tiempo,

$$\text{EDP : } \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x, t)}, \quad (13.6.1)$$

$$\text{CC : } \begin{array}{l} u(0, t) = a(t), \\ u(L, t) = b(t), \end{array} \quad (13.6.2)$$

$$\text{CI : } \begin{array}{l} u(x, 0) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \end{array} \quad (13.6.3)$$

Función de Green. La función de Green $G(x, t; x_0, t_0)$ verifica el problema

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \delta(x - x_0)\delta(t - t_0), \quad (13.6.4)$$

$$G(0, t; x_0, t_0) = 0, \quad (13.6.5)$$

$$G(L, t; x_0, t_0) = 0, \quad (13.6.6)$$

sujeto al principio de causalidad

$$G(x, t; x_0, t_0) = 0, \quad \text{para } t < t_0. \quad (13.6.7)$$

Transformada de Laplace de la función de Green. En esta sección determinaremos la función de Green mediante la transformada de Laplace. Transformando (13.6.4) - (13.6.6) obtenemos el siguiente problema:

$$s^2 \bar{G} = c^2 \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} + \delta(x - x_0)e^{-st_0}, \quad (13.6.8)$$

$$\bar{G}(0, s; x_0, t_0) = 0, \quad (13.6.9)$$

$$\bar{G}(L, s; x_0, t_0) = 0, \quad (13.6.10)$$

donde $\bar{G}(x, s; x_0, t_0)$ es la transformada de Laplace respecto del tiempo de $G(x, t; x_0, t_0)$. Observemos que la ecuación transformada queda simplificada por el principio de causalidad, pues éste implica que G toma datos iniciales cero (si $t_0 > 0$).

La Ecuación (13.6.8) es una ecuación diferencial ordinaria, del tipo de ecuaciones que nos hemos encontrado ya a la hora de hallar funciones de Green independientes del tiempo. Las condiciones de contorno implican que $\bar{G}(x, s; x_0, t_0)$ debe ser un múltiplo de $\sinh(sx/c)$ para $x < x_0$ y un múltiplo de $\sinh(s(L-x)/c)$ para $x > x_0$. Como además G es simétrica, tenemos que

$$\bar{G}(x, s; x_0, t_0) = \begin{cases} \gamma \sinh \frac{s}{c}(L - x_0) \sinh \frac{s}{c}x, & x < x_0, \\ \gamma \sinh \frac{s}{c}x_0 \sinh \frac{s}{c}(L - x), & x > x_0, \end{cases} \quad (13.6.11)$$

donde γ es una constante (independiente de x y x_0). De esta manera, tenemos garantizada la continuidad de \bar{G} en $x = x_0$. La constante γ quedará determinada

por la condición adicional de salto,

$$0 = c^2 \frac{d\bar{G}}{dx} \Big|_{x_0^-}^{x_0^+} + e^{-st_0},$$

es decir,

$$0 = -c^2 \gamma \frac{s}{c} \left[\sinh \frac{s}{c} x_0 \cosh \frac{s}{c} (L - x_0) + \sinh \frac{s}{c} (L - x_0) \cosh \frac{s}{c} x_0 \right] + e^{-st_0}.$$

Utilizando la fórmula $\sinh(a + b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$, tenemos

$$\gamma = \frac{e^{-st_0}}{cs \sinh(sL/c)}. \quad (13.6.12)$$

Representación de la solución en términos de la función de Green.

La función de Green quedará determinada si invertimos (13.6.11) con el valor dado en (13.6.12), véase el Ejercicio 13.6.2. Sin embargo, antes de calcular explícitamente G usaremos las propiedades de la transformada de Laplace para expresar la solución en términos de la función de Green. Para simplificar, consideremos el caso estudiado en la Sección 13.5, en el que el único término no homogéneo es el dato frontera en $x = L$, es decir, $q(x, t) = 0$, $a(t) = 0$, $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$. En la sección anterior vimos que la transformada de Laplace de la solución era

$$\bar{U}(x, s) = B(s) \frac{\sinh(sx/c)}{\sinh(sL/c)}. \quad (13.6.13)$$

Queremos relacionar esta fórmula con la transformada de Laplace de la función de Green (13.6.11). Como la fuente está concentrada en $x_0 = L$, necesitamos tener definida \bar{G} para $x < x_0$:

$$\bar{G}(x, s; x_0, t_0) = \frac{e^{-st_0} \sinh(s(L - x_0)/c) \sinh(sx/c)}{cs \sinh(sL/c)}. \quad (13.6.14)$$

Para comparar esta expresión con (13.6.13), derivamos respecto a x_0 :

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_0}(x, s; x_0, t_0) = -\frac{e^{-st_0} \cosh(s(L - x_0)/c) \sinh(sx/c)}{c^2 \sinh(sL/c)}.$$

Observemos que en $x_0 = L$ y $t_0 = 0$ se tiene

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_0}(x, s; L, 0) = -\frac{\sinh(sx/c)}{c^2 \sinh(sL/c)}, \quad (13.6.15)$$

un término que reconocemos en (13.6.13). Por tanto,

$$\bar{U}(x, s) = -c^2 B(s) \frac{\partial \bar{G}}{\partial x_0}(x, s; L, 0).$$

Usando el teorema de convolución obtenemos

$$u(x, t) = -c^2 \int_0^t b(t_0) \frac{\partial G}{\partial x_0}(x, t - t_0; L, 0) dt_0,$$

o lo que es lo mismo,

$$u(x, t) = -c^2 \int_0^t b(t_0) \frac{\partial G}{\partial x_0}(x, t; L, t_0) dt_0, \quad (13.6.16)$$

donde hemos utilizado la invariancia de la función de Green bajo traslaciones en el tiempo. La Ecuación (13.6.16), obtenida mediante transformada de Laplace, es equivalente a la fórmula de representación dada por (11.2.24), deducida a partir de la fórmula de Green para el caso especial $q(x, t) = 0$, $a(t) = 0$, $f(x) = 0$ y $g(x) = 0$. El caso general (11.2.24) se puede deducir de la misma forma.

EJERCICIOS 13.6

13.6.1. (a) Determinar la transformada de Laplace de la solución $u(x, t)$ del problema (13.6.1) y (13.6.3).

(b) Representar $u(x, t)$ en términos de su función de Green, usando transformada de Laplace [es decir, usando (13.6.11) con (13.6.12)].

13.6.2. Determinar la función de Green invirtiendo (13.6.11). Comprobar que las señales se reflejan de manera apropiada.

13.6.3. Determinar la transformada de Laplace de la función de Green para la ecuación de ondas, si las condiciones de frontera son

$$(a) \quad u(0, t) = a(t) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = b(t).$$

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = a(t) \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = b(t).$$

13.6.4. Considérese el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x, t), & x > 0, \\ & & t > 0, \\ u(0, t) &= h(t), \\ u(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

*** (a)** Determinar la transformada de Laplace de la función de Green para este problema.

(b) Determinar $\bar{U}(x, s)$, si $f(x) = 0$ y $q(x, t) = 0$ (véase el Ejercicio 13.4.4).

- (c) Comparando los apartados (a) y (b), obtener una representación de $u(x, t)$ en términos de la función de Green [si $f(x) = 0$ y $q(x, t) = 0$]. Comparar con (11.3.21).
- (d) Determinar la función de Green usando el apartado (a). *Indicación:* consúltese una tabla de transformadas.

13.6.5. Rehacer el Ejercicio 13.6.4 con los datos:

- (a) $h(t) = 0$ y $q(x, t) = 0$,
 (b) $h(t) = 0$ y $f(x) = 0$.

13.6.6. Rehacer el Ejercicio 13.6.4, si la condición frontera es

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = h(t).$$

Considerar sólo el caso $f(x) = 0$ y $q(x, t) = 0$.

13.7. Transformada inversa de Laplace como integral compleja

Sólo en ocasiones se puede calcular la transformada inversa de Laplace consultando una tabla breve de transformadas. Por otro lado, una de las propiedades más importantes de la transformada de Laplace es que se puede invertir mediante integración compleja, calculando integrales de contorno en el plano complejo. Veremos cómo evaluar estas integrales usando la teoría de funciones de variable compleja.

Transformadas de Fourier y Laplace. Primero, vamos a mostrar que la transformada de Laplace se puede considerar como un caso particular de transformada de Fourier. Sea $g(x)$ una función y $G(\omega)$ su transformada de Fourier:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\omega x} dx. \quad (13.7.1)$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega x} d\omega. \quad (13.7.2)$$

Como es natural al considerar la transformada de Laplace, podemos suponer que $g(x)$ vale cero para $x < 0$. Además, si $g(x)$ decae suficientemente rápido para $x \rightarrow \infty$, existirá una constante $\gamma > 0$ y una función $f(x)$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2\pi f(x) e^{-\gamma x}, & x > 0. \end{cases} \quad (13.7.3)$$

En estos términos, el par (13.7.1) - (13.7.2) se convierte en

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-(i\omega + \gamma)x} dx, \\ 2\pi f(x) e^{-\gamma x} &= \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega x} d\omega \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Si definimos ahora el cambio de variables

$$s = \gamma - i\omega \quad (ds = -i d\omega)$$

y

$$F(s) \equiv G(\omega) = G\left(\frac{s - \gamma}{-i}\right), \quad (13.7.4)$$

entonces, escribiendo la letra t en lugar de x ($x = t$), como es costumbre a la hora de utilizar la transformada de Laplace, tenemos

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (13.7.5)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s)e^{st} ds. \quad (t > 0). \quad (13.7.6)$$

La Ecuación (13.7.5) muestra que $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$. Por otro lado, $F(s)$ es también la transformada de Fourier de

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 2\pi f(t)e^{-\gamma t}, & t > 0. \end{cases}$$

Y lo que es más importante, dada la transformada de Laplace $F(s)$, (13.7.6) muestra cómo calcular su transformada inversa de Laplace. Esta fórmula involucra una integral en el plano complejo, como puede verse en la Figura 13.7.1. Usando la teoría de funciones de variable compleja, se puede ver que la integral se realiza en una recta que se encuentra a la derecha de todas las singularidades de $F(s)$. Además, el cálculo de la integral es independiente de γ . Todas las singularidades se encuentran en el “semiplano izquierdo”.

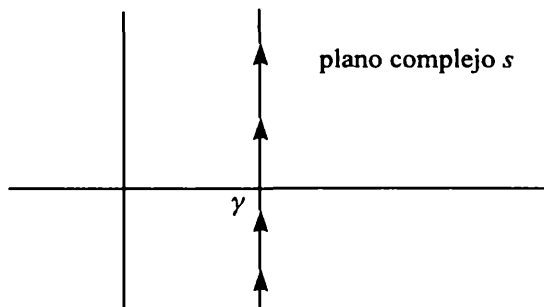


Figura 13.7.1: Para calcular la transformada inversa de Laplace hay que integrar sobre la recta $\text{Re}(s) = \gamma$ en el plano complejo.

Teorema de los residuos de Cauchy. Mostraremos aquí, de forma muy breve, cómo calcular integrales usando la teoría de funciones de variable compleja.

La herramienta principal será el **teorema de Cauchy**, que establece que si $g(s)$ es una función analítica (sin singularidades) en un recinto encerrado por una curva cerrada C , entonces la integral de línea a lo largo de C es cero:

$$\oint_C g(s) ds = 0. \tag{13.7.7}$$

Las integrales de línea a lo largo de curvas cerradas sólo pueden ser distintas de cero, debido a las singularidades de $g(s)$. El **teorema de los residuos** establece que la integral de línea (recorrida en sentido positivo, es decir, en sentido contrario a las agujas del reloj) puede evaluarse en términos de las contribuciones (llamadas **residuos**) de las singularidades s_n encerradas por la curva. Es decir,

$$\oint_C g(s) ds = 2\pi i \sum_n \text{res}(s_n). \tag{13.7.8}$$

Y este resultado es cierto si no hay puntos de ramificación, como pueden ser las singularidades provocadas por raíces cuadradas o logaritmos. El cálculo de los residuos es, a menudo, inmediato. Por ejemplo, si $g(s) = R(s)/Q(s)$ tiene polos simples en los ceros simples s_n de $Q(s)$ en la región encerrada por C , entonces

$$\text{res}(s_n) = \frac{R(s_n)}{Q'(s_n)}, \tag{13.7.9}$$

y, por tanto,

$$\oint_C g(s) ds = 2\pi i \sum_n \frac{R(s_n)}{Q'(s_n)}. \tag{13.7.10}$$

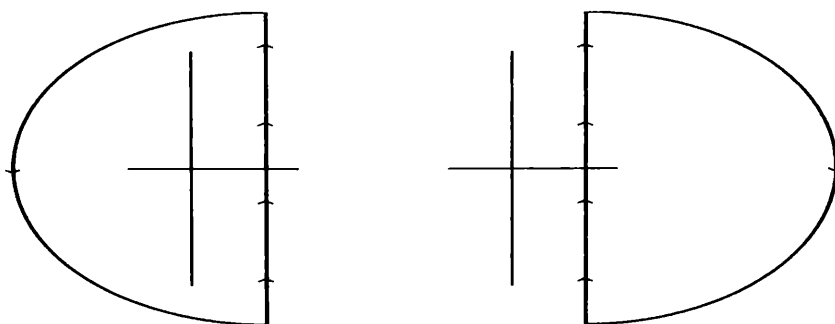


Figura 13.7.2: Cómo cerrar la recta de integración.

Integral de la transformada inversa de Laplace. La integral definida en (13.7.6) no es una integral a lo largo de una curva cerrada, sino una integral sobre una línea recta (con parte real constante igual a γ), a la derecha de las singularidades del integrando. Para poder utilizar los resultados que acabamos de describir, debemos “cerrar” la curva y para ello consideramos un semicírculo de radio grande y centro en el punto $(\gamma, 0)$. En principio, cualquiera de los dos semicírculos

que se muestran en la Figura 13.7.2 puede servir para nuestros propósitos. Haciendo que el radio tienda a infinito, el diámetro vertical del semicírculo, es decir, la parte recta de la curva cerrada, se aproximará a la recta de integración que debemos considerar. Queremos ver que la integral a lo largo de la parte circular de la curva tiende a cero cuando el radio tiende a infinito y, para ello, el integrando $F(s)e^{st}$ debe ser suficientemente pequeño. Como $F(s) \rightarrow 0$ para $s \rightarrow \infty$ [véase la Sección 13.2 o la Fórmula (13.7.5)], necesitamos que el término e^{st} se anule cuando el radio tiende a infinito. Si $t < 0$, el término e^{st} evaluado en el semicírculo decrece exponencialmente cuando crece el radio si y sólo si $\text{Re}(s) > 0$. Utilizamos entonces, para "cerrar" la línea de integración, en este caso el semicírculo de la derecha. Como no hay singularidades a la derecha de la recta, es decir, no hay singularidades encerradas por el semicírculo, y como la contribución a lo largo de la parte circular del mismo tiende a cero, concluimos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds = 0,$$

si $t < 0$; recordemos que para definir la transformada de Laplace consideramos siempre funciones que verifiquen $f(t) = 0$ para $t < 0$. Más importante es el cálculo de la integral (13.7.6) para $t > 0$. En este caso, e^{st} decrece exponencialmente en el semiplano izquierdo ($\text{Re}(s) < 0$). Por tanto, si $t > 0$, cerramos el contorno considerando el semicírculo izquierdo. La integral será ahora la suma de las contribuciones debidas a las singularidades del integrando, situadas en este semiplano. Así pues, si $t > 0$, la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ es

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint F(s)e^{st} ds = \sum_n \text{res}(s_n). \quad (13.7.11)$$

Esta fórmula es válida siempre que $F(s)$ no tenga puntos de ramificación. La suma incluye *todas* las singularidades, pues la recta considerada se encuentra a la derecha de todas ellas.

Polos simples. Si $F(s) = p(s)/q(s)$ [de manera que $g(s) = p(s)e^{st}/q(s)$] y si todas las singularidades de la transformada de Laplace $F(s)$ son polos simples [en los ceros simples de $q(s)$], entonces $\text{res}(s_n) = p(s_n)e^{s_n t}/q'(s_n)$ y, por tanto,

$$f(t) = \sum_n \frac{p(s_n)}{q'(s_n)} e^{s_n t}. \quad (13.7.12)$$

La Ecuación (13.7.12) es la misma que ya habíamos obtenido antes mediante descomposición en fracciones simples de $F(s)$, en el caso en que ésta es una función racional [es decir, si $p(s)$ y $q(s)$ son polinomios].

Ejemplo del cálculo de la transformada inversa de Laplace. Consideremos la función $F(s) = (s^2 + 2s + 4)/[s(s^2 + 1)]$. La transformada inversa es

$$f(t) = \sum_n \text{res}(s_n).$$

Los polos de $F(s)$ son los ceros de $s(s^2 + 1)$, es decir, $s = 0, \pm i$. Los residuos en estos polos simples son

$$\begin{aligned} \text{res}(0) &= 4e^{0t} = 4, \\ \text{res}(s_n = \pm i) &= \frac{s_n^2 + 2s_n + 4}{3s_n^2 + 1} e^{s_n t} = \frac{3 + 2s_n}{-2} e^{s_n t}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(t) &= 4 + \left(-\frac{3}{2} - i\right) e^{it} + \left(-\frac{3}{2} + i\right) e^{-it} = 4 - \frac{3}{2} \cdot 2 \cos t - i \cdot 2i \sin t \\ &= 4 - 3 \cos t + 2 \sin t, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la fórmula de Euler. En la próxima sección, aplicaremos estas ideas para obtener la transformada inversa de Laplace que se requiere en nuestras ecuaciones en derivadas parciales.

EJERCICIOS 13.7

13.7.1. Usar la teoría de la transformada inversa de Laplace para determinar $f(t)$ si su transformada de Laplace $F(s)$ es:

- (a) $1/(s - a)$,
- * (b) $1/(s^2 + 9)$,
- (c) $(s + 3)/(s^2 + 16)$.

13.7.2. El residuo en una singularidad s_0 de $f(s)$ es el coeficiente b_{-1} del término $1/(s - s_0)$ en el desarrollo de $f(s)$ cerca de $s = s_0$. En general, se tiene

$$f(s) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m (s - s_0)^m,$$

que se denomina **desarrollo en serie de Laurent**.

- (a) Para un polo simple, la menor potencia negativa es $m = -1$, es decir, $b_m = 0$ para todo $m < -1$. Demostrar en ese caso que

$$\text{res}(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) f(s).$$

- (b) Si s_0 es un polo simple y $f(s) = R(s)/Q(s)$ [con $Q(s_0) = 0$, $R(s_0) \neq 0$ y $dQ/ds(s_0) \neq 0$], demostrar que

$$\text{res}(s_0) = \frac{R(s_0)}{Q'(s_0)},$$

suponiendo que $R(s)$ y $Q(s)$ tienen ambos un desarrollo en serie de Taylor alrededor de s_0 .

- (c) Para un polo de orden M , la menor potencia negativa es $m = -M$, es decir, $b_m = 0$ para todo $m < -M$. Demostrar en ese caso que

$$\text{res}(s_0) = \frac{1}{(M-1)!} \frac{d^{M-1}}{ds^{M-1}} [(s-s_0)^M f(s)] \Big|_{s=s_0}. \quad (13.7.13)$$

- (d) Demostrar que en el apartado (c) se puede sustituir M en (13.7.13) por cualquier entero mayor que M .

13.7.3. Determinar $f(t)$ usando el Ejercicio 13.7.2 si su transformada de Laplace $F(s)$ es:

- (a) $1/s^3$,
 (b) $1/(s^2 + 4)^2$.

13.7.4. Si $|F(s)| < \alpha/r^2$ para $r \equiv |s|$ grande, demostrar que

$$\int_{C_R} F(s)e^{st} ds \rightarrow 0 \quad \text{para } r \rightarrow \infty, \text{ si } t > 0,$$

donde C_R es cualquier arco circular en el semiplano izquierdo ($\text{Re}(s) \leq 0$) [si se sustituye la condición sobre F por $|F(s)| < \alpha/r$, es más difícil llegar a la misma conclusión. Este último caso es equivalente al **lema de Jordan** de variable compleja].

13.8. Resolución de la ecuación de ondas mediante transformada de Laplace (con variable compleja)

En la Sección 13.6 hemos visto que el problema

$$\text{EDP : } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (13.8.1)$$

$$\text{CC : } \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = b(t), \end{cases} \quad (13.8.2)$$

$$\text{CI : } \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (13.8.3)$$

puede analizarse considerando la transformada de Laplace $\bar{U}(x, s)$ de $u(x, t)$. Obtuvimos la expresión de la solución en términos de la función de Green $u(x, t)$,

$$u(x, t) = -c^2 \int_0^t b(t_0) \frac{\partial G}{\partial x_0}(x, t; L, t_0) dt_0. \quad (13.8.4)$$

También calculamos la transformada de Laplace de esta función [véase (13.6.15)]:

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial x_0}(x, s; L, 0) = F(s) = -\frac{\sinh(xs/c)}{c^2 \sinh(Ls/c)}. \quad (13.8.5)$$

En esta sección, usaremos la forma compleja de la transformada inversa de Laplace para obtener

$$\frac{\partial G}{\partial x_0}(x, t; L, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} -\frac{\sinh(xs/c)}{c^2 \sinh(Ls/c)} e^{st} ds. \quad (13.8.6)$$

Las singularidades de $F(s)$ son los polos simples s_n , dados por los ceros del denominador,

$$\sinh \frac{L}{c} s_n = 0. \quad (13.8.7)$$

Sin embargo, $s = 0$ no es un polo, pues cerca de $s = 0$ la función F se comporta como $F(s) \approx -(x/c)s/[c^2(L/c)s] \neq \infty$. Tenemos entonces una sucesión de polos, localizados todos ellos en el eje imaginario:

$$\frac{L}{c} s_n = in\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (13.8.8)$$

Estos polos, $s_n = ic(n\pi/L)$, corresponden a los autovalores $\lambda = (n\pi/L)^2$, como se puede deducir de la propiedad de singularidad para la transformada de Laplace (véase la Sección 13.2). Cada singularidad de la transformada de Laplace [$s = ic(n\pi/L)$] corresponde a una solución en forma de exponencial compleja [$e^{ic(n\pi/L)t}$].

Es inmediato ahora calcular el residuo en cada polo,

$$\text{res}(s_n) = \frac{R(s_n)}{Q'(s_n)} = \frac{-\sinh(xs_n/c)e^{s_n t}}{cL \cosh(Ls_n/c)} = \frac{-i \sin(n\pi x/L)e^{i(n\pi ct/L)}}{cL \cos n\pi},$$

pues $\sinh ix = i \sin x$ y $\cosh ix = \cos x$. Por tanto, la función de influencia para este problema es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} G(x, t; L, 0) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{-i \sin(n\pi x/L)e^{i(n\pi ct/L)}}{cL \cos n\pi} \\ &= \frac{2}{cL} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L}, \end{aligned} \quad (13.8.9)$$

donde hemos combinado en un único sumando cada par de contribuciones para n positivo y negativo. Finalmente, usando (13.8.4) obtenemos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

donde

$$A_n = -(-1)^n \frac{2c}{L} \int_0^t b(t_0) \operatorname{sen} \frac{n\pi c}{L}(t - t_0) dt_0,$$

el mismo resultado que el obtenido mediante desarrollo en autofunciones.

La función de influencia es una serie infinita de autofunciones. En problemas homogéneos con condiciones homogéneas en la frontera, esta misma técnica produce también una serie infinita de autofunciones, como obtuvimos mediante separación de variables. De hecho, la manera de probar la validez del método de separación de variables descansa usualmente en la transformada de Laplace.

EJERCICIOS 13.8

***13.8.1.** Resolver el siguiente problema mediante el uso de la transformada de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0 \quad y \quad u(L, t) = 0.$$

Calcular la transformada inversa de Laplace mediante el teorema de los residuos en el plano complejo. Demostrar que el resultado obtenido coincide con el que se obtendría mediante separación de variables.

13.8.2. Modificar el Ejercicio 13.8.1 para los datos:

$$(a) \quad u(x, 0) = 0 \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

$$(b) \quad u(0, t) = 0 \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0,$$

$$(c) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$$

13.8.3. Resolver el siguiente problema mediante transformada de Laplace:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

sujeto a $u(x, 0) = f(x)$, $u(0, t) = 0$, y $u(L, t) = 0$.

Calcular la transformada inversa de Laplace mediante el teorema de los residuos en el plano complejo. ¿Qué otro método produce esta misma representación de la solución? (comparar con el Ejercicio 13.5.6).

13.8.4. Considérese el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{sen } \sigma_0 t,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad u(L, t) = 0.$$

- (a) Resolverlo utilizando transformada de Laplace (mediante integración compleja), si $\sigma_0 \neq c(m\pi/L)$.
- (b) Resolverlo para $\sigma_0 = c(3\pi/L)$. Comprobar que, en ese caso, se produce resonancia (véase la Sección 8.5).

Capítulo 14

Temas de extensión: ondas dispersivas, estabilidad, no linealidad y métodos perturbativos

14.1. Introducción

Este capítulo es de manera intencionada, más conciso que el resto del libro, por lo que el lector puede obtener así un resumen de los múltiples temas avanzados que surgen en el ámbito de las ecuaciones en derivadas parciales. En la Sección 14.2, introducimos la relación de dispersión, una relación entre el número de onda y la frecuencia, para mostrar la importancia de distinguir entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo. Entre los ejemplos de ondas dispersivas nos encontramos las ondas en la superficie del agua (Sección 14.2) y, de forma más general, las guías de ondas (Sección 14.3) y la fibra óptica (Sección 14.4). En la Sección 14.5, se desarrolla el método de la fase estacionaria para destacar la importancia de la velocidad de grupo en la propagación de ondas dispersivas lineales. En la Sección 14.6, estudiaremos las ondas dispersivas en el caso en que se producen pequeñas variaciones en el tiempo de la amplitud, la frecuencia y el número de onda. Usaremos el método de las características para estudiar las ondas de variación lenta, que pueden formar cústicas. La Sección 14.7 comienza asumiendo que estas ondas son simples con números de onda y frecuencia casi constantes, y se obtienen las ecuaciones de Schrödinger y de Korteweg-de Vries como ecuaciones de las envolventes. Se incluyen también términos no lineales y se analizan de forma breve los solitones resultantes (Sección 14.7.4) y la transformada de scattering inverso. En la Sección 14.8, se describe el fenómeno de bifurcación para ecuaciones en derivadas parciales, con una breve discusión previa (Sección 14.8.1). En la Sección 14.8.3, presentamos un ejemplo típico de estado de equilibrio inestable para una EDP que da lugar a una curva de estabilidad neutra y muestra cómo aparecen los patrones en estas ecuaciones.

Tales ondas dispersivas ligeramente inestables son analizadas en la Sección 14.8.5, obteniendo de manera sencilla la ecuación compleja de Ginzburg-Landau linealizada. En la Sección 14.8.6, se describen fenómenos de bifurcación y se analiza la ecuación no lineal de Ginzburg-Landau. Las dos últimas secciones son más o menos independientes del resto del libro y en ellas se desarrollan métodos de perturbaciones singulares. Para facilitar el aprendizaje de estos métodos se estudian primero en una serie de ejemplos sencillos de ecuaciones ordinarias. En la Sección 14.9, se introducen problemas de perturbación singular con múltiples escalas, centrándonos en la Sección 14.9.4, en la ecuación de ondas en medios de variación lenta y en la Sección 14.9.5, en ondas dispersivas de variación lenta. En la Sección 14.10, se discuten problemas de capa límite con un modelo de difusión de un contaminante, en los que domina la convección.

14.2. Ondas dispersivas y velocidad de grupo

14.2.1. Ondas viajeras y relación de dispersión

Las ecuaciones en derivadas parciales lineales en medios uniformes (con coeficientes constantes) y con condiciones de frontera sencillas, se pueden resolver a menudo de manera análoga, si no más sencilla, al método de separación de variables. Como la forma de la solución es conocida de antemano a partir de nuestra experiencia en separar variables, podemos sustituir directamente esta forma en la ecuación

	propagación de ondas	difusión
dim= 1	$e^{i(kx-\omega t)}$	$e^{ikx}e^{\sigma t}$
dim> 1	$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}-\omega t)}$	$e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}e^{\sigma t}$

En dominios rectangulares con condiciones de contorno homogéneas, ya sean del tipo de función prescrita nula, de frontera aislada o de periodicidad, la constante k (respectivamente \mathbf{k}) representa uno de los números de onda discretos (respectivamente, un vector de números de onda) permitidos por la correspondiente serie de Fourier. La longitud de onda es $\frac{2\pi}{k}$ y, por tanto, el número de onda k es el número de periodos en unidades de 2π . Si el dominio es no acotado, esta constante k (respectivamente \mathbf{k}) representa uno de los valores de una función continua (respectivamente de una función vectorial continua de números de onda) permitidos por la correspondiente transformada de Fourier. En esos problemas, ω es la frecuencia temporal, mientras que σ representa la dependencia en tiempo de la solución (en este capítulo usamos la letra k para designar el número de onda y ω para designar la frecuencia temporal, mientras que en el resto del libro estas letras designaban la constante de difusividad y el número de onda espacial. Esperamos que esto no produzca confusión).

En general, para resolver problemas en ecuaciones en derivadas parciales correspondientes a la **propagación de ondas**, obtenemos la frecuencia temporal como

una función real del número de onda,

$$\boxed{\omega = \omega(k)}, \quad (14.2.1)$$

lo que denominamos **relación de dispersión**. En problemas en varias dimensiones, $\omega = \omega(\mathbf{k})$, es decir, por ejemplo en dimensión tres, $\omega = \omega(k_1, k_2, k_3)$. En breve, presentaremos algunos ejemplos. En la propagación unidimensional de ondas, tenemos $e^{i(kx - \omega t)} = e^{ik(x - \frac{\omega}{k}t)}$, que representa una **onda viajera** con **velocidad de onda** $= \frac{\omega(k)}{k}$. Si la velocidad depende realmente del número de onda, entonces ondas con diferente longitud se mueven con distinta velocidad. Como los datos iniciales se componen de muchas longitudes de ondas distintas (usando análisis de Fourier), en general estas condiciones iniciales se diseminarán o dispersarán. Este fenómeno se entenderá más claramente enseguida. De momento, decimos que un problema de propagación de ondas es **dispersivo** si la velocidad de onda depende del número de onda y, en particular, si la velocidad de onda no es constante. Un problema es **no dispersivo**, si $\frac{\omega(k)}{k} = \text{constante}$, de manera que $\omega(k) = \text{constante} \times k$. De forma más técnica, decimos que un problema unidimensional es dispersivo si $\frac{d\omega}{dk} \neq \text{constante}$. En dimensiones superiores, un problema es dispersivo (por ejemplo, en $\text{dim} = 3$) si $\nabla_{\mathbf{k}}\omega = (\frac{\partial\omega}{\partial k_1}, \frac{\partial\omega}{\partial k_2}, \frac{\partial\omega}{\partial k_3}) \neq \text{vector constante}$.

Ejemplo: soluciones reales. Consideremos la ecuación de primer orden estudiada en el Capítulo 12,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (14.2.2)$$

y el correspondiente problema de valores iniciales en toda la recta. Sustituyendo $u = e^{i(kx - \omega t)}$ obtenemos, en primer lugar, $-i\omega = cik$, y de aquí la relación de dispersión, que es

$$\omega = -ck.$$

La velocidad es $\frac{\omega}{k} = -c$, constante para todo k , por lo que decimos que (14.2.2) es no dispersiva. Todas las ondas se mueven con la misma velocidad $-c$. Esperamos entonces que el dato inicial se mueva con velocidad $-c$ como una **onda fija**, sin cambiar su forma. La transformada de Fourier nos puede ayudar a probar este hecho:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{i(kx - \omega t)} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ik(x + ct)} dk, \quad (14.2.3)$$

usando (14.2.2). Para el dato inicial $u(x, 0) = f(x)$ se tiene

$$u(x, 0) = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)e^{ikx} dk. \quad (14.2.4)$$

Se podría obtener el coeficiente $A(k)$, pero no es necesario. A partir de (14.2.3) y de (14.2.4), vemos que

$$u(x, t) = f(x + ct). \quad (14.2.5)$$

Este mismo resultado fue obtenido en el Capítulo 12 por el método de las características.

Una solución es $Ae^{i(kx-\omega(k)t)}$, con A una constante. Pero esta solución no es real. Para obtener soluciones de este tipo que sean reales, observamos que tanto k como $-k$ son números de onda admisibles. Sumando las correspondientes exponenciales, una solución de la ecuación es $Ae^{i(kx-\omega(k)t)} + Ae^{i(-kx-\omega(-k)t)} = A(e^{i(kx-\omega(k)t)} + e^{-i(kx+\omega(k)t)}) = 2A \cos(kx - \omega(k)t)$, ya que $\omega(k)$ es una función impar de k . En muchos problemas (pero no en todos) es posible obtener soluciones reales por este método. Es por ello que la mayoría de los físicos usan la notación $Ae^{i(kx-\omega t)}$ para representar una onda real. Hay que tener cuidado si la ecuación considerada no es real o no es lineal.

Ejemplo: ecuación de Korteweg-de Vries linealizada. La ecuación lineal que tratamos a continuación aparece en numerosas situaciones físicas, especialmente como aproximación de ondas de gran longitud (en comparación con el resto de longitudes características del modelo físico), donde tiene lugar una mayor dispersión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Posponemos su deducción para más adelante y nos concentramos ahora en obtener la relación de dispersión. Asumiendo que la solución tiene forma de onda viajera, $u = e^{i(kx-\omega t)}$, obtenemos $-i\omega + c(ik) = \beta(ik)^3$, por lo que la relación de dispersión es

$$\omega = ck + \beta k^3. \quad (14.2.6)$$

La velocidad de onda no es constante, sino que depende del número de onda, $\frac{\omega}{k} = c + \beta k^2$, es decir, $\frac{d\omega}{dk} \neq$ constante; nos encontramos así con el primer ejemplo de onda dispersiva. Usando la transformada de Fourier, tenemos

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx-\omega t)} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(k(x-ct)-\beta k^3 t)} dk.$$

Esta expresión exacta de la solución no proporciona gran información, algo que es típico en los problemas dispersivos. Más adelante, veremos cómo analizar problemas de ondas dispersivas basándonos en una aproximación de la solución exacta para grandes distancias y después de pasado un tiempo grande.

La relación de dispersión como un operador. Consideremos una solución en forma de onda viajera elemental para un problema dispersivo, es decir $u(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, donde A representa una amplitud constante. Observemos que para esta solución se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -i\omega u, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= ik u. \end{aligned}$$

Vemos entonces que el número de onda y la frecuencia se pueden interpretar como la acción de los operadores de derivación espacial y temporal, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i\omega(k), \text{ es decir, } \omega(k) \Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \quad (14.2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow ik, \text{ es decir, } k \Rightarrow -i\frac{\partial}{\partial x}. \quad (14.2.8)$$

Esta observación será de gran utilidad a la hora de discutir las ecuaciones de las envolventes de las ondas.

14.2.2. Velocidad de grupo I

Las ondas dispersivas lineales $e^{i(kx - \omega t)}$ se caracterizan por la dependencia de la frecuencia en el número de onda, de manera que la velocidad de fase $\frac{\omega(k)}{k}$ depende del número de onda. Ondas con diferente longitud tienen diferente velocidad de fase. Sin embargo, para las ondas dispersivas existe una velocidad más interesante que las diferentes velocidades de fase, la velocidad de grupo, cuya importancia radica en que es la velocidad a la que se transmite la energía (no a la velocidad de fase). No es especialmente sencillo mostrar esta propiedad, por lo que comenzaremos discutiendo un ejemplo simple. En lugar de considerar un continuo de ondas para todos los números de onda (usando la transformada de Fourier), consideramos una solución formada únicamente por dos ondas con números de onda cercanos, k y $k + \Delta k$, donde Δk es muy pequeño. Para simplificar, tomamos ondas de la forma $\cos(kx - \omega(k)t)$, ambas con la misma amplitud A :

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega(k)t) + A \cos[(k + \Delta k)x - \omega(k + \Delta k)t].$$

Usando la fórmula de la suma de cosenos ($\cos\theta + \cos\phi = 2 \cos \frac{1}{2}(\theta + \phi) \cos \frac{1}{2}(\theta - \phi)$), obtenemos

$$u(x, t) = 2A \cos \left[\left(k + \frac{\Delta k}{2} \right) x - \frac{\omega(k) + \omega(k + \Delta k)}{2} t \right] \cos \left[\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\omega(k + \Delta k) - \omega(k)}{2} t \right].$$

La suma es un producto de dos funciones trigonométricas con diferentes comportamientos espaciales. Un primer número de onda es $k + \frac{\Delta k}{2}$, aproximadamente igual a los números de onda originales, mientras que el otro número de onda obtenido $\frac{\Delta k}{2}$ es mucho más pequeño y corresponde a una longitud de onda mucho mayor. La solución tiene dos escalas completamente diferentes. Para dibujar la gráfica de la solución (para t fijo, véase la Figura 14.2.1), primero dibujamos la onda sinusoidal de gran longitud de onda. La solución se encuentra entre esta onda larga y su reflejada en el eje de abscisas, y tiene una longitud de onda relativamente pequeña en

comparación. Las ondas de oscilación rápida varían muy lentamente su amplitud. Las dos ondas interfieren de forma constructiva o destructiva alternadamente. La onda larga actúa como una **envolvente** de las ondas cortas. Entre cada dos ceros consecutivos de la onda larga se encuentra un **grupo** de ondas cortas. Las ondas cortas son aproximadamente ondas dispersivas individuales con un número de onda $k + \frac{\Delta k}{2}$ y una velocidad de fase aproximadamente igual a la velocidad de fase de una onda dispersiva individual $\frac{\omega(k + \frac{\Delta k}{2})}{k + \frac{\Delta k}{2}} \approx \frac{\omega(k) + \omega(k + \Delta k)}{2(k + \frac{\Delta k}{2})} \approx \frac{\omega(k)}{k}$. Sin embargo la envolvente, o el grupo de ondas, se mueve con una velocidad completamente diferente $\frac{\omega(k + \Delta k) - \omega(k)}{\Delta k}$. En el límite para $\Delta k \rightarrow 0$, se obtiene la llamada **velocidad de grupo**:

$$\text{velocidad de grupo} \equiv \frac{d\omega}{dk}. \quad (14.2.9)$$

En algún sentido, que discutiremos más adelante con mayor detalle, la amplitud de un grupo de ondas dispersivas se mueve con la velocidad de grupo. La energía se mueve con la velocidad de grupo. Las ondas individuales parecen moverse con la envolvente, pues la velocidad de fase es normalmente diferente a la velocidad de grupo.

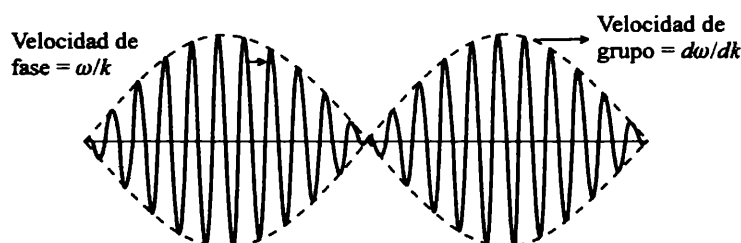


Figura 14.2.1: Velocidad de grupo y velocidad de fase.

Ejemplo. Para la ecuación KdV linealizada, por ejemplo, la relación de dispersión es (14.2.6), $\omega = ck + \beta k^3$. En ese caso,

$$\begin{aligned} \text{velocidad de fase} &= \frac{\omega}{k} = c + \beta k^2, \\ \text{velocidad de grupo} &= \frac{d\omega}{dk} = c + 3\beta k^2. \end{aligned}$$

Incluso es posible que la velocidad de grupo tenga dirección opuesta a las velocidades de fase. Esto puede ocurrir, por ejemplo, si $c + 3\beta k^2 > 0$ y $c + \beta k^2 < 0$.

Ondas en el agua. Se sabe que la relación de dispersión para las ondas en la superficie del agua es $\omega^2 = gk \tanh kh$, donde $g = 9,8 \text{ m/sec}^2$ es la constante de gravitación y h es la profundidad constante del agua. Para aguas profundas se tiene $kh \gg 1$, por lo que $\tanh kh \approx 1$, y la relación de dispersión se puede aproximar por $\omega^2 = gk$, o lo que es lo mismo, $\omega = \pm \sqrt{gk}$. En aguas profundas, la velocidad

de fase es $\frac{\omega}{k} = \pm \sqrt{\frac{g}{k}}$, mientras que la velocidad de grupo es $\frac{d\omega}{dk} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$, y vemos que la velocidad de grupo es la mitad de la velocidad de fase. La mayor parte de las ondas (olas) en una playa han sido generadas por tormentas lejanas. Estas ondas corresponden, pues, a aguas profundas, ya que la profundidad media del océano es de 5 km. A partir de la relación entre los números de onda y la longitud de onda, $L = \frac{2\pi}{k}$, tenemos que la velocidad de grupo es $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$. Cuanto mayor es la longitud de las ondas mayor es la velocidad de grupo. Si una tormenta localizada genera olas de todas las longitudes, las más largas llegarán antes a una orilla distante. Por tanto, la variación en la frecuencia de las olas en la orilla se debe a estas diferencias en los tiempos de llegada (la frecuencia observada en una playa carece de sentido, pues la frecuencia de una onda se mantiene constante cuando la profundidad varía poco). En la playa se observan antes las ondas largas con menores frecuencias (grandes periodos) que preceden a las otras ondas (e incluso el sistema tormentoso puede ir acercándose a tierra). El lector interesado puede consultar el libro de Kinsman (1984).

EJERCICIOS 14.2

14.2.1. Encontrar la relación de dispersión para las siguientes ecuaciones:

- (a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
- (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\gamma^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$.
- (c) $i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
- (d) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$.

14.2.2. Encontrar la relación de dispersión para las siguientes ecuaciones en dimensión dos:

- (a) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$.
- (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

14.2.3. Demostrar que si la relación de dispersión de una ecuación en derivadas parciales es una función impar, $\omega(-k) = -\omega(k)$, entonces la ecuación admite soluciones reales.

14.2.4. Resolver la misma cuestión para una ecuación en derivadas parciales en más de una dimensión espacial, donde la relación de dispersión verifica $\omega(-\mathbf{k}) = -\omega(\mathbf{k})$.

14.2.5. Las ondas en el agua satisfacen la ecuación $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ para $y \leq 0$, donde ϕ es el potencial de velocidades, de manera que la velocidad del fluido es $\mathbf{u} = \nabla \phi$. La condición de frontera en la tapa inferior $y = -h$, es $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$. Para ondas de amplitud muy pequeña (también de gran interés físico), la condición de frontera en la superficie desconocida $y = s(x, t)$ puede aproximarse por las

dos condiciones $\frac{\partial \phi}{\partial t} + gs = 0$ y $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$, aplicadas en $y = 0$, donde g es la constante de gravitación. Encontrar la relación de dispersión suponiendo que existen soluciones en la forma $\phi = A(y)e^{i(kx-\omega t)}$ y $s = Be^{i(kx-\omega t)}$.

- 14.2.6.** Determinar la relación de dispersión para las ondas en el agua, teniendo en cuenta la tensión superficial, sustituyendo la condición $\frac{\partial \phi}{\partial t} + gs = 0$ por $\frac{\partial \phi}{\partial t} + gs - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$, donde γ es el coeficiente de tensión superficial y ρ es la densidad (constante) del agua [Whitham (1974)].
- 14.2.7.** Determinar la relación de dispersión de las ondas en aguas profundas resolviendo el Ejercicio 14.2.5 con la condición $\frac{\partial \phi}{\partial y} \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow -\infty$ en lugar de $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ en $y = -h$.
- 14.2.8.** Deducir la relación de dispersión para una onda interna, considerando un modelo de dos fluidos con densidades ρ_1 para $y \geq 0$ y ρ_2 para $y \leq 0$. La condición de frontera correspondiente a fijar la presión cero, considerada en el Ejercicio 14.2.5, se sustituye aquí por la condición de continuidad de la presión: $\rho_1(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gs) = \rho_2(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gs)$ para $y = 0$. La otra condición en $y = 0$ se verifica para ambos fluidos. Suponer $y \rightarrow \pm\infty$.
- 14.2.9.** Comparar las velocidades de fase y de grupo para los problemas:
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$,
 - $i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,
 - $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u$. Demostrar que la velocidad de fase es mayor que la velocidad del sonido c , mientras que la velocidad de grupo es menor que c .
- 14.2.10.** Determinar, para las ondas en el agua, la velocidad de grupo que verifica $\omega^2 = gk \tanh kh$.
- 14.2.11.** Los tsunamis (olas gigantes producidas por terremotos) son ondas largas con $kh \ll 1$. Demostrar que las ondas largas verifican $\omega = \pm k\sqrt{gh}$. Estimar, aproximadamente, la velocidad de fase (y la velocidad de grupo) para los tsunamis, suponiendo que la profundidad del océano es de 5 km.

14.3. Guías de ondas

En los problemas de propagación de ondas (donde los problemas físicos se describen mediante la ecuación de ondas u otras ecuaciones en derivadas parciales relacionadas), las perturbaciones locales decaen rápidamente en el espacio tridimensional. Para conseguir que la comunicación en este espacio tridimensional resulte eficiente, el transporte de la energía debe estar restringido a dos dimensiones o incluso a una dimensión. Para este propósito, se introducen las guías de ondas en el caso de ondas electromagnéticas (luz) o acústicas (sonido). Las guías de ondas típicas son

largos tubos huecos de sección circular, que se pueden diseñar (como veremos) para permitir la propagación de ondas electromagnéticas o acústicas en una dimensión. Las ondas acústicas verifican la ecuación de ondas tridimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (14.3.1)$$

Las ondas electromagnéticas satisfacen un sistema de ecuaciones de ondas que se complica, pues las diferentes componentes de los campos magnético y eléctrico están acopladas a través de varias condiciones en la frontera. Sin embargo, el método para analizar estas ondas electromagnéticas es el mismo que para las ondas acústicas, por lo que, para simplificar la presentación, nos restringiremos al caso de la ecuación de ondas en dimensión tres, (14.3.1).

Aplicaremos algunas ideas nuevas en el análisis de las guías de ondas, por lo que intentaremos que la presentación matemática sea tan sencilla de seguir como sea posible. Por tanto, consideraremos una guía con sección rectangular, más que una guía de sección circular, como sería el caso más realista (véase la Figura 14.3.1). El análisis de guías rectangulares de ondas ($0 < y < L$, $0 < z < H$) utiliza las funciones trigonométricas en los desarrollos de series de Fourier, mientras que en el caso circular necesitaríamos considerar las funciones de Bessel. Dejamos este caso para los ejercicios, pero garantizamos al lector que no aparecen dificultades nuevas una vez que se ha entendido el caso rectangular.

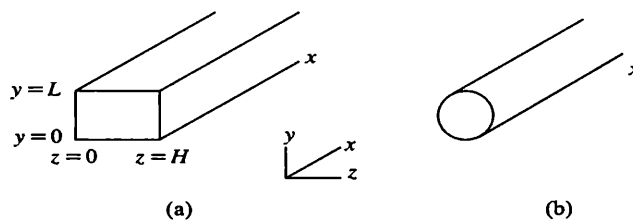


Figura 14.3.1: Guías de ondas: (a) rectangulares y (b) circulares.

Para las ondas electromagnéticas, en cada problema particular se consideran diferentes condiciones de frontera. Consideramos el caso sencillo en el que $u = 0$ en la frontera de la guía de ondas. Las soluciones en variables separadas de la ecuación (14.3.1) tienen la forma

$$u = e^{i(kx - \omega t)} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ y } m = 1, 2, 3, \dots \quad (14.3.2)$$

Los factores en y y z , que dan lugar a las series de Fourier en y y en z , aparecen debido a las condiciones de frontera. La onda viajera $e^{i(kx - \omega t)}$ en la dirección x corresponde a la transformada de Fourier en x . Sumando en n y m , e integrando en

k , obtenemos la solución general de la Ecuación (14.3.1). Sustituyendo (14.3.2) en (14.3.1), obtenemos las frecuencias naturales de vibración ω para la guía de ondas, la relación de dispersión es

$$\omega^2 = c^2 \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2 \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ y } m = 1, 2, 3, \dots \quad (14.3.3)$$

Es importante distinguir la naturaleza continua de k de la naturaleza discreta de n y m . Cada solución (14.3.2) se llama un modo de la guía de ondas. Existe una sucesión doblemente infinita de modos, $n = 1, 2, 3, \dots$ y $m = 1, 2, 3, \dots$. Cada modo (fijos m y n) es dispersivo. Se puede obtener la velocidad de grupo derivando (14.3.3) respecto del número de onda k , $2\omega \frac{d\omega}{dk} = c^2 2k$, de manera que

$$\frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega}.$$

La velocidad de grupo en las guías de ondas tiene la misma dirección que la velocidad de fase $\frac{\omega}{k}$. Las ondas que viajan hacia la izquierda tienen energía que se mueve hacia la izquierda (esta propiedad NO es necesariamente cierta para otras ecuaciones). En la Figura 14.3.2, representamos la frecuencia como función del número de onda para los primeros modos. Existe una primera frecuencia natural, la mínima frecuencia, llamada frecuencia de corte por razones que se describirán más adelante. Esta frecuencia se corresponde con $n = 1, m = 1$ y $k = 0$ (ondas infinitamente largas):

$$\omega_c = c \sqrt{\left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{H} \right)^2}. \quad (14.3.4)$$

La propagación de las ondas en la guía de ondas se produce forzando la guía, en algún sentido, con una fuerza de frecuencia ω_f , de manera que la resonancia juega un papel aquí. Veremos que si la frecuencia usada es mayor que la frecuencia de corte ($\omega_f > \omega_c$), entonces es posible algún tipo de resonancia para que la onda se propague a lo largo de la guía de ondas con amplitud constante. Dada una frecuencia específica $\omega = \omega_f$, la relación de dispersión (14.3.3) determina el número de ondas k_f (para cada n y m) que se propagan,

$$k_f \equiv \pm \sqrt{\frac{\omega_f^2}{c^2} - \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2 \right]}.$$

Así, el número de ondas que se pueden propagar depende de ω_f y, según la Figura 14.3.2, cuanto mayor es ω_f mayor es el número de modos que se propagan. Veremos que si la frecuencia usada para forzar la guía es menor que la frecuencia de corte ($\omega_f < \omega_c$), entonces la respuesta del sistema es mucho menor.

14.3.1. Respuesta a una fuente puntual y periódica de frecuencia

ω_f

Para entender la manera en que la guía de ondas responde a una fuerza periódica, consideramos una fuente puntual concentrada en el interior de la guía, en el punto

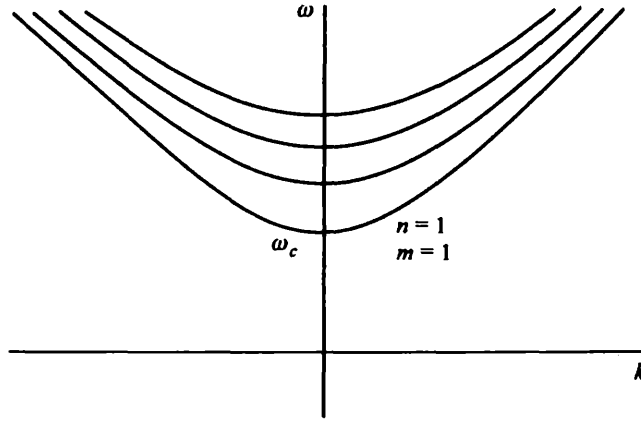


Figura 14.3.2: Relación de dispersión para varios modos de una guía de ondas.

$x = x_0, y = y_0, z = z_0$ y con frecuencia ω_f :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + e^{-i\omega_f t} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0). \quad (14.3.5)$$

Suponemos también las mismas condiciones en la frontera, $u = 0$. En ese caso, debemos buscar una solución en la forma de una serie doble de Fourier en las variables y, z :

$$u(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}(x, t) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H}. \quad (14.3.6)$$

Las amplitudes A_{nm} satisfacen (suprimiendo por conveniencia los subíndices), las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - c^2 \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2 \right] A + \frac{4}{LH} e^{-i\omega_f t} \delta(x - x_0) \operatorname{sen} \frac{n\pi y_0}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi z_0}{H}. \quad (14.3.7)$$

La amplitud correspondiente a cada modo es solución de una ecuación de ondas unidimensional (14.3.7), en la dirección x de propagación de la guía de ondas, con una fuerza de restauración extra, además de una fuerza puntual periódica. Como (14.3.7) tiene una fuerza periódica simple, buscamos una solución particular con esa misma fuerza periódica:

$$A(x, t) = G(x, x_0) e^{-i\omega_f t}, \quad (14.3.8)$$

donde la función de Green bidimensional $G(x, x_0)$ para cada modo (fijados n y m) a lo largo de la guía verifica

$$c^2 \frac{d^2 G}{dx^2} + \left\{ \omega_f^2 - c^2 \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2 \right] \right\} G = \frac{4}{LH} \delta(x - x_0) \operatorname{sen} \frac{n\pi y_0}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi z_0}{H}. \quad (14.3.9)$$

14.3.2. Función de Green para los modos que se propagan

Como el miembro derecho de la Ecuación (14.3.9) es una delta de Dirac concentrada en un punto espacial, podemos resolver la ecuación mediante soluciones de la ecuación homogénea, separadas para $x < x_0$ y para $x > x_0$, aplicando la condición de salto, tal y como se describe en el Capítulo 8. Existen dos posibilidades para estas soluciones de la ecuación homogénea, dependiendo de si la frecuencia (ω_f) de la fuerza es mayor o menor que la frecuencia natural de vibración del modo correspondiente.

En el caso en que la frecuencia de la fuerza es mayor que la frecuencia del modo (n y m fijos), se tiene que las soluciones de la ecuación homogénea son $\sin k_f x$ y $\cos k_f x$, donde k_f es precisamente el número de onda que aparecería usando la relación de dispersión (14.3.3), si la frecuencia fuera ω_f , es decir, $k_f \equiv \sqrt{\frac{\omega_f^2}{c^2} - [(\frac{n\pi}{L})^2 + (\frac{m\pi}{H})^2]}$. Sin embargo, la ecuación diferencial en x , (14.3.9), no contiene ninguna condición frontera en x . Pedir que la solución esté acotada en x tampoco es una buena condición, pues todas estas soluciones lo están. No tenemos una manera precisa y sencilla de obtener la única función de Green. En lugar de ello, consideramos una **condición de radiación**, que requiere de matemáticas más avanzadas para su deducción. Nos resultará más clara su utilización considerando las soluciones de la ecuación homogénea en la forma equivalente $e^{\pm ik_f(x-x_0)}$. De acuerdo con (14.3.8), para obtener la amplitud del modo (n, m) debemos multiplicar por $e^{-i\omega_f t}$, dando lugar a $e^{\pm ik_f(x-x_0) - i\omega_f t}$. Estas soluciones son ondas unidimensionales cuya energía se propaga a derecha e izquierda. Como tenemos una fuente en $x = x_0$, la **condición de radiación** afirma que tenemos ondas con energía moviéndose hacia la derecha, para $x > x_0$ y ondas con energía moviéndose hacia la izquierda, para $x < x_0$. Así, si ω_f es mayor que la frecuencia natural del modo (n, m) , obtenemos la función de Green

$$G(x, x_0) = \frac{4}{2ik_f L H c^2} \sin \frac{n\pi y_0}{L} \sin \frac{m\pi z_0}{H} \begin{cases} e^{ik_f(x-x_0)} & \text{para } x > x_0 \\ e^{-ik_f(x-x_0)} & \text{para } x < x_0 \end{cases},$$

donde hemos aplicado también la condición de salto de (14.3.9), es decir

$$\frac{dG}{dx} \Big|_{x=x_0-}^{x=x_0+} = \frac{4}{L H c^2} \sin \frac{n\pi y_0}{L} \sin \frac{m\pi z_0}{H}.$$

Por tanto, la amplitud del modo (n, m) es muy simple y corresponde a una onda con energía propagándose hacia fuera en la guía de ondas (debido a la fuerza puntual) si la frecuencia de la fuerza es mayor que la frecuencia natural de ese modo. Como ω_f viene dada, el número de onda es discreto. A partir de (14.3.6), la solución en la guía de ondas es una SUMA de todas las ondas electromagnéticas (o acústicas) con energía viajando hacia fuera y con números de onda k_f correspondientes a una fuerza dada de frecuencia ω_f . Estas soluciones son ondas viajeras; no decaen en el espacio ni en el tiempo según se alejan de la fuente.

14.3.3. Función de Green para los modos que no se propagan

Consideramos ahora la respuesta que genera el modo (n, m) con estructura $\text{sen} \frac{n\pi y}{L} \text{sen} \frac{m\pi z}{H}$ transversal a la guía de ondas. La amplitud de este modo, producida por la fuerza puntual periódica, verifica (14.3.9). Si la frecuencia de la fuerza es menor que la frecuencia natural del modo (n, m) , entonces las soluciones de la ecuación homogénea (14.3.9) no son sinusoidales, sino exponenciales crecientes y decrecientes, $e^{\pm\beta_f x}$, donde $\beta_f = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 - \frac{\omega_f^2}{c^2}} > 0$. Ahora sí imponemos que la solución esté acotada para todo x , por lo que tendremos exponenciales decrecientes para $x > x_0$ y crecientes para $x < x_0$. Por tanto, la función de Green (14.3.9) viene dada por

$$G(x, x_0) = \frac{4}{-2\beta_f L H c^2} \text{sen} \frac{n\pi y_0}{L} \text{sen} \frac{m\pi z_0}{H} \begin{cases} e^{-\beta_f(x-x_0)} & \text{para } x > x_0 \\ e^{\beta_f(x-x_0)} & \text{para } x < x_0 \end{cases}.$$

Por ejemplo, para $x > x_0$, tenemos una solución elemental exacta de la ecuación de ondas tridimensional $u = B e^{-\beta_f x} \text{sen} \frac{n\pi y}{L} \text{sen} \frac{m\pi z}{H} e^{-i\omega_f t}$, llamada onda **evanescente**.

14.3.4. Consideraciones de diseño

A menudo es deseable diseñar una guía de ondas, de manera que sólo se propague una onda con una frecuencia dada. En caso contrario, la señal sería demasiado complicada, compuesta de dos o más ondas con diferentes longitudes pero con la misma frecuencia. Sólo se puede conseguir esta única onda con el modo de frecuencia más bajo, es decir $n = m = 1$. Debemos entonces diseñar la guía de ondas de tal manera que la frecuencia de la fuerza sea sólo ligeramente mayor que la frecuencia de corte. Para una guía de ondas cuadrada ($L = H$), verificando la ecuación de ondas tridimensional, la frecuencia es $\omega_c = \frac{c\pi}{L} \sqrt{2} < \omega_f$. La siguiente frecuencia corresponde al modo con $n = 1$ y $m = 2$ (o $m = 1$ y $n = 2$), es decir, $\omega_2 = \frac{c\pi}{L} \sqrt{5}$. Para garantizar que sólo se propaga una onda con frecuencia ω_f , imponemos la condición

$$\frac{c\pi}{L} \sqrt{2} < \omega_f < \frac{c\pi}{L} \sqrt{5}.$$

Si suponemos que el material a través del cual viajan las ondas electromagnéticas o acústicas es fijo, entonces el valor de c es conocido. Por tanto, las longitudes de los lados de la guía deben verificar

$$\frac{c\pi}{\omega_f} \sqrt{2} < L < \frac{c\pi}{\omega_f} \sqrt{5}.$$

EJERCICIOS 14.3

14.3.1. Considérese la ecuación de ondas en dimensión dos: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$, definida en un cuadrado, con $u = 0$ en $y = 0$ e $y = L$.

(a) Determinar la relación de dispersión.

- (b) Determinar la frecuencia de corte.
- (c) Determinar para qué frecuencias de una fuerza únicamente se propaga un modo.
- 14.3.2.** Rehacer el Ejercicio 14.3.1 para las condiciones de frontera $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ en $y = 0$ e $y = L$ (los modos con $n = 0$ no se consideran ondas que se propaguen).
- 14.3.3.** Considérese la ecuación de ondas en dimensión tres: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$, definida en el interior de un conductor circular ($y^2 + z^2 = a^2$), con $u = 0$ para $r = a$. Suponer que las soluciones son radiales, $u = u(r, x, t)$, propagándose en la dirección x .
- (a) Determinar la relación de dispersión.
- (b) Determinar la frecuencia de corte.
- (c) Determinar para qué frecuencias de una fuerza únicamente se propaga un modo.
- 14.3.4.** Rehacer el Ejercicio 14.3.3, pero sin suponer que las soluciones son radiales.
- 14.3.5.** Considérese la ecuación de ondas en dimensión tres: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$, definida en el interior de un conductor rectangular, con $u = 0$ en $y = 0$ e $y = L$, y con $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ en $z = 0$ y $z = H$. Responder a las preguntas del Ejercicio 14.3.1.
- 14.3.6.** Determinar la función de Green correspondiente a los modos que se propagan para:
- (a) Ejercicio 14.3.1.
- (b) Ejercicio 14.3.2.
- (c) Ejercicio 14.3.4.
- (d) Ejercicio 14.3.5.
- 14.3.7.** Determinar la función de Green correspondiente a los modos que no se propagan para:
- (a) Ejercicio 14.3.1.
- (b) Ejercicio 14.3.2.
- (c) Ejercicio 14.3.4.
- (d) Ejercicio 14.3.5.
- 14.3.8.** Demostrar que los modos que se pueden propagar en una guía de ondas rectangular tienen amplitud cero, si la fuerza puntual está localizada en un nodo de ese modo.
- 14.3.9.** Usando la condición de radiación (y la velocidad de grupo), determinar la función de Green para las ecuaciones siguientes:

- (a) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + e^{-i\omega_f t} \delta(x)$.
- (b) $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + e^{-i\omega_f t} \delta(x)$.
- (c) $i\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-i\omega_f t} \delta(x)$ (analizar los dos casos $\omega_f > 0$ y $\omega_f < 0$).

14.4. Fibra óptica

En las guías de ondas de la sección anterior, la energía estaba confinada a una dimensión mediante un conductor hueco metálico. En esta sección, mostraremos que la energía puede confinarse también a una dimensión de una forma completamente diferente: la información en la forma de ondas electromagnéticas también puede propagarse a lo largo de una guía hecha de un material no conductor (dieléctrico), como, por ejemplo, el vidrio. Una fibra consiste típicamente en un núcleo central delgado de vidrio, rodeado de un revestimiento más ancho de vidrio con distintas propiedades ópticas, protegidos ambos con una camisa exterior, como se muestra en la Figura 14.4.1. Para formular el problema en la manera más sencilla posible, suponemos que el revestimiento tiene un espesor infinito. Veremos que se puede diseñar el núcleo central de vidrio, de manera que la mayor parte de la energía luminosa se propague por él. Supondremos también incorrectamente que la física de la fibra óptica viene descrita por la ecuación de ondas tridimensional. Obtendremos así, sin mucha dificultad, interesantes propiedades de la misma.

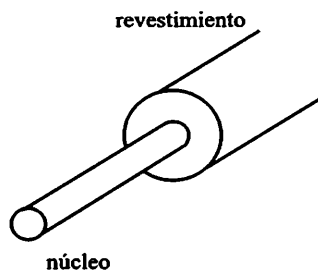


Figura 14.4.1: Fibra óptica con una sección circular.

Otra simplificación del problema consiste en reducir una dimensión más. Consideramos una región bidimensional con un núcleo central (desde $y = -L$ hasta $y = L$) y un revestimiento que se extiende hasta el infinito en las dos direcciones, $y \rightarrow \pm\infty$. En los ejercicios, se analiza el caso más realista en coordenadas polares. Esta región es simétrica alrededor de $y = 0$. Afirmamos que todas las soluciones pueden hacerse simétricas o antisimétricas alrededor de $y = 0$. Analizaremos sólo uno de los dos problemas, el que da lugar a modos antisimétricos. Estudiaremos entonces una guía de ondas bidimensional para $y > 0$, verificando las condiciones de contorno antisimétricas:

$$u = 0 \quad \text{en} \quad y = 0. \quad (14.4.1)$$

Suponemos que en esta situación se verifica la ecuación de ondas bidimensional en cada una de las regiones (como se muestra en la Figura 14.4.2), pero con constantes

físicas distintas, de manera que la velocidad en cada región es también distinta, c_1 y c_2 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_2^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad y > L, \quad (14.4.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad L > y > 0. \quad (14.4.3)$$

En la frontera entre ambos medios se verifica una condición que depende de la física del problema. Aquí, suponemos la condición

$$u \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} \text{ son ambas continuas en } y = L \quad (14.4.4)$$

(en la propagación de ondas electromagnéticas es frecuente que $\partial u / \partial y$ no sea continua, pero cierto parámetro físico multiplicado por $\partial u / \partial y$ sí es continuo).

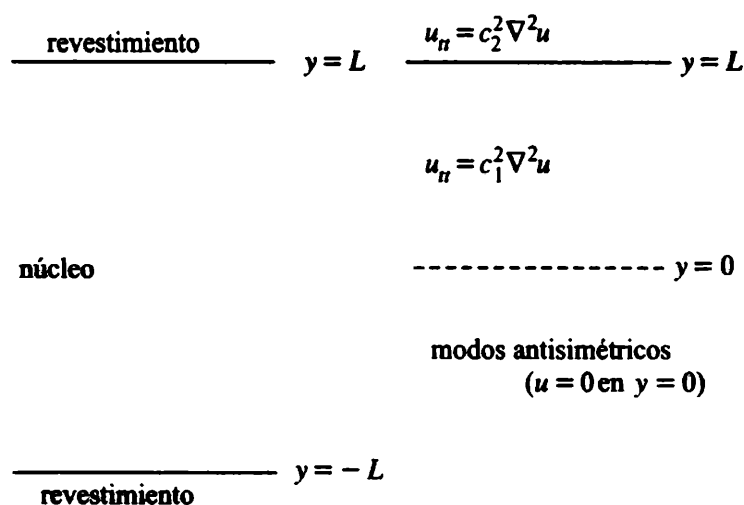


Figura 14.4.2: Fibra óptica con una sección plana.

Queremos que las ondas se propaguen en la dirección x , es decir, buscamos soluciones en la forma $e^{i(kx - \omega t)}$. Uno de nuestros propósitos es determinar la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$. La condición de frontera fuerza a que la estructura horizontal y temporal de la solución sean la misma para ambos materiales:

$$u = B(y)e^{i(kx - \omega t)}, \quad y > L, \quad (14.4.5)$$

$$u = A(y)e^{i(kx - \omega t)}, \quad L > y > 0. \quad (14.4.6)$$

Sustituyendo la forma de las soluciones (14.4.5) y (14.4.6) en las ecuaciones de ondas (14.4.2) y (14.4.3), llegamos a dos ecuaciones diferenciales para la estructura transversal en cada material de la guía de ondas:

$$\begin{aligned} -\omega^2 B &= c_2^2 \left(\frac{d^2 B}{dy^2} - k^2 B \right), & y > L, & \quad \frac{d^2 B}{dy^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \right) B, \\ -\omega^2 A &= c_1^2 \left(\frac{d^2 A}{dy^2} - k^2 A \right), & L > y > 0, & \quad \frac{d^2 A}{dy^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) A. \end{aligned} \quad (14.4.7)$$

Queremos estudiar aquellas frecuencias para las que la mayor parte de la energía se propaga a lo largo del núcleo $0 < y < L$. Suponemos, por tanto, que ω es tal que el comportamiento transversal es oscilatorio en el núcleo y exponencial en el "revestimiento":

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} > 0 \quad \text{pero} \quad k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} < 0. \quad (14.4.8)$$

A partir de (14.4.8), vemos que la frecuencia debe satisfacer

$$c_1|k| < |\omega| < c_2|k|.$$

Para obtener este tipo de guía de ondas es necesario (pero no suficiente) que $c_1 < c_2$. La velocidad de la onda en el núcleo debe ser menor que la velocidad en el revestimiento. Bajo las condiciones (14.4.8) las soluciones de (14.4.7) muestran que en el núcleo y en el revestimiento

$$u = B_0 e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}} y} e^{i(kx - \omega t)}, \quad y > L,$$

$$u = A_0 \sin \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} y e^{i(kx - \omega t)}, \quad L > y > 0,$$

donde A_0 y B_0 son constantes. Hemos supuesto que la solución decae exponencialmente en el revestimiento y hemos usado las condiciones de contorno antisimétricas (14.4.1) en $y = 0$.

La relación de dispersión queda determinada por las dos condiciones de continuidad (14.4.4) en la interfase entre los dos medios:

$$B_0 e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}} L} = A_0 \sin \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} L,$$

$$-B_0 \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}} e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}} L} = A_0 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} \cos \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} L.$$

Obtenemos dos ecuaciones lineales homogéneas en las dos incógnitas A_0 y B_0 . Por eliminación, tenemos que la solución es cero excepto cuando

$$\det \begin{bmatrix} \sin \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} L & -e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}} L} \\ \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} \cos \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} L & \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}} e^{-\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}} L} \end{bmatrix} = 0.$$

Esta condición nos da la relación de dispersión

$$\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}} \sin \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} L + \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} \cos \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} L = 0,$$

o de forma equivalente

$$\tan \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} L = - \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2}}{\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2}}}. \quad (14.4.9)$$

La solución ω de (14.4.9), para cada k dado, nos da la relación de dispersión.

A la hora de diseñar las guías de ondas, especificamos ω y determinamos k a partir de (14.4.9). Para obtener las soluciones de (14.4.9), dibujamos la función tangente como función de $\beta \equiv \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2} L$, así como el miembro derecho de (14.4.9), también como función de β (véase la Figura 14.4.3). Las intersecciones de estas gráficas son las soluciones. Las propiedades cualitativas del miembro derecho de (14.4.9) son fáciles: es siempre negativo, toma el valor cero para $\beta = 0$, y tiende a menos infinito para k tendiendo a $\frac{\omega}{c_2}$ (o lo que es lo mismo, para β tendiendo a $\omega L \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}$).

Observando entonces la Figura 14.4.3, concluimos que si $\omega L \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} < \frac{\pi}{2}$ no hay intersecciones y, por tanto, no hay modos que se propaguen a lo largo del núcleo central. Esto nos da una frecuencia de corte $\omega_c = \frac{\frac{\pi}{2}}{L \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}}} = \frac{\pi}{2L} \frac{c_1 c_2}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2}}$, por debajo

de la cual no hay modos del tipo de guía de ondas. Sin embargo, se tiene la situación que buscamos, en la que únicamente se propaga un modo a lo largo del núcleo de la fibra, si $\frac{\pi}{2} < \omega L \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}} < \frac{3\pi}{2}$, o lo que es lo mismo, $\frac{\pi}{2L} \frac{c_1 c_2}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2}} < \omega < \frac{3\pi}{2L} \frac{c_1 c_2}{\sqrt{c_2^2 - c_1^2}}$. Es interesante señalar que si c_2 es sólo ligeramente mayor que c_1 , el intervalo de frecuencias que soportan la única onda cuya energía viaja concentrada en el núcleo de la fibra es muy grande y corresponde a frecuencias grandes. Del resto de soluciones, ninguna viaja a lo largo de la fibra.

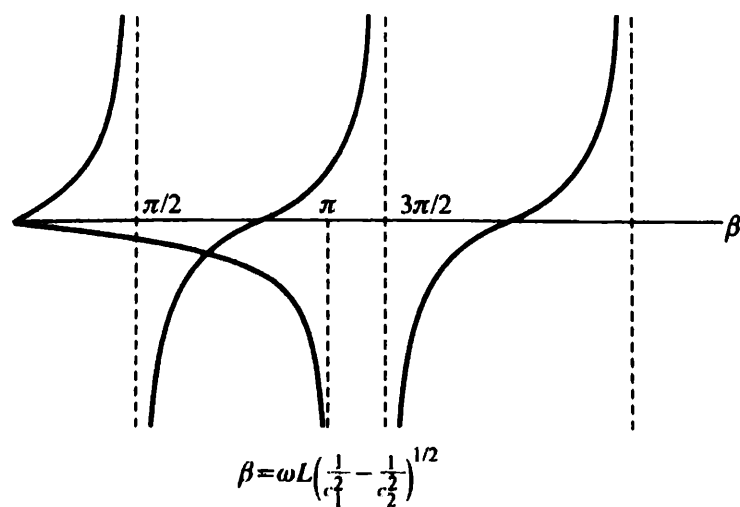


Figura 14.4.3: Solución gráfica de los modos de ondas viajeras en la fibra óptica.

EJERCICIOS 14.4

14.4.1. Determinar la relación de dispersión para los materiales descritos por (14.4.2) y (14.4.3) con energía principalmente en el núcleo:

- (a) Para modos simétricos.
- (b) Para modos antisimétricos con la condición de contorno, en la interfase entre los dos materiales, de que u y $c \frac{\partial u}{\partial y}$ sean continuas.
- (c) Para modos antisimétricos donde el revestimiento es finito, $L < y < H$, y con la condición $u = 0$ para $y = H$.
- (d) Para modos simétricos donde el revestimiento es finito, $L < y < H$, y con la condición $u = 0$ para $y = H$.

14.4.2. Determinar la relación de dispersión para modos antisimétricos descritos por (14.4.2) y (14.4.3) en los que la energía está distribuida entre el núcleo y el revestimiento.

14.4.3. Para los modos antisimétricos descritos en (14.4.2) y (14.4.3), determinar las frecuencias para las que las ondas no se propagan por el núcleo ni por el revestimiento.

14.4.4. Determinar la relación de dispersión para una fibra óptica con una sección circular, resolviendo la ecuación de ondas tridimensional con coeficientes c_1 para $r < L$ y c_2 para $r > L$ (con la condición u y $\frac{\partial u}{\partial r}$ continuas para $r = L$), con energía concentrada principalmente en el núcleo:

- (a) Suponiendo que las soluciones son radiales.
- (b) Suponiendo que las soluciones no son radiales.
- (c) Suponiendo que las soluciones son radiales y que el revestimiento es finito, $L < y < H$, y con la condición $u = 0$ para $y = H$.

14.5. Velocidad de grupo II y método de la fase estacionaria

Las ecuaciones dispersivas lineales con una relación de dispersión $\omega = \omega(k)$, tienen sus soluciones de la forma

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} G(k) e^{it(k \frac{x}{t} - \omega(k))} dk. \quad (14.5.1)$$

La función $G(k)$ está relacionada con la transformada de Fourier del dato inicial $u(x, 0)$. Aunque esta integral puede evaluarse numéricamente para cada x y t fijos, el procedimiento es largo y tedioso, y poco se puede aprender así sobre la propia ecuación. Existe, sin embargo, una forma analítica de aproximar estas integrales para valores grandes de t (con $\frac{x}{t}$ fijo), que es bien conocida dentro del análisis matemático y que pasamos a discutir ahora.

14.5.1. Método de la fase estacionaria

Comenzaremos analizando integrales paramétricas, dependiendo de un parámetro t :

$$I(t) = \int_a^b G(k) e^{it\phi(k)} dk. \quad (14.5.2)$$

Más adelante, particularizaremos nuestros resultados a ondas dispersivas lineales donde las integrales vienen dadas por (14.5.1). Para valores grandes de t , el integrando en (14.5.2) oscila rápidamente, como puede verse en la Figura 14.5.1. Esperamos, por tanto, que se produzca una gran cancelación y que la integral $I(t)$ sea pequeña para t grande. En los ejercicios se muestra (integrando por partes) que

$$I(t) = O\left(\frac{1}{t}\right) \text{ si } \phi'(k) \neq 0.$$

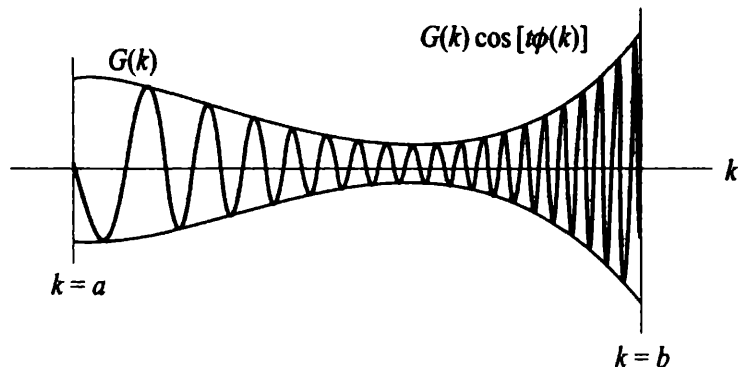


Figura 14.5.1: Cancelación en la integral oscilatoria (t grande).

La fórmula de integración por partes incluye una integral y un término frontera. En dominios infinitos la contribución en la frontera se anula, y mediante una segunda integración por partes la integral es, a menudo, más pequeña. Si $\phi(k)$ tiene derivada cero en algún punto ($\phi'(k_0) = 0$), entonces hay menos cancelación. La parte del integrando contribuye más. Afirmamos que para t grande, la mayor contribución de la integral (14.5.2) se produce cerca de los puntos donde la fase es **estacionaria**, es decir, cerca de los puntos k_0 donde

$$\phi'(k_0) = 0. \quad (14.5.3)$$

Supongamos primero que $\phi(k)$ tiene un único punto estacionario entre a y b . La mayor contribución de la integral procede de un pequeño entorno alrededor de k_0 ,

de manera que para t grande

$$I(t) \sim \int_{k_0-\varepsilon}^{k_0+\varepsilon} G(k) e^{it\phi(k)} dk,$$

donde ε es pequeño (y para justificar esta aproximación debemos hacer que ε tienda a cero de alguna manera para $t \rightarrow \infty$). Más aún, $G(k)$ puede aproximarse por $G(k_0)$ (si $G(k_0) \neq 0$) y $\phi(k)$ puede aproximarse por su serie de Taylor alrededor de $k = k_0$:

$$I(t) \sim G(k_0) \int_{k_0-\varepsilon}^{k_0+\varepsilon} e^{it\{\phi(k_0) + \frac{(k-k_0)^2}{2!} \phi''(k_0) + \frac{(k-k_0)^3}{3!} \phi'''(k_0) + \dots\}} dk,$$

usando (14.5.3). Si suponemos que ε es suficientemente pequeño, de manera que para t grande se tiene que $\varepsilon^3 t$ es todavía pequeño, entonces el término $e^{it \frac{(k-k_0)^3}{3!} \phi'''(k_0)}$ puede aproximarse por 1. Así,

$$I(t) \sim G(k_0) e^{it\phi(k_0)} \int_{k_0-\varepsilon}^{k_0+\varepsilon} e^{it \frac{(k-k_0)^2}{2!} \phi''(k_0)} dk.$$

Para simplificar el exponente del integrando, utilizamos el siguiente cambio de variables

$$y = (k - k_0) \left(\frac{t |\phi''(k_0)|}{2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

de manera que

$$I(t) \sim \frac{\sqrt{2} G(k_0) e^{it\phi(k_0)}}{(t |\phi''(k_0)|)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\varepsilon \left(\frac{t |\phi''(k_0)|}{2} \right)^{\frac{1}{2}}}^{+\varepsilon \left(\frac{t |\phi''(k_0)|}{2} \right)^{\frac{1}{2}}} e^{i(\text{sign} \phi''(k_0)) y^2} dy.$$

Podemos elegir ε tal que $\varepsilon t^{\frac{1}{2}}$ sea grande para $t \rightarrow \infty$. Sin embargo, recordemos que $\varepsilon^3 t$ debe ser pequeño (para aquellos lectores escépticos, ambas condiciones pueden satisfacerse a la vez eligiendo $\varepsilon = t^{-p}$ con p cualquier exponente entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$). De esta manera, los límites tienden a $\pm\infty$ para $t \rightarrow \infty$. Por tanto,

$$I(t) \sim \frac{2\sqrt{2} G(k_0) e^{it\phi(k_0)}}{(t |\phi''(k_0)|)^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\infty} e^{i(\text{sign} \phi''(k_0)) y^2} dy.$$

Esta última integral es únicamente un número, aunque un número especialmente interesante. Es conocido que

$$\int_0^{\infty} \cos(y^2) dy = \int_0^{\infty} \text{sen}(y^2) dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Con un poco de juego de manos (un poco de álgebra basada en la igualdad $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$), obtenemos lo que se denomina

Método de la fase estacionaria

El desarrollo asintótico de la integral $I(t) = \int_a^b G(k)e^{it\phi(k)} dk$ para $t \rightarrow \infty$, viene dado por

$$I(t) \sim \left(\frac{2\pi}{t|\phi''(k_0)|} \right)^{\frac{1}{2}} G(k_0) e^{it\phi(k_0)} e^{i(\text{sign}\phi''(k_0))\frac{\pi}{4}}, \quad (14.5.4)$$

(suponiendo que existe un punto estacionario simple k_0 con $\phi'(k_0) = 0$, $\phi''(k_0) \neq 0$).

El símbolo \sim (se lee “asintóticamente equivalente a”) significa que el miembro de la derecha es una buena aproximación al miembro de la izquierda y que la aproximación mejora cuando t crece. La parte más importante de este resultado es que $I(t)$ es pequeño para t grande, pero mucho mayor que la contribución de las regiones sin puntos estacionarios:

$$I(t) = O\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right),$$

para un punto estacionario simple ($\phi'(k_0) = 0$, $\phi''(k_0) \neq 0$). La aproximación asintótica de la integral es precisamente la integral evaluada en el punto estacionario, multiplicada por un factor de amplitud y de desfase. En muchas aplicaciones el factor de desfase no es particularmente importante.

Si existe más de un punto estacionario, la aproximación de la integral no es más que la suma de las contribuciones de cada punto estacionario, pues la integral se puede descomponer en intervalos, cada uno con un único punto estacionario.

14.5.2. Aplicación a ondas dispersivas lineales

Consideremos ahora una ecuación en derivadas parciales lineal dispersiva, con soluciones elementales en la forma $e^{i(kx-\omega t)}$, donde ω satisfaga la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$. Para la solución del problema de valores iniciales asociado, cada modo tiene la forma

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx-\omega(k)t)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{it(k\frac{x}{t}-\omega(k))} dk, \quad (14.5.5)$$

donde $A(k)$ viene determinado por la transformada de Fourier del dato inicial. En general, esta integral no puede calcularse en forma explícita, por lo que se suele recurrir a métodos numéricos de aproximación. Sin embargo, poco se puede deducir por este método sobre el fenómeno físico subyacente al problema. Usando el método de la fase estacionaria podemos obtener importantes propiedades sobre

el comportamiento asintótico para x y t grandes. Asumiremos entonces que t es grande (manteniendo $\frac{x}{t}$ fijo). En este caso tendremos que las cancelaciones harán que la integral sea pequeña. La mayor contribución en la integral (14.5.5), si t es grande, se producirá cerca de cada punto k_0 donde la fase es estacionaria:

$$\frac{x}{t} = \omega'(k_0). \tag{14.5.6}$$

Dados x y t , la Fórmula (14.5.6) determina el punto estacionario k_0 . Como puede verse en la Figura 14.5.2, es posible que exista más de un punto estacionario (en cuyo caso, la solución es la suma de términos en la forma estudiada). El método de la fase estacionaria (14.5.4) implica la siguiente aproximación para x y t grandes

$$u(x, t) \sim A(k_0) \left| \frac{2\pi}{t\omega''(k_0)} \right|^{\frac{1}{2}} e^{i(k_0x - \omega(k_0)t)} e^{-i(\text{sign}\omega''(k_0))\frac{\pi}{4}}, \tag{14.5.7}$$

pues $\phi'' = -\omega''$, donde k_0 satisface (14.5.6) (no consideramos en nuestra discusión el factor de desfase, normalmente constante). La solución (14.5.7) se parece a una onda viajera plana con número de onda k_0 y frecuencia $\omega(k_0)$, con amplitud decreciente, aunque es un poco más complicada, pues el número de onda y la frecuencia no son constantes. El número de onda depende de x y t , y verifica (14.5.6). Sin embargo, el número de onda y la frecuencia se pueden considerar constantes, pues su variación en el tiempo y en el espacio es muy pequeña. Se dice entonces que la solución es una **onda dispersiva de variación lenta**.

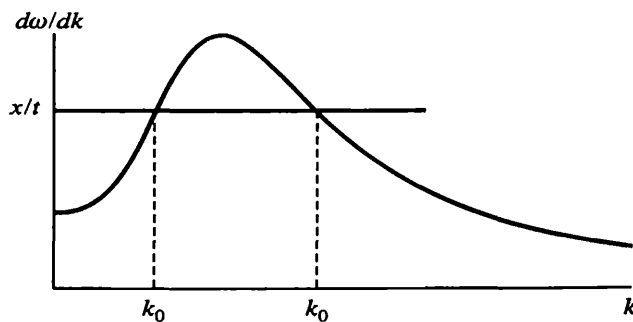


Figura 14.5.2: Dos puntos estacionarios.

La Ecuación (14.5.6) muestra la importancia de la velocidad de grupo. El número de onda es una función de x y t . Para entender cómo viaja este número de onda, consideremos un dato inicial en el que todos los números de onda están concentrados cerca de $x = 0$ y $t = 0$ (esta hipótesis es razonable, pues estamos aproximando la solución para valores grandes de x y, desde este punto, el dato inicial está concentrado cerca del origen). Entonces, (14.5.6) implica que en tiempos posteriores

cada número de onda se localiza en los puntos correspondientes a si el **número de onda se mueve con la velocidad de grupo** $\omega'(k_0)$. Un estudio más detallado (y más avanzado) mostraría que la energía viaja con la velocidad de grupo, no con la velocidad de fase. La energía se propaga con los números de onda. Si hay una velocidad de grupo máxima, la energía no puede viajar más rápido que ella. En una posición tal que $\frac{x}{t}$ es mayor que la velocidad de grupo máxima, entonces no hay puntos estacionarios y la solución (14.5.5) es mucho más pequeña de lo que predice el método de la fase estacionaria, (14.5.7).

La amplitud decrece (cuando $t \rightarrow \infty$), pues la ecuación es dispersiva. La solución se compone de ondas de diferentes longitudes y sus correspondientes velocidades de fase son diferentes. La onda se esparce (se dispersa).

EJERCICIOS 14.5

14.5.1. Resolver el problema de valores iniciales para la ecuación $u_t = u_{xxx}$. Aproximar la solución para x y t grandes usando el método de la fase estacionaria.

- (a) Escribir el número de onda en términos de x y t .
- (b) Dibujar líneas en el plano espacio-tiempo, a lo largo de las cuales el número de onda es constante.
- (c) Dibujar líneas en el plano espacio-tiempo, a lo largo de las cuales la fase es constante (llamadas líneas de fase).

14.5.2. Resolver el problema de valores iniciales para la ecuación $u_t = iu_{xx}$. Aproximar la solución para x y t grandes, usando el método de la fase estacionaria.

- (a) Escribir el número de onda en términos de x y t .
- (b) Dibujar las líneas a lo largo de las cuales el número de onda es constante.
- (c) Dibujar las líneas de fase.

14.5.3. Considérese la relación de dispersión $\omega = \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2$.

- (a) Encontrar una ecuación en derivadas parciales que tenga esta relación de dispersión.
- (b) Determinar en el plano espacio-tiempo dónde existen 0, 1, 2, 3, ... ondas.

14.5.4. Considérese una onda dispersiva lineal en la forma (14.5.5). Supongamos que el máximo de $\omega'(k)$ está localizado en $k = k_0$. Esta situación corresponde también a la cáustica del arco iris, véase la Figura 14.6.8.

- (a) Demostrar que hay dos puntos estacionarios si $x < \omega'(k_0)t$, mientras que no existe ninguno si $x > \omega'(k_0)t$.
- (b) Determinar (pero no demostrar) cuál es el orden de magnitud de la onda envolvente en cada región.
- (c) Demostrar que $\omega''(k_0) = 0$ y, en general, $\omega'''(k_0) < 0$.

- (d) Para considerar una región cerca de $x = \omega'(k_0)t$, ponemos (para un λ pequeño)

$$\frac{x}{t} = \omega'(k_0) + \lambda. \tag{14.5.8}$$

Aproximar la integral en (14.5.5) por la integral sólo en esta región cerca de k_0 , para deducir la fórmula

$$u(x, t) \sim A(k_0)e^{i(k_0x - \omega(k_0)t)} \int_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} e^{it[\lambda(k - k_0) - \frac{(k - k_0)^3}{3!}\omega'''(k_0)]} dk.$$

- (e) Introducir el cambio de variables $k - k_0 = \frac{s}{\left|\frac{t\omega'''(k_0)}{2}\right|^{\frac{1}{3}}}$ y mostrar la necesidad de calcular el valor de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ps + \frac{1}{3}s^3)} ds$, donde $p = \frac{\lambda t^{\frac{2}{3}}}{\left|\frac{t\omega'''(k_0)}{2}\right|^{\frac{1}{3}}}$.
- (f) Se define la **función de Airy** mediante $Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(zs + \frac{1}{3}s^3) ds$, que verifica la ecuación diferencial $Ai''(z) = zAi(z)$ (no demostrarlo). Expresar la onda solución en términos de la función de Airy.
- (g) La función de Airy tiene el siguiente comportamiento asintótico para $z \rightarrow \pm\infty$:

$$Ai(z) \sim \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} |z|^{-\frac{1}{4}} \text{sen}\left(\frac{2}{3}|z|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right), & z \rightarrow -\infty, \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right), & z \rightarrow +\infty. \end{cases} \tag{14.5.9}$$

Utilizando estas fórmulas, demostrar que la solución tiene el decaimiento apropiado en cada región.

14.5.5. Demostrar, integrando por partes, que la integral de (14.5.2) verifica la igualdad $I(t) = O(\frac{1}{t})$ si $\phi'(k) \neq 0$.

14.5.6. Aproximar (para t grande) la integral $I(t)$ de (14.5.2), si existe un punto estacionario k_0 , tal que $\phi'(k_0) = 0$ y $\phi''(k_0) = 0$, pero $\phi'''(k_0) \neq 0$. No demostrar el resultado. ¿Cuál es el orden de magnitud para t grande?

14.5.7. Los coeficientes de las series de Fourier en senos y cosenos decaen para n grande. Si $f(x)$ es continua [y $f'(x)$ es regular a trozos], demostrar, integrando por partes (dos veces), que *para n grande*,

(a) $\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = O(\frac{1}{n^2})$.

(b) $\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = O(\frac{1}{n^2})$ si $f(0) = f(L) = 0$.

14.6. Ondas dispersivas de variación lenta (velocidad de grupo y cáusticas)

14.6.1. Soluciones aproximadas de ecuaciones en derivadas parciales dispersivas

En esta sección, veremos cómo obtener soluciones aproximadas a ecuaciones en derivadas parciales dispersivas. Algunos de los resultados que obtendremos se seguirán del método de la fase estacionaria (y sus generalizaciones). Sin embargo, trataremos de que el desarrollo de esta sección sea independiente de la anterior.

Como sabemos, las soluciones se componen de ondas dispersivas de la forma $Ae^{i(kx-\omega t)}$, donde la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$ viene determinada por la ecuación. Así, la solución toma la forma $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(kx-\omega(k)t)} dk$, de manera que el coeficiente $A(k)$ permite tomar datos iniciales arbitrarios. Sin embargo esta expresión es a menudo demasiado complicada para que sea útil. Nos gustaría poder considerar clases de soluciones un poco más complicadas que ondas viajeras elementales $Ae^{i(kx-\omega t)}$, que son siempre periódicas, y con amplitud A y número de onda (longitud de onda) constantes. Queremos suponer que para distancias muy grandes y durante grandes tiempos, existen soluciones con amplitudes y longitudes de onda variables. Por ejemplo, éstas pueden variar debido a datos iniciales en los que el número de onda y/o la amplitud no son constantes, sino que varían poco sobre grandes distancias. Consideramos entonces un **tren de ondas de variación lenta** con amplitud $A(x, t)$ y fase $\theta(x, t)$ variables:

$$u(x, t) = A(x, t)e^{i\theta(x, t)}. \quad (14.6.1)$$

El número de onda y la frecuencia varían de forma lenta y se definen como para una onda simple:

$$\text{número de onda de variación lenta} \quad k \equiv \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (14.6.2)$$

$$\text{frecuencia de variación lenta} \quad \omega \equiv -\frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (14.6.3)$$

A partir de (14.6.2) y (14.6.3), deducimos una ley de conservación,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (14.6.4)$$

llamada **ley de conservación de las ondas** (para una discusión más detallada véanse los Ejercicios 14.6.3 - 14.6.4). Afirmamos que en un medio uniforme, la frecuencia ω verifica la relación de dispersión usual

$$\boxed{\omega = \omega(k)}, \quad (14.6.5)$$

aunque la solución (14.6.1) para la que se ha deducido (14.6.5) no es una onda viajera elemental. La forma de obtener esta propiedad es utilizar métodos perturbativos, pero la deducción requiere de demasiados detalles técnicos para ser expuesta aquí.

Si se sustituye la relación de dispersión (14.6.5) en la ley de conservación de las ondas (14.6.4), obtenemos una ecuación de primer orden cuasilineal (de hecho, no lineal) para el número de onda $k(x, t)$:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} = 0. \quad (14.6.6)$$

El problema de valores iniciales asociado se puede resolver por el método de las características (véase la Sección 12.6):

$$\text{si } \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}, \text{ entonces } \frac{dk}{dt} = 0, \quad (14.6.7)$$

de donde se deduce que el número de onda se mantiene constante según avanza con la velocidad de grupo. Las características son líneas rectas pero, en general, no son paralelas (véase la Figura 14.6.1), pues la velocidad de la característica, la velocidad de grupo $\frac{d\omega}{dk}$, depende de k . El sistema acoplado de ecuaciones diferenciales obtenido es fácil de resolver. Si parametrizamos la característica (el observador móvil) a partir de la posición inicial ξ , $x(0) = \xi$, entonces, la solución de (14.6.7) es

$$k(x, t) = k(\xi, 0), \quad (14.6.8)$$

donde (14.6.7) implica la ecuación de las características (rectas)

$$x = \frac{d\omega}{dk}(k(\xi, 0))t + \xi. \quad (14.6.9)$$

Dados x y t , podemos intentar despejar ξ en (14.6.9), de manera que se puede considerar ξ como una función de x y t . Una vez que se ha obtenido $k(x, t)$, se puede determinar la fase integrando (14.6.2) y (14.6.3).

Se puede interpretar la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$ usando (14.6.2) y (14.6.3) como una ecuación en derivadas parciales para la fase:

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad (14.6.10)$$

ecuación denominada **ecuación de Hamilton-Jacobi**. En el caso específico en el que la ecuación original es la ecuación de ondas, la ecuación anterior (14.6.10) se denomina **ecuación eikonal**. Sin embargo, la manera más sencilla de resolver la misma es mediante el método de las características, como se ha descrito antes (véase también la Sección 12.7).

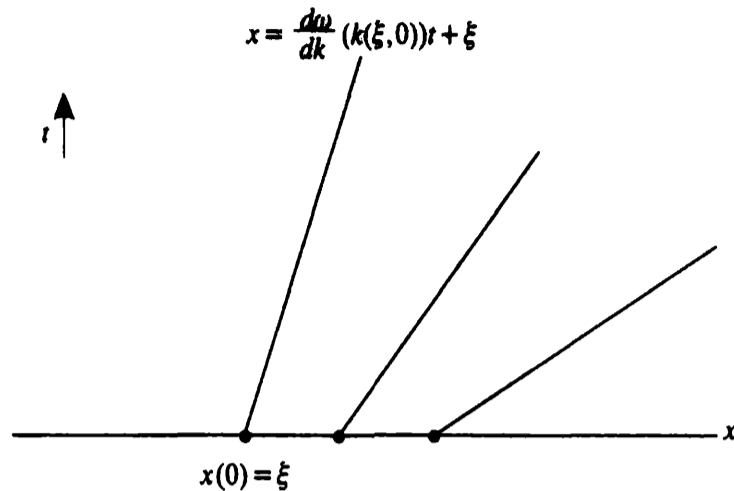


Figura 14.6.1: Características.

14.6.2. Formación de cáusticas

Consideremos una ecuación en derivadas parciales dispersiva lineal, con una relación de dispersión $\omega = \omega(k)$. Suponemos que existen soluciones en la forma de ondas de variación lenta $u(x, t) = A(x, t)e^{i\theta(x, t)}$, con $k \equiv \frac{\partial\theta}{\partial x}$ y $\omega \equiv -\frac{\partial\theta}{\partial t}$. El número de onda se propaga de acuerdo a la ecuación no lineal

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega'(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad (14.6.11)$$

que aproxima la ecuación original. Utilizando el método de las características podemos resolver (14.6.11), pero queremos estudiar aquí el caso en el que las características se cortan (véase la Figura 14.6.2). Supongamos que el dato inicial es tal que k es una función regular de x . Vamos a ver que se pueden elegir datos iniciales, de manera que el número de onda evoluciona pasando de ser una función univaluada a tomar tres valores en algún punto. Usando el método de las características tenemos ($\frac{dk}{dt} = 0$ si $\frac{dx}{dt} = \omega'(k)$) que:

$$k(x, t) = k(\xi, 0), \quad (14.6.12)$$

donde ξ es el punto de inicio de la característica para $t = 0$, y suponemos conocida la distribución inicial de k . La ecuación de las características es

$$x = \omega'(k(\xi, 0))t + \xi = F(\xi)t + \xi, \quad (14.6.13)$$

donde $F(\xi)$ es la velocidad de las características. Éstas son líneas rectas y en la Figura 14.6.2 pueden verse algunas de ellas. Las características se cortarán si las de la izquierda avanzan más deprisa que las de la derecha, $F'(\xi) < 0$ según se ve en la misma Figura 14.6.2.

Las características adyacentes se cortan en una curva llamada **cáustica** (y son visibles como una región más oscura). En la Figura 14.6.4, se muestra la gráfica,

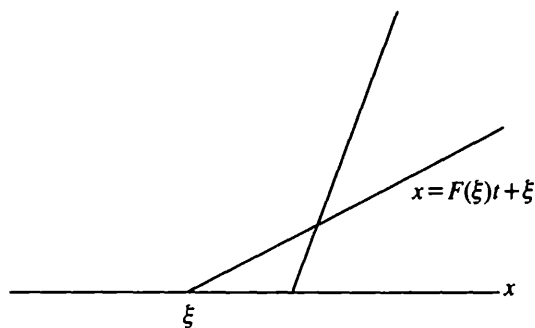


Figura 14.6.2: Intersección de características.

generada por ordenador, de la cáustica formada por una familia de características que verifican (14.6.13) (puede probarse que la amplitud $A(x, t)$ que predice la variación lenta considerada, así como la teoría de rayos o la óptica geométrica, se hace infinito en la cáustica). Este fenómeno es el mismo que aparece en la concentración de ondas lumínicas, y es por ello que se denomina cáustica (la palabra cáustica, procedente del griego, quiere decir *con capacidad de quemar*, como la región en la que se concentran los rayos de luz para quemar un material). Las ondas de luz se pueden concentrar formando una cáustica, por ejemplo al rebotar en un reflector no parabólico (igualando el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión, como muestra la Figura 14.6.4). Observando detenidamente la figura, se pueden ver tres rayos reflejados por cada punto de la cáustica, mientras que sólo un rayo reflejado llega a cada punto fuera de la cáustica.

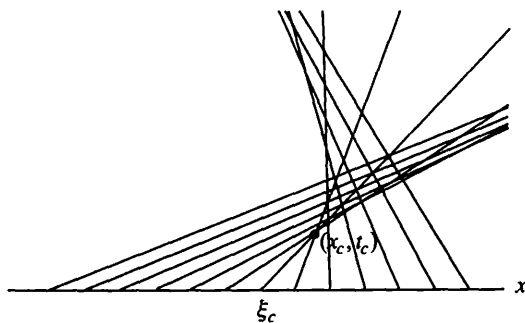


Figura 14.6.3: Cáustica formada a partir de las características.

Podemos obtener la cáustica [la envolvente de una familia de curvas (14.6.13)] de manera analítica, resolviendo simultáneamente (14.6.13) y su derivada respecto de ξ (según se describía en la Sección 12.6)

$$0 = F'(\xi)t + 1, \text{ es decir, } t = \frac{-1}{F'(\xi)}, \quad (14.6.14)$$

lo que determina el tiempo en que se produce la cáustica (para una característica dada). Para que este tiempo sea positivo, debemos suponer que el dato inicial es tal que $F'(\xi) < 0$ (la posición en el espacio de la cáustica es $x = -\frac{F(\xi)}{F'(\xi)} + \xi$, que nos

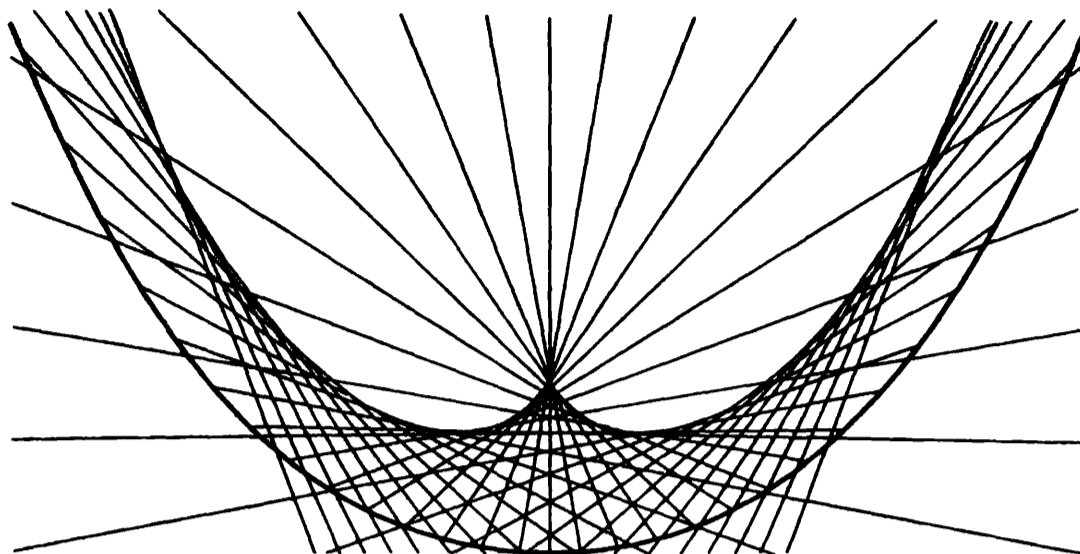


Figura 14.6.4: Cáustica formada a partir de rayos reflejados en un reflector no parabólico.

da la representación paramétrica de la cáustica). Se puede probar que $\frac{\partial k}{\partial x}$ es infinito en la cáustica, por lo que ésta es el lugar geométrico de los puntos de retorno de la curva de número de onda, que toma tres valores en ellos. En la cáustica se funden dos soluciones.

El primer instante en que comienza a formarse la cáustica es aquél para el cual

$$t_c = \frac{-1}{F'(\xi_c)} \quad \text{y} \quad x_c = F(\xi_c)t_c + \xi_c, \quad (14.6.15)$$

donde ξ_c es el punto donde $F'(\xi)$ tiene un mínimo negativo (véase la Figura 14.6.5), de manera que

$$F''(\xi_c) = 0, \quad (14.6.16)$$

con

$$F'''(\xi_c) > 0. \quad (14.6.17)$$

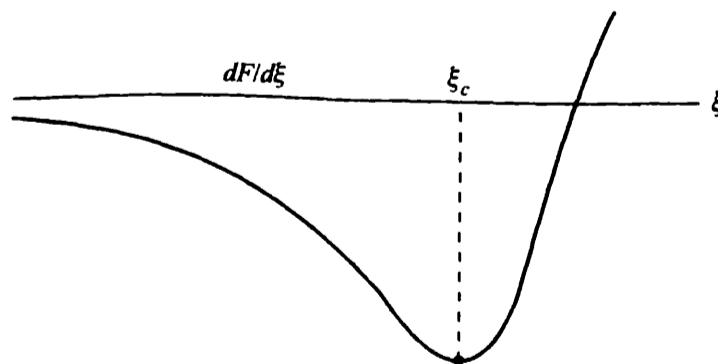


Figura 14.6.5: Mínimo (primera intersección).

Veremos que la cáustica tiene forma de pico en el entorno del punto en que empieza a formarse. Supongamos que x está cerca de x_c y t está cerca de t_c , es

decir, el parámetro ξ está cerca de ξ_c . Se puede determinar la solución en términos de ξ :

$$k(x, t) = k(\xi, 0) = k(\xi_c, 0) + k_\xi(\xi_c, 0)(\xi - \xi_c) + \dots \quad (14.6.18)$$

Así, el número de onda es aproximadamente constante, y la dependencia espacial y temporal del número de onda es aproximadamente proporcional a $\xi - \xi_c$. Para determinar la dependencia de $\xi - \xi_c$ en x y t (cerca del primer instante de formación de la cáustica), aproximamos la característica (14.6.13) para ξ cerca de ξ_c . Desarrollando $F(\xi)$ en su serie de Taylor, obtenemos

$$x = F(\xi_c)t + \xi_c + (\xi - \xi_c)[F'(\xi_c)t + 1] + \frac{(\xi - \xi_c)^2}{2!}F''(\xi_c)t + \frac{(\xi - \xi_c)^3}{3!}F'''(\xi_c)t \dots \quad (14.6.19)$$

Observando que $t = t_c + t - t_c$, entonces, usando (14.6.15) y (14.6.16), tenemos que (14.6.19) se convierte en

$$x - x_c - F(\xi_c)(t - t_c) = (\xi - \xi_c)F'(\xi_c)(t - t_c) + \frac{(\xi - \xi_c)^3}{3!}F'''(\xi_c)t_c, \quad (14.6.20)$$

donde hemos aproximado en esta última expresión el tiempo t por t_c , pues $t - t_c$ es pequeño. La Ecuación (14.6.20) muestra la importancia de $F'(\xi_c)$, la velocidad de la característica crítica (la velocidad de grupo).

La Ecuación (14.6.20) es una ecuación **cúbica**. Cada raíz corresponde a una característica para x y t dados. Si hay tres raíces, entonces hay tres características distintas que pasan por el mismo punto, y la solución [$\xi - \xi_c$, o lo que es lo mismo, $k(x, t)$] tomaría tres valores. En la Figura 14.6.6 vemos que para $t < t_c$ hay únicamente una raíz, pero si $t > t_c$, entonces hay tres raíces reales en el interior de una región especificada (y una raíz fuera de esta región). Derivando (14.6.20) respecto de x , se puede ver que $\frac{\partial \xi}{\partial x} \neq \infty$ para $t < t_c$ (correspondiente a una raíz), mientras que $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \infty$ para dos valores diferentes de ξ , si $t > t_c$ (correspondiente a tres raíces):

$$1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} [F'(\xi_c)(t - t_c) + \frac{(\xi - \xi_c)^2}{2!}F'''(\xi_c)t_c]. \quad (14.6.21)$$

Para llegar a esta conclusión debemos recordar que $F'(\xi_c) < 0$ y $F'''(\xi_c) > 0$. Las **cáusticas** son los lugares geométricos de los puntos donde $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \infty$ y, por tanto, vienen dados por $\xi - \xi_c = \mp \left(\frac{-2F'(\xi_c)}{t_c F'''(\xi_c)} \right)^{\frac{1}{2}} (t - t_c)^{\frac{1}{2}}$. Usando (14.6.20), obtenemos que las cáusticas tienen **forma de pico** (véase la Figura 14.6.7) y se localizan en los puntos

$$x - x_c - F(\xi_c)(t - t_c) = \pm \frac{2}{3} (-F'(\xi_c))^{\frac{3}{2}} (2t_c F'''(\xi_c))^{\frac{1}{2}} (t - t_c)^{\frac{3}{2}}.$$

La solución toma tres valores si $t > t_c$, y

$$|x - x_c - F(\xi_c)(t - t_c)| < \frac{2}{3} (-F'(\xi_c))^{\frac{3}{2}} (2t_c F'''(\xi_c))^{\frac{1}{2}} (t - t_c)^{\frac{3}{2}}.$$

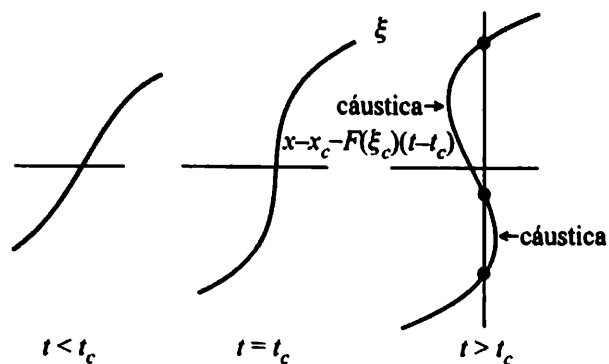


Figura 14.6.6: Soluciones regulares que pasan a ser multivaluadas.

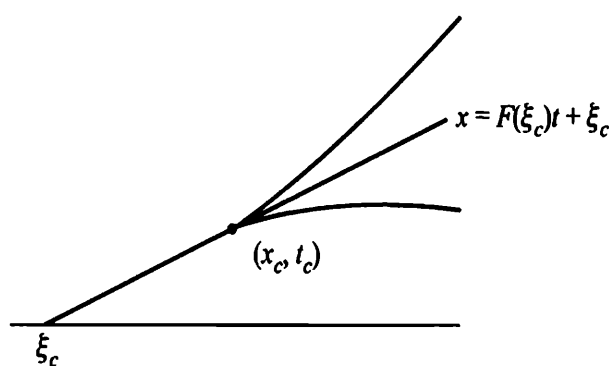


Figura 14.6.7: Cáustica con forma de pico

Las características forman una cáustica. Las ondas reflejadas en un reflector no parabólico forman este tipo de cáusticas, según puede verse en la Figura 14.6.3. Cerca de una cáustica no son válidas las aproximaciones que se obtienen a partir de la ecuación en derivadas parciales (14.6.11). En su lugar, debemos volver a la ecuación original y obtener una solución diferente. La solución multivaluada que predice el método de las características no tiene sentido y corresponde a la superposición lineal de tres ondas de variación lenta. En las siguientes secciones explicaremos este fenómeno (cuando las características se cortan y forman una cáustica, la energía se concentra y la amplitud crece en gran medida, pero no se hace infinita como predice la teoría de las ondas de variación lenta, la teoría de rayos o la óptica geométrica).

En los ejercicios se describe un tipo distinto de cáustica que separa dos regiones, una con dos rayos y una sin rayos. Ésta es la explicación del arco iris. Los rayos paralelos procedentes del sol (véase la Figura 14.6.8) pasan a través de las gotas de lluvia (usando la ley de refracción de Snell) antes de reflejarse internamente. Existe un ángulo mínimo para el que la intensidad es grande. La velocidad de onda de la luz en el agua depende ligeramente de la longitud de onda (color), por lo que el ángulo mínimo es ligeramente diferente para cada color. Se obtiene, así, el arco iris usual.

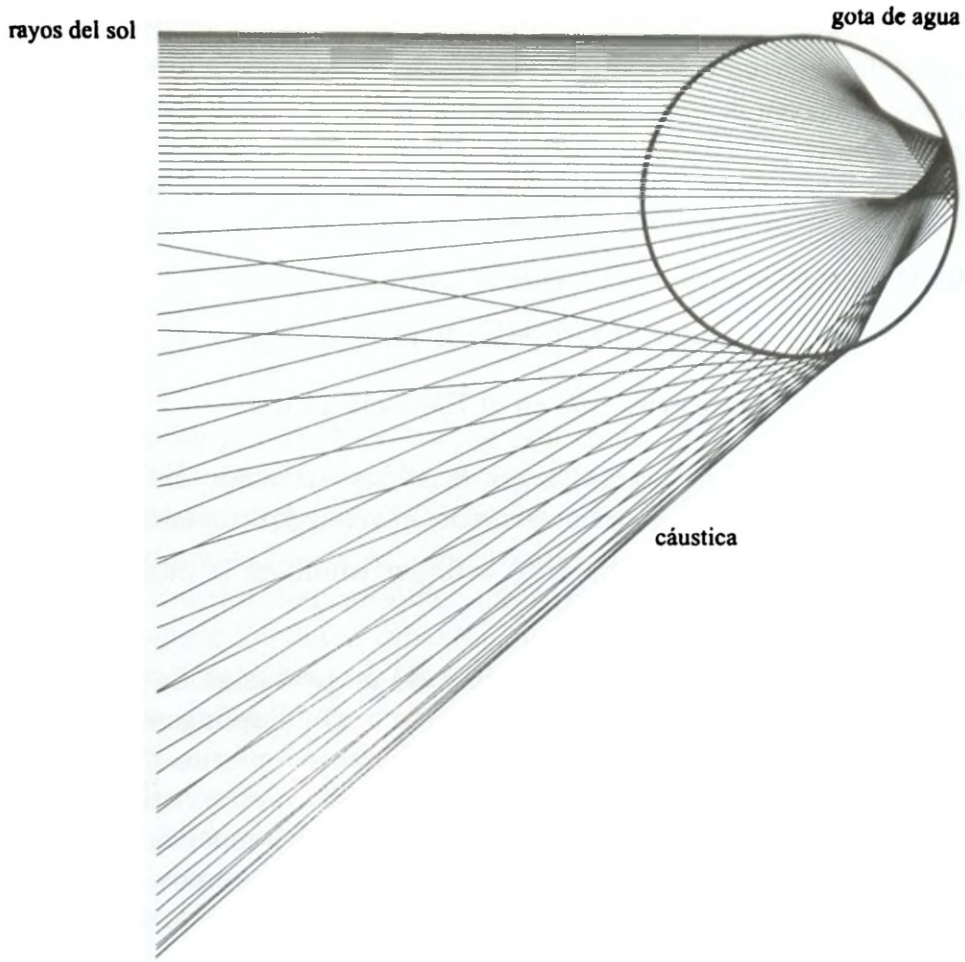


Figura 14.6.8: Cáustica formada mediante refracción y reflexión a través de una gota de agua.

EJERCICIOS 14.6

- 14.6.1.** La solución (14.5.7) obtenida por el método de la fase estacionaria tiene fase $\theta(x, t) = k_0 x - \omega(k_0)t$, donde k_0 es una función de x y t dada por la Fórmula (14.5.6) para un punto estacionario. Determinar k y ω definidas por (14.6.2) y (14.6.3).
- 14.6.2.** En una guía de ondas rectangular uniforme, sabemos que, para un modo particular, se tiene $\omega^2 = c^2[k^2 + (\frac{n\pi}{L})^2 + (\frac{m\pi}{H})^2]$. Considérese una guía de ondas rectangular de variación lenta en un medio uniforme, donde la anchura $L = L(x)$ varía lentamente en la dirección de propagación. Afirmamos que

$$\omega^2 = c^2 \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{L(x)} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2 \right].$$

¿Qué ecuación en derivadas parciales verifica el número de onda $k(x, t)$? No resolverla.

14.6.3. Supongamos que la cantidad de ondas se conserva. La cantidad de ondas por unidad de longitud es $\frac{k}{2\pi}$, mientras que la cantidad por unidad de tiempo es $\frac{\omega}{2\pi}$. Fijémonos en la cantidad de ondas localizadas entre dos puntos fijos $x = a$ y $x = b$.

- (a) Explicar por qué esta cantidad es $\frac{1}{2\pi} \int_a^b k(x, t) dx$.
- (b) Demostrar que $\frac{d}{dt} \int_a^b k(x, t) dx = \omega(a, t) - \omega(b, t)$.
- (c) Usando el apartado (b), deducir la identidad $\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$.

14.6.4. En las mismas condiciones que en el Ejercicio 14.6.3:

- (a) ¿Por qué $\frac{d}{dt} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} k(x, t) dx = 0$, si los extremos del intervalo no son constantes sino que se mueven con la velocidad de fase.
- (b) Deducir la identidad $\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$, derivando en la integral del apartado (a).

14.6.5. Cáustica regular. Las características de un problema de ondas dispersivas de tipo (14.6.11) verifican (14.6.12) y (14.6.13). Supongamos que, en algún punto del plano espacio-tiempo, existe una característica ξ_c que separa una región con dos características de una región sin características, como ocurre para las cáusticas regulares de la Figura 14.6.3. La cáustica verifica (14.6.14) de manera que se cumple también (14.6.15). Supondremos, sin embargo, que $F''(\xi_c) \neq 0$. Si ξ está cerca de ξ_c , entonces se tiene el desarrollo (14.6.18).

- (a) Demostrar que, para x cerca de x_c y t cerca de t_c , se verifica la siguiente fórmula **cuadrática** en lugar de la fórmula cúbica (14.6.20):

$$x - x_c - F(\xi_c)(t - t_c) = (\xi - \xi_c)F'(\xi_c)(t - t_c) + \frac{(\xi - \xi_c)^2}{2!} F''(\xi_c)t_c. \quad (14.6.22)$$

- (b) ¿En qué regiones hay dos características o ninguna característica? Usar (14.6.22) y comprobar que la respuesta depende del signo de $F''(\xi_c)$.

(En secciones posteriores de este capítulo se pueden encontrar más ejercicios sobre cáusticas regulares.)

14.7. Ecuaciones de la envolvente (números de onda concentrados)

En las ecuaciones dispersivas que hemos visto, existen soluciones particulares en forma de onda viajera $u(x, t) = A e^{i(kx - \omega(k)t)}$, donde el número de onda k es constante. Las soluciones generales de las ecuaciones se obtienen como una superposición de estas ondas para todos los posibles números de onda, usando para ello la transformada de Fourier. El análisis de las soluciones generales es más bien complicado.

Por ello, intentaremos obtener más información acerca del problema considerando algunas situaciones particulares especialmente importantes.

Un primer ejemplo ha sido estudiado en la Sección 14.6, donde suponíamos que el número de onda variaba lentamente. Aquí supondremos, por el contrario, que la mayor parte de la energía está concentrada en un único número de onda k_0 . Suponemos entonces que la solución de la ecuación original tiene la forma:

$$u(x, t) = A(x, t)e^{i(k_0x - \omega(k_0)t)}. \quad (14.7.1)$$

Suponemos que la amplitud $A(x, t)$ no es constante, sino que varía lentamente en el espacio y en el tiempo. La amplitud $A(x, t)$ actúa como una **envolvente** de la onda viajera y nuestro propósito es determinar la ecuación en derivadas parciales que describe la propagación de esa envolvente $A(x, t)$. Existen varias maneras de que la energía se concentre en un único número de onda:

1. Se pueden elegir los datos iniciales con un único número de onda y con amplitud de variación lenta como en (14.7.1).

2. Se sabe que datos iniciales arbitrarios que contienen todos los números de onda se dispersan, y que éstos se mueven con la velocidad de grupo. Si estamos estudiando la solución en alguna región espacial particular, la energía se puede concentrar en un único número de onda en esa región.

3. Las líneas a lo largo de las cuales el número de onda es constante pueden concentrarse y formar una cáustica y, por tanto, la energía se concentra en un número de onda.

Queremos determinar la ecuación en derivadas parciales que verifica la envolvente $A(x, t)$ para una ecuación de ondas dispersiva general. Observemos primero que como $u(x, t) = e^{i(kx - \omega(k)t)}$ es una solución exacta, entonces $A(x, t)$ debe tener la forma especial sencilla

$$A(x, t) = e^{i(k-k_0)x - i(\omega - \omega_0)t},$$

donde $\omega = \omega(k)$ y $\omega_0 = \omega(k_0)$. Vemos que $\frac{\partial A}{\partial x} = i(k - k_0)A$ y $\frac{\partial A}{\partial t} = -i(\omega - \omega_0)A$. En otras palabras, los operadores de derivación actuando sobre la amplitud corresponden a multiplicar por un factor fijo:

$$-i \frac{\partial}{\partial x} \iff (k - k_0), \quad (14.7.2)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \iff (\omega - \omega_0). \quad (14.7.3)$$

La ecuación en derivadas parciales para la amplitud de la onda se obtiene de la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$. Como hemos asumido que la energía se concentra en un único número de onda k_0 , podemos desarrollar la relación de dispersión en una serie de Taylor alrededor de este número de onda especial k_0 :

$$\omega = \omega(k_0) + (k - k_0)\omega'(k_0) + (k - k_0)^2 \frac{\omega''(k_0)}{2!} + (k - k_0)^3 \frac{\omega'''(k_0)}{3!} + \dots \quad (14.7.4)$$

Restando $\omega(k_0)$, usando las relaciones anteriores y dividiendo por i , se obtiene la ecuación de la envolvente de la onda:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'(k_0) \frac{\partial A}{\partial x} = i \frac{\omega''(k_0)}{2!} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\omega'''(k_0)}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} + \dots \quad (14.7.5)$$

Vemos la importancia de la velocidad de grupo $c_g = \omega'(k_0)$. Se puede obtener este mismo resultado usando métodos de perturbaciones.

14.7.1. Ecuación de Schrödinger

Para poder truncar la serie de Taylor (14.7.4) con un error pequeño, debemos suponer que $k - k_0$ es pequeño. Usando (14.7.2), se sigue que las derivadas espaciales de la envolvente deben ser pequeñas. Esta propiedad se corresponde con la suposición de una amplitud de onda de variación lenta a la que aludíamos antes. Para que se verifique la ecuación de la envolvente (14.7.5), la amplitud de onda no debe variar mucho sobre una longitud de onda $\frac{2\pi}{k_0}$. Todas las derivadas parciales de la amplitud en (14.7.5) son más pequeñas. Por tanto, si $\omega''(k_0) \neq 0$, podemos justificar el uso de la ecuación de Schrödinger,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'(k_0) \frac{\partial A}{\partial x} = i \frac{\omega''(k_0)}{2!} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \quad (14.7.6)$$

que resulta de aproximar la ecuación de la envolvente ignorando las derivadas de orden superior al segundo. Siempre que la energía se concentre en un único número de onda (lo que se denomina aproximación **casi monocromática**), es decir, $u(x, t) \approx A(x, t)e^{i(k_0x - \omega(k_0)t)}$, la amplitud de la onda, o lo que es lo mismo, la envolvente de la onda, verifica la ecuación de Schrödinger (14.7.6). La ecuación de Schrödinger es una ecuación en derivadas parciales lineal con soluciones particulares en la forma de ondas planas $A = e^{i(\alpha x - \Omega(\alpha)t)}$, por lo que la relación de dispersión es cuadrática: $\Omega(\alpha) = \omega'(k_0)\alpha + \frac{\omega''(k_0)}{2!}\alpha^2$. Se puede obtener la solución de la ecuación de Schrödinger correspondiente a un dominio infinito mediante la transformada de Fourier:

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\alpha) e^{i[\alpha(x - \omega'(k_0)t) - \frac{\omega''(k_0)}{2!}\alpha^2 t]} d\alpha. \quad (14.7.7)$$

En esta aproximación casi monocromática el término dispersivo es muy pequeño. Sin embargo, no podemos ignorar esta dispersión si queremos entender el comportamiento a largo plazo. Las relaciones entre el espacio y el tiempo pueden entenderse mejor quizás mediante un cambio de variables a un sistema coordenado móvil, moviéndose con la velocidad de grupo:

$$X = x - \omega'(k_0)t, \quad (14.7.8)$$

$$T = t. \quad (14.7.9)$$

En este sistema coordinado móvil la ecuación de Schrödinger toma la forma más sencilla

$$\frac{\partial A}{\partial T} - \omega'(k_0) \frac{\partial A}{\partial X} + \omega'(k_0) \frac{\partial A}{\partial X} = \frac{\partial A}{\partial T} = i \frac{\omega''(k_0)}{2!} \frac{\partial^2 A}{\partial X^2}.$$

De esta manera, hemos eliminado las derivadas espaciales pequeñas con las derivadas temporales pequeñas (en el sistema coordinado móvil).

Cáusticas. El método de las características permite analizar de forma aproximada las ondas dispersivas lineales de variación lenta, pero sólo lejos de las cáusticas. Esta aproximación falla cerca de las cáusticas, donde las características concentran la energía. Así pues, cerca de una cáustica, la solución es más complicada. Para x cerca de x_c y t cerca de t_c , la energía de la onda se concentra en un único número de onda [el valor crítico $k_c = k(\xi_c, 0)$], de manera que $u(x, t) \approx A(x, t)e^{i(k_c(x-x_c) - \omega(k_c)(t-t_c))}$, y la amplitud de la onda $A(x, t)$ verifica de forma aproximada la ecuación de Schrödinger lineal, cuyas soluciones vienen dadas por (14.7.7). Queremos determinar la función compleja $G(\alpha) = R(\alpha)e^{i\Phi(\alpha)}$ que coincida con el comportamiento conocido de la cáustica:

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha) e^{i\Phi(\alpha)} e^{i[\alpha(x-x_c - \omega'(k_c)(t-t_c)) - \frac{\omega''(k_c)}{2!} \alpha^2(t-t_c)]} d\alpha. \quad (14.7.10)$$

Podemos aproximar esta solución exacta evaluando la fase en el valor de α para el que la fase es estacionaria:

$$x - x_c - \omega'(k_c)(t - t_c) - \omega''(k_c)\alpha(t - t_c) + \Phi'(\alpha) = 0. \quad (14.7.11)$$

Comparando (14.7.11) con la ecuación cúbica fundamental (14.6.20), vemos, en primer lugar, que $\alpha = k_\xi(\xi - \xi_c)$, pues (14.6.13) implica que $F' = \omega''k_\xi$. A partir de aquí, se sigue que $\Phi'(\alpha) = -\frac{\alpha^3}{3!} \frac{F'''(\xi_c)}{k_\xi^3} t_c$, por lo que $\Phi(\alpha) = -\frac{\alpha^4}{4!} \frac{F'''(\xi_c)}{k_\xi^3} t_c$. De esta manera obtenemos una representación integral de la solución en un entorno de la cúspide de la cáustica

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\alpha(x-x_c - \omega'(k_c)(t-t_c)) - \frac{\omega''(k_c)}{2!} \alpha^2(t-t_c) - \frac{\alpha^4}{4!} \frac{F'''(\xi_c)}{k_\xi^3} t_c]} d\alpha, \quad (14.7.12)$$

donde por simplicidad hemos tomado $R(\alpha) = 1$. La Fórmula (14.7.12) es conocida como **integral de Pearcey**, aunque parece ser que fue Brillouin quien la estudió primero.

14.7.2. Ecuación linealizada de Korteweg-de Vries

En general, la envolvente de la onda satisface la ecuación de Schrödinger (14.7.6). Sin embargo, si la energía de la onda está concentrada en un único número de onda y ese número de onda corresponde a un máximo o a un mínimo de la velocidad de

grupo $\omega'(k)$, entonces $\omega''(k_0) = 0$. En ese caso, la ecuación de la envolvente se suele aproximar por la **ecuación linealizada del Korteweg-de Vries**

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'(k_0) \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\omega'''(k_0)}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3}}, \quad (14.7.13)$$

que se obtiene directamente de (14.7.5). Aunque el término dispersivo es pequeño, no podemos despreciar su influencia sobre distancias grandes (la transformación dada por (14.7.8) y (14.7.9) puede ayudar a entender este efecto).

Ondas largas. La relación de dispersión que aparece en las ecuaciones en derivadas parciales procedentes de problemas físicos suele ser una función impar $\omega(-k) = -\omega(k)$, de manera que se obtiene la misma velocidad de fase para k y $-k$. Asumiremos, por tanto, aquí, que la relación de dispersión es impar. Las **ondas largas** son ondas cuya longitud de onda es mucho mayor que cualquier otra longitud característica del problema. Para estas ondas, el número de onda k es pequeño. La relación aproximada de dispersión para una onda larga se puede obtener a partir de la serie de Taylor de la relación de dispersión:

$$\omega(k) = \omega(0) + \omega'(0)k + \frac{\omega''(0)}{2!}k^2 + \frac{\omega'''(0)}{3!}k^3 + \dots = \omega'(0)k + \frac{\omega'''(0)}{3!}k^3 + \dots, \quad (14.7.14)$$

pues al ser la relación de dispersión una función impar, se tiene $\omega(0) = 0$ y $\omega''(0) = 0$. Por tanto, utilizando las identidades (14.2.7) y (14.2.8) ($k = -i\frac{\partial}{\partial x}$ y $\omega = i\frac{\partial}{\partial t}$), las ondas largas deberían verificar la ecuación linealizada de Korteweg-de Vries:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \omega'(0) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\omega'''(0)}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

Otra forma de entender esta deducción es la siguiente: si la energía se concentra en una única onda $k_0 = 0$ (ondas largas), entonces la amplitud de la onda verifica, a partir de (14.7.5), la ecuación

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'(0) \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\omega'''(0)}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} + \dots$$

Pero para ondas casi monocromáticas, se tiene $u(x, t) = A(x, t)e^{i(k_0x - \omega(k_0)t)} = A(x, t)$, pues $k_0 = 0$ y $\omega(0) = 0$. Así, la ecuación para la solución y para la envolvente es la misma. La velocidad de grupo para ondas largas (con relación de dispersión impar) se obtiene derivando (14.7.14), es decir, $\omega'(k) = \omega'(0) + \frac{\omega'''(0)}{2}k^2 + \dots$. Por tanto la velocidad de grupo tiene un mínimo o un máximo para las ondas largas ($k = 0$) y, así, son estas ondas largas las primeras o últimas que se observan. Para entender el modo en que se propagan las ondas largas se estudia la ecuación linealizada de Korteweg-de Vries. Como esta ecuación es dispersiva, las amplitudes serán muy pequeñas (como muestra el método de la fase estacionaria). El caso contrario, ondas largas con amplitudes grandes, se muestra en la siguiente sección y requiere una explicación alternativa.

14.7.3. Ondas dispersivas no lineales: ecuación de Korteweg-de Vries

En las ecuaciones dispersivas que acabamos de describir, es decir, en la ecuación de Schrödinger (14.7.6) y la ecuación linealizada de Korteweg-de Vries (14.7.13), hemos visto que se produce un balance entre las pequeñas variaciones espaciales y temporales (especialmente cuando se observan desde un sistema coordinado móvil). A menudo en los problemas físicos, se desprecian los términos no lineales pequeños, pero son también a menudo tan importantes como los pequeños términos dispersivos. Para cada aplicación específica se pueden obtener los términos no lineales específicos usando métodos de perturbaciones singulares de múltiples escalas (cuyo estudio se escapa del contenido de este texto). Por otro lado, estos términos no lineales suelen tener formas similares para problemas muy distintos, pues suelen aparecer a partir de desarrollos finitos de la amplitud del tipo de los polinomios de Taylor.

Para las ondas largas, el término no lineal usual da lugar a la **ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [\omega'(0) + \beta u] \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\omega'''(0)}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (14.7.15)$$

Si ignoramos de momento el término dispersivo $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, entonces (14.7.15) es una ecuación en derivadas parciales cuasilineal, resoluble por el método de las características. Se puede entender la velocidad característica $\omega'(0) + \beta u$ como la linealización alrededor de $u = 0$ (aproximación de amplitud pequeña) de alguna velocidad característica desconocida $f(u)$. Las ondas más altas se mueven más deprisa (o más despacio, dependiendo de β), y para condiciones iniciales regulares, se tienen pendientes cada vez mayores (llegando incluso a romperse). La obtención del coeficiente β a partir de las ecuaciones del movimiento para un problema específico requiere un esfuerzo suplementario, en general, usando métodos de perturbaciones correspondientes a ondas largas. La Ecuación (14.7.15) fue obtenida por primera vez por Korteweg y de Vries en 1895, cuando intentaban entender la aparición de ondas en la superficie del agua de los canales que mostraban una forma inusualmente persistente.

La ecuación KdV es un modelo en ecuaciones en derivadas parciales no lineales de gran interés, pues en él se pueden observar dos fenómenos físicos diferentes. En primer lugar, se espera que las soluciones de la ecuación KdV decaigan debido al término dispersivo. Sin embargo, el término no lineal hace que las pendientes de las ondas aumenten. Si nos movemos con la velocidad de grupo de la ecuación linealizada, y rescalamos x y u , obtenemos la forma estándar de la ecuación KdV:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (14.7.16)$$

Concentraremos nuestra discusión aquí en las ondas viajeras elementales de la ecuación KdV:

$$u(x, t) = f(\xi), \text{ donde } \xi = x - ct. \quad (14.7.17)$$

Si sustituimos (14.7.17) en 14.7.16), obtenemos una ecuación diferencial de tercer orden para el perfil f ,

$$f''' - cf' + 6ff' = 0,$$

que integrada una vez da lugar a una ecuación diferencial de segundo orden no lineal (del tipo de ecuaciones que aparecen en mecánica, $F = ma$, donde $a = f''$):

$$f'' + 3f^2 - cf - A = 0, \quad (14.7.18)$$

siendo A una constante. Multiplicando por f' e integrando otra vez, obtenemos una ecuación que correspondería a una ley de conservación de la energía [si (14.7.18) fuese la ley de Newton]:

$$\frac{1}{2}(f')^2 + f^3 - \frac{1}{2}cf^2 - Af = E, \quad (14.7.19)$$

siendo E la energía total constante (y donde $\frac{1}{2}(f')^2$ representa la **energía cinética** y $f^3 - \frac{1}{2}cf^2 - Af$ la **energía potencial**). En la Figura 14.7.1, se representa la energía potencial como función de f . Los puntos críticos del potencial verifican $3f^2 - cf - A = 0$, que corresponde a las soluciones de equilibrio de (14.7.18). El discriminante de esta ecuación cuadrática ($b^2 - 4ac$) es $c^2 + 12A$. Si $c^2 + 12A \leq 0$, entonces la energía potencial es monótona creciente, y se puede ver que las ondas viajeras no son acotadas. Por tanto, suponemos $c^2 + 12A > 0$, en cuyo caso existen dos estados de equilibrio. Las curvas de energía constante (en el gráfico de la energía potencial) nos permiten dibujar el plano de fases de la Figura 14.7.1. Observemos que uno de los estados de equilibrio es un punto silla (f_{\min}) y el otro es un centro.

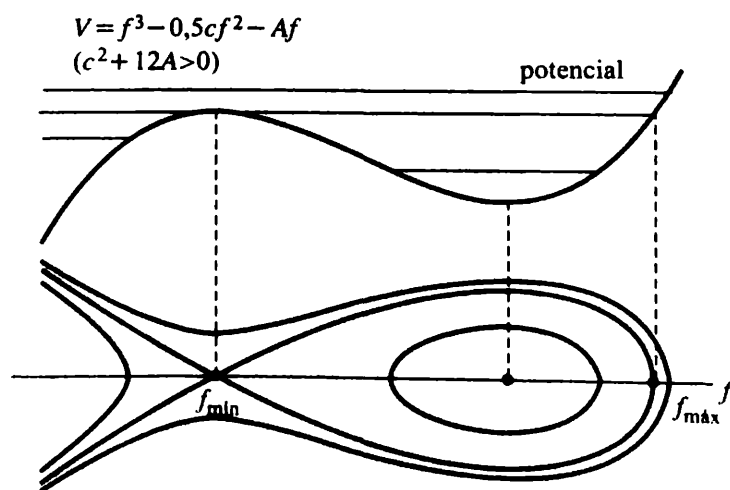


Figura 14.7.1: Curva de potencial y plano de fases para las ondas viajeras de la ecuación KdV.

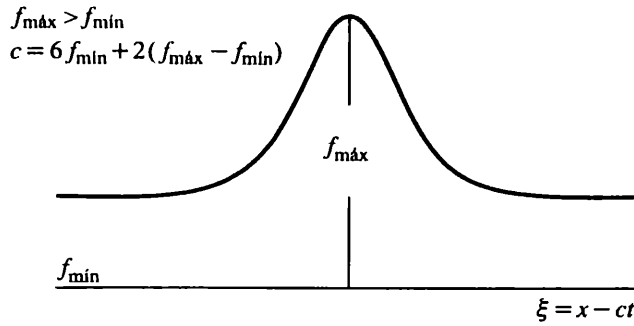


Figura 14.7.2: Ondas solitarias para la ecuación KdV.

Ondas viajeras periódicas (ondas cnoidales). La mayor parte de las ondas viajeras son periódicas. En los ejercicios se estudian algunas de sus propiedades.

Ondas viajeras solitarias. Para un valor preciso de la energía E , la onda viajera tiene un periodo infinito. La ecuación cúbica que describe la energía potencial tiene una raíz doble en $f_{\text{mín}}$ y una raíz simple en $f_{\text{máx}} > f_{\text{mín}}$, de manera que:

$$\frac{1}{2}(f')^2 = -(f - f_{\text{máx}})(f - f_{\text{mín}})^2. \tag{14.7.20}$$

El plano de fases muestra que la solución tiene un único máximo en $f = f_{\text{máx}}$ y decrece exponencialmente a ambos lados hasta el valor $f = f_{\text{mín}}$. La Figura 14.7.2 representa la gráfica de esta onda, que se denomina **onda solitaria**. Esta onda viajera existe cuando el efecto de la no linealidad equilibra el efecto del término dispersivo. Podemos obtener una expresión para la velocidad de la onda comparando los términos cuadráticos de (14.7.19) y (14.7.20): $\frac{1}{2}c = f_{\text{máx}} + 2f_{\text{mín}} = 3f_{\text{mín}} + (f_{\text{máx}} - f_{\text{mín}})$. Por ejemplo, si $f_{\text{mín}} = 0$ (lo que implica $f_{\text{máx}} > 0$), tenemos

$$\frac{c}{2} = f_{\text{máx}}. \tag{14.7.21}$$

Estas ondas solitarias sólo aparecen si $f_{\text{máx}} > 0$, como puede verse en la Figura 14.7.2. Las ondas más altas se mueven más deprisa (hacia la derecha). Existe una expresión analítica para estas ondas solitarias: si $f_{\text{mín}} = 0$, se puede ver que la solución es

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{c}(x - ct) \right], \tag{14.7.22}$$

donde $c > 0$ viene dado por (14.7.21). Esta expresión muestra que las ondas más altas (que se mueven más rápido) están más concentradas cerca del punto máximo y tienen pendientes grandes.

14.7.4. Solitones y scattering inverso

Las ondas solitarias aparecen en muchas otras ecuaciones en derivadas parciales no lineales, aunque para la mayor parte de estas ecuaciones no se conocen muchos resultados analíticos, debido precisamente a su carácter no lineal. Los experimentos numéricos más avanzados muestran que las ondas solitarias con diferentes velocidades interactúan entre ellas de un modo bastante complicado. Para la ecuación KdV, sin embargo, Zabusky y Kruskal [1965] mostraron que las distintas ondas solitarias interactúan como partículas (manteniendo exactamente su amplitud después de las colisiones) y se denominan, por ello, **solitones**. Los solitones han adquirido gran importancia debido a que aparecen soluciones de este tipo incluso para datos iniciales generales, y esta propiedad también se ha hecho patente en muchas otras ecuaciones en derivadas parciales que describen muchos otros fenómenos físicos dispersivos no lineales interesantes. Para entender los experimentos numéricos, Gardner, Greene, Kruskal y Miura [1967] mostraron que la ecuación no lineal KdV podría estar relacionada con problemas de scattering¹ asociados a problemas de autovalores de Schrodinger (véase la Sección 10.7) y la evolución temporal del problema de scattering. Lax [1968] generalizó estos resultados a dos operadores diferenciales no lineales L y M , dependientes de la función desconocida $u(x, t)$:

$$L\phi = \lambda\phi, \quad (14.7.23)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = M\phi. \quad (14.7.24)$$

El operador L describe el problema espectral (scattering), donde ϕ es la autofunción usual, y M describe cómo evoluciona en el tiempo esta autofunción. La consistencia de estas ecuaciones (derivando (14.7.23) respecto del tiempo y despejando $L\frac{\partial\phi}{\partial t}$) implica $L\frac{\partial\phi}{\partial t} = LM\phi = -\frac{\partial L}{\partial t}\phi + \lambda\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{d\lambda}{dt}\phi = -\frac{\partial L}{\partial t}\phi + ML\phi + \frac{d\lambda}{dt}\phi$. El **parámetro espectral es constante** ($\frac{d\lambda}{dt} = 0$) si y sólo si se verifica la siguiente ecuación, conocida como **ecuación de Lax**

$$\frac{\partial L}{\partial t} + LM - ML = 0, \quad (14.7.25)$$

que en la práctica es una ecuación diferencial no lineal para $u(x, t)$, pues el conmutador $LM - ML$ de dos operadores no triviales es, en general, distinto de cero.

Para los operadores particulares

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u, \quad (14.7.26)$$

¹N.T.: Como ya señalamos en el Capítulo 10, el uso de la palabra inglesa *scattering* es aceptado comúnmente entre la comunidad físico-matemática de habla española. Su traducción literal sería "dispersión".

$$M = \gamma - \frac{\partial u}{\partial x} + 6u \frac{\partial}{\partial x} - 4 \frac{\partial^3}{\partial x^3}, \quad (14.7.27)$$

donde γ es una constante, la ecuación de Lax se reduce a una versión de la ecuación de Korteweg-deVries [Véase el Ejercicio 14.7.9]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (14.7.28)$$

Transformada de scattering inverso. Para resolver el problema de valores iniciales asociado a la ecuación KdV en el intervalo $-\infty < x < \infty$, se puede utilizar la complicada relación entre esta ecuación y el problema lineal de scattering en $-\infty < x < \infty$. La autofunción ϕ satisface el problema de autovalores de Schrodinger

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (\lambda - u(x, t))\phi = 0. \quad (14.7.29)$$

La variable tiempo aparece aquí como un parámetro extraño. En la breve Sección 10.7 dedicada al scattering inverso, afirmamos que se puede reconstruir el potencial $u(x, t)$, para cada t fijo, a partir de los datos de scattering para ese tiempo fijo t :

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, y, t) \Big|_{y=x}, \quad (14.7.30)$$

usando la solución única de la ecuación integral de Gelfand-Levitan-Marchenko:

$$K(x, y, t) + F(x + y, t) + \int_x^\infty K(x, z, t)F(y + z, t)dz, \text{ para } y > x. \quad (14.7.31)$$

El término no homogéneo y el núcleo están aquí relacionados con la transformada inversa de Fourier del coeficiente de reflexión $R(k, t)$ (definido en la Sección 10.7), incluyendo una contribución de los estados límite (autovalores discretos $\lambda = -\kappa_n^2$):

$$F(s, t) = \sum_{n=1}^N c_n^2(t) e^{-\kappa_n s} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k, t) e^{iks} dk. \quad (14.7.32)$$

Los datos de scattering dependen de un parámetro, el tiempo. Desafortunadamente, no conocemos los datos de scattering en función del tiempo, pues sólo está prescrito el dato inicial $u(x, 0)$. Conocemos sólo el valor inicial de los datos de scattering. Si el dato inicial tiene autovalores discretos, como hemos probado que se tiene $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ para la ecuación KdV, los autovalores discretos no cambiarán, de forma milagrosa, para la evolución temporal de la solución $u(x, t)$. Sin embargo, también está probado que se pueden obtener fácilmente los datos de scattering en función del tiempo, a partir de los datos iniciales de scattering, usando únicamente (14.7.29) con (14.7.26) y (14.7.27):

$$R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3t}, \quad (14.7.33)$$

$$c_n(t) = c_n(0)e^{4\kappa_n^3t}. \quad (14.7.34)$$

Este método se denomina la **transformada de scattering inverso**. Los datos iniciales se transforman en los datos de scattering y éstos satisfacen en el tiempo una ecuación diferencial lineal, cuya solución se muestra en (14.7.33) y (14.7.34). Se obtiene, así, la solución por un procedimiento de scattering inverso.

Se puede mostrar que la solución de la transformada de scattering inverso correspondiente a un dato inicial que es un potencial sin reflexión y con un autovalor discreto, da lugar a la onda solitaria estudiada antes. Por otro lado, se pueden obtener también soluciones correspondientes a datos iniciales potenciales sin reflexión, con dos o más autovalores discretos. Las correspondientes soluciones de la ecuación KdV son ondas solitarias fuertemente no lineales que interactúan entre ellas. Las propiedades exactas de estas interacciones fueron observadas numéricamente por primera vez por Kruskal y Zabusky [1965]. En nuestra discusión hemos sido deliberadamente breves. Ablowitz, Kaup, Newell y Segur han desarrollado un procedimiento en algún sentido más sencillo, equivalente a (14.7.23) y (14.7.24), que está descrito (entre muchas otras cosas) en los libros de Ablowitz y Segur [1981] y de Ablowitz y Clarkson [1991].

14.7.5. Ecuación de Schrödinger no lineal

Cuando la energía está concentrada en un único número de onda, $u(x, t) = A(x, t)e^{i(k_0x - \omega(k_0)t)}$, puede aproximarse la amplitud de una onda dispersiva mediante (14.7.6). Las pequeñas variaciones temporales quedan equilibradas por las pequeñas variaciones espaciales. Si el fenómeno físico subyacente es no lineal, se pueden estudiar los efectos pequeños en la amplitud usando métodos de perturbaciones. En muchas situaciones, la dispersión espacial queda equilibrada por la no linealidad del siguiente modo. Se dice que la amplitud verifica la ecuación cúbica llamada **ecuación de Schrödinger no lineal (SNL)**

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'(k_0) \frac{\partial A}{\partial x} = i \frac{\omega''(k_0)}{2!} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i\beta |A|^2 A.} \quad (14.7.35)$$

Para entender los aspectos no lineales de esta ecuación, observemos primero que existe una solución con amplitud de onda constante en el espacio, si $\frac{\partial A}{\partial t} = i\beta |A|^2 A$, se tiene $u(x, t) = A(t)e^{i(k_0x - \omega(k_0)t)}$. La solución de esta ecuación diferencial es $A(t) = A(0)e^{i\beta|A(0)|^2 t}$, que corresponde a $u(t) = A(0)e^{i\beta|A(0)|^2 t} e^{i(k_0x - \omega(k_0)t)}$. La frecuencia depende de la amplitud: $\omega(k_0, |A(0)|) = \omega(k_0) - \beta |A(0)|^2$. Es muy típico que la frecuencia dependa de la amplitud de la onda de esta forma, como aproximación para amplitudes de onda pequeñas. Cuando incluimos la dependencia espacial se obtiene la ecuación de ondas dispersiva no lineal (14.7.35).

Vamos a ver que la ecuación SNL tiene soluciones que corresponden a una onda viajera oscilatoria cuya envolvente tiene la forma de una onda solitaria. Pongamos

$$A(x, t) = r(x, t)e^{i\theta(x, t)} = r(x, t)e^{i(\alpha x - \Omega t)},$$

donde $r(x, t)$ es real y representa la amplitud de una onda viajera elemental con número de onda α y frecuencia Ω . El número de onda α es arbitrario, pero determinará la frecuencia Ω correspondiente a esta envolvente con forma de onda solitaria. Como $A_x = (r_x + i\alpha r)e^{i(\alpha x - \Omega t)}$, se sigue que $A_{xx} = (r_{xx} + 2i\alpha r_x - \alpha^2 r)e^{i(\alpha x - \Omega t)}$. La parte real de la ecuación SNL (14.7.35) nos da

$$r_t + [\omega'(k_0) + \alpha\omega''(k_0)]r_x = 0. \tag{14.7.36}$$

Aplicando el método de las características a la Ecuación (14.7.36) vemos que

$$r(x, t) = r(x - ct),$$

donde la velocidad de la onda de la envolvente buscada verifica

$$c = \omega'(k_0) + \alpha\omega''(k_0). \tag{14.7.37}$$

Vemos entonces que el módulo de la amplitud compleja permanece constante moviéndose con la velocidad de grupo. Como α representa una pequeña perturbación del número de onda, ésta es precisamente la aproximación de la velocidad de grupo para el número de onda $k_0 + \alpha$. Tomando la parte imaginaria de SNL tenemos:

$$-\Omega r + \omega'(k_0)\alpha r = \frac{\omega''(k_0)}{2!}(r_{xx} - \alpha^2 r) + \beta r^3.$$

Podemos reescribir esta expresión como una ecuación diferencial

$$0 = r_{xx} + \delta r + \gamma r^3, \tag{14.7.38}$$

donde $\gamma = \frac{2\beta}{\omega''(k_0)}$ y $\delta = -\alpha^2 + 2\frac{\Omega - \omega'(k_0)\alpha}{\omega''(k_0)}$, que multiplicada por r_x e integrada, nos da la ecuación de la energía:

$$\frac{1}{2}(r_x)^2 + \frac{\delta}{2}r^2 + \frac{\gamma}{4}r^4 = E = 0.$$

Elegimos $E = 0$ para buscar una envolvente con la propiedad de que $r \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. En la Figura 14.7.3, se representa el potencial $\frac{\delta}{2}r^2 + \frac{\gamma}{4}r^4$. A partir de él se puede representar también el plano de fases (r_x como función de r), que muestra que existe una onda solitaria (véase la Figura 14.7.4) únicamente si $\gamma > 0$ (correspondiente al caso en que β y $\omega''(k_0)$ tienen el mismo signo) y $\delta < 0$. La no linealidad impide que el paquete de ondas se disperse.

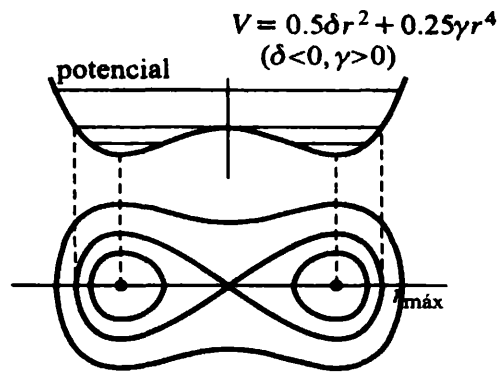


Figura 14.7.3: Potencial y plano de fases para la ecuación SNL.

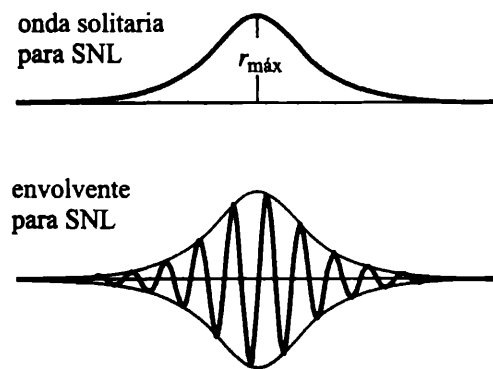


Figura 14.7.4: Para obtener la envolvente de la ecuación SNL se utilizan ondas solitarias para la amplitud.

El valor máximo de r , la amplitud de la envolvente en forma de onda solitaria, viene dado por $r_{\text{máx}}^2 = -2\frac{\delta}{\gamma} = -\frac{\delta}{\beta}\omega''(k_0)$. Dado $r_{\text{máx}}$ podemos utilizar esta ecuación para determinar la frecuencia Ω :

$$\Omega = \omega'(k_0)\alpha + \frac{\omega''(k_0)}{2}\alpha^2 - \frac{\beta}{2}r_{\text{máx}}^2. \quad (14.7.39)$$

Además de la perturbación del número de onda, la frecuencia depende también de la amplitud. Se puede demostrar que la envolvente en forma de solitón que verifica $r \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \infty$ en la ecuación SNL (14.7.35) viene dada por

$$A(x, t) = r_{\text{máx}} \operatorname{sech} \left[\sqrt{\frac{\beta}{\omega''(k_0)}} r_{\text{máx}} (x - ct) \right] e^{i(\alpha x - \Omega t)},$$

donde Ω está dado por (14.7.39) y c por (14.7.37) (observemos que α y $r_{\text{máx}}$ son arbitrarios). En la Figura 14.7.4 se representa la parte real de $A(x, t)$. Observemos también que la velocidad de fase de las ondas individuales es diferente de la velocidad de la envolvente. Estas envolventes con forma de ondas solitarias se conocen como **solitones envolventes** debido a las propiedades exactas (y sorprendentes) de las interacciones no lineales.

EJERCICIOS 14.7

14.7.1. Cáustica regular. En un entorno de una cáustica regular, el número de onda es aproximadamente constante $k_0 = k_c = k(\xi_c, 0)$, de manera que se verifica la ecuación de Schrödinger (14.7.6).

- (a) Usar la ecuación cuadrática fundamental (14.6.22) para obtener, a partir de (14.7.10) (suponiendo $R(\alpha) = 1$)

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\alpha(x-x_c - \omega'(k_c)(t-t_c)) - \frac{\omega''(k_c)}{2!} \alpha^2(t-t_c) - \frac{\alpha^3}{3!} \frac{F''(\xi_c)}{k_c^2} t_c]} d\alpha.$$

Para simplificar los cálculos, considerar la integral

$$B(z, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\beta z + \beta^2 \tau + \beta^3/3]} d\beta.$$

- (b) Demostrar que la función B verifica la forma adimensional de la ecuación de Schrödinger $B_\tau = -iB_{zz}$.
- (c) Demostrar que se puede eliminar el término cuadrático del integrando poniendo $\beta = \gamma - \tau$, en cuyo caso

$$B(z, \tau) = e^{i(-\tau z + \frac{2}{3}\tau^3)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\gamma(z-\tau^2) + \gamma^3/3]} d\gamma.$$

- (d) Este término describe la intensidad de luz en el interior de la cáustica. La integral restante es una función de Airy, definida generalmente por

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\gamma x + \gamma^3/3]} d\gamma$$

(se puede demostrar que la función de Airy verifica $w'' - xw = 0$). Usando el desarrollo asintótico de la función de Airy para valores grandes de x , se puede ver que la cáustica regular (relacionada con la función de Airy) separa dos regiones en las que hay dos rayos o ninguno. Expresar $A(x, t)$ en términos de la función de Airy.

14.7.2. La relación de dispersión para ondas en el agua es $\omega^2 = gk \tanh kh$, donde g es la constante de gravitación usual y h es la profundidad. Determinar los coeficientes de la ecuación KdV linealizada que se obtiene para ondas largas.

14.7.3. Esbozar el plano de fases y la existencia de ondas periódicas y ondas solitarias no lineales para las ecuaciones siguientes:

(a) **Ecuación KdV modificada:** $\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$

(b) **Ecuación de Klein-Gordon:** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^3 = 0.$

(c) **Ecuación sine-Gordon²:** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \text{sen } u = 0.$

14.7.4. Determinar una fórmula integral para el periodo de las soluciones periódicas de la ecuación KdV. Determinar la velocidad de la onda en términos de las tres raíces de la ecuación cúbica. Las soluciones periódicas no tienen una representación en términos de funciones sinusoidales, sino que se necesitan para ello las funciones elípticas jacobianas cn , por lo que se denominan ondas cnoidales. Para profundizar en el tema consultar, por ejemplo, Abramowitz y Stegun [1965].

14.7.5. Deducir la fórmula del texto para ondas solitarias (usando tablas de integrales) para:

(a) la ecuación KdV,

(b) la ecuación de Schrödinger no lineal,

(c) la ecuación KdV modificada (véase el Ejercicio 14.7.3a) con una fórmula para la solución.

14.7.6. Usando identidades para las funciones hiperbólicas, obtener la fórmula del texto para las ondas solitarias en los casos de:

(a) la ecuación KdV.

(b) la ecuación de Schrödinger no lineal.

14.7.7. Si las autofunciones verifican la ecuación de Schrödinger pero la evolución temporal de las mismas verifica $\frac{\partial \phi}{\partial t} = P \frac{\partial \phi}{\partial x} + Q \phi$, demostrar que las ecuaciones son consistentes sólo si $Q = -\frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x}$ y $u(x, t)$ satisfacen la ecuación $u_t = -\frac{1}{2} P_{xxx} + 2P_x(u - \lambda) + P u_x.$

14.7.8. Considérese el Ejercicio 14.7.7. Si $P = A + B\lambda + C\lambda^2$ con C constante, determinar A y B , y una ecuación para $u(x, t)$.

14.7.9. Demostrar que la ecuación de Lax es la ecuación de Korteweg-deVries para los operadores L y M dados por (14.7.26) y (14.7.27). *Indicación:* obtener la compatibilidad de (14.7.23) y (14.7.24) directamente a partir de (14.7.26) y (14.7.27).

²N.T.: es común denominar esta ecuación por el nombre en inglés, en lugar de su traducción "ecuación seno-Gordon", por analogía fonética con la "ecuación de Klein-Gordon"

- 14.7.10. Deducir (14.7.33), usando las definiciones de los coeficientes de reflexión y transmisión de la Sección 10.7. Obtener, para ello, que se verifica $\gamma = 4ik^3$ en (14.7.27). Los estados acotados son más complicados.
- 14.7.11. Suponer que el dato inicial para la ecuación KdV es un potencial sin reflexión $R(k, 0) = 0$ con un único autovalor discreto. Resolver la ecuación integral de Gelfand-Levitan-Marchenko (es separable) y mostrar que $u(x, t)$ es la onda solitaria (solitón) descrita anteriormente.
- 14.7.12. Generalizar el Ejercicio 14.7.11 al caso de un potencial sin reflexión con dos autovalores discretos. La ecuación integral es también separable. La solución representa la interacción de dos solitones.

14.8. Estabilidad e inestabilidad

14.8.1. Teoría breve de bifurcación en ecuaciones diferenciales ordinarias

Las soluciones de equilibrio de las ecuaciones en derivadas parciales pueden ser estables o inestables. Desarrollaremos estos conceptos aquí primero, y de forma breve, para las ecuaciones diferenciales. Para una discusión más detallada se puede consultar cualquiera de los muchos libros recientes sobre **sistemas dinámicos**, como, por ejemplo, los textos de Glendinning [1994], Strogatz [1994] y Verhulst [1997].

Ecuaciones diferenciales de primer orden. Para entender los conceptos de estado de equilibrio y estabilidad, el mejor ejemplo es el caso de una ecuación diferencial de primer orden autónoma:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x).} \quad (14.8.1)$$

Una **solución de equilibrio** x_0 es una solución de (14.8.1) independiente del tiempo:

$$\boxed{0 = f(x_0).} \quad (14.8.2)$$

Una solución de equilibrio es **estable** si todas las condiciones iniciales próximas se mantienen cerca del estado de equilibrio. Si la solución se aleja del estado de equilibrio para todas las condiciones iniciales próximas, se dice que el equilibrio es **inestable**.

El análisis de cuándo una solución de equilibrio x_0 es estable o inestable requiere únicamente estudiar la ecuación diferencial (14.8.1) cerca de x_0 . Aproximamos la

ecuación diferencial mediante una serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de x_0 (linealización de $f(x)$ cerca de x_0 o aproximación mediante la recta tangente):

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots$$

Como suponemos que x está próximo a x_0 , despreciamos los términos no lineales. Si x_0 es una solución de equilibrio, se tiene $f(x_0) = 0$, y la ecuación diferencial (14.8.1) se puede aproximar por la ecuación lineal (con coeficientes constantes):

$$\frac{dx}{dt} = (x - x_0)f'(x_0). \quad (14.8.3)$$

La solución de (14.8.3) es inmediata: $x - x_0 = ce^{f'(x_0)t}$. Concluimos, por tanto, que

$$\begin{array}{l} \text{el equilibrio } x_0 \text{ es estable si } f'(x_0) < 0 \\ \text{el equilibrio } x_0 \text{ es inestable si } f'(x_0) > 0. \end{array}$$

Si $f'(x_0) = 0$, el estudio de la estabilidad requiere de los términos no lineales despreciados.

Ejemplo de punto de bifurcación. Para estudiar cómo dependen las soluciones de un parámetro R , comenzamos estudiando un ejemplo específico,

$$\frac{dx}{dt} = R - x^2. \quad (14.8.4)$$

En el equilibrio se tiene $x^2 = R$. Si $R > 0$, existen dos estados de equilibrio, $x = \pm\sqrt{R}$. Estos dos estados se confunden en uno solo, $x = 0$, cuando $R = 0$. Si $R < 0$ no hay estados de equilibrio. El punto $R = 0$ se denomina **punto de bifurcación**, pues el número de estados de equilibrio varía en él. En otros ejemplos se pueden tener diferentes tipos de puntos de bifurcación. En ocasiones es necesario dibujar un **diagrama de bifurcación** (como en la Figura 14.8.1) para representar los estados de equilibrio en función del parámetro R . Se puede determinar la estabilidad de cada estado de equilibrio utilizando la linealización (véanse los ejercicios). En la figura se ilustra, sin embargo, cómo determinar la estabilidad usando un **diagrama de fases unidimensional**. Fijamos el parámetro R dibujando una línea vertical. Si $\frac{dx}{dt} > 0$, representamos flechas hacia arriba (así como flechas hacia abajo, si $\frac{dx}{dt} < 0$). En este ejemplo (14.8.4), si x es grande y positivo, entonces $\frac{dx}{dt} < 0$ (y el signo de $\frac{dx}{dt}$ cambia cada vez que se alcanza un estado de equilibrio, pues las raíces son simples). Vemos así que la rama superior ($x > 0$) es estable y la rama inferior ($x < 0$) es inestable.

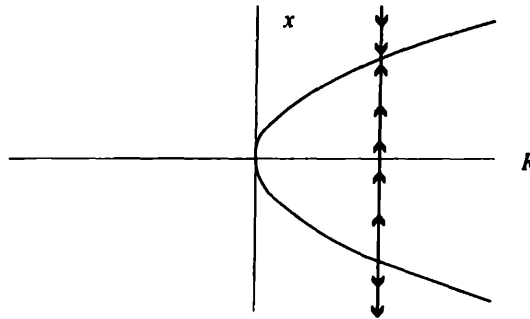


Figura 14.8.1: Diagrama de fases unidimensional y diagrama de bifurcación para una bifurcación de tipo silla-nodo.

Definición de punto de bifurcación. Las ecuaciones diferenciales de primer orden dependientes de un parámetro R se pueden escribir en la forma :

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(x, R).} \tag{14.8.5}$$

Estudiamos primero las soluciones de equilibrio x_0 , es decir,

$$0 = f(x_0, R).$$

En general, el estado de equilibrio x_0 dependerá del parámetro R . Según nuestra discusión previa, x_0 será estable si $f_x(x_0, R) < 0$, e inestable si $f_x(x_0, R) > 0$. En cada ejemplo particular se puede estudiar la estabilidad usando un diagrama de fases unidimensional, como en el ejemplo anterior.

Queremos investigar cómo varía un estado de equilibrio específico cuando el parámetro varía una pequeña cantidad. Supongamos que existe un valor especial del parámetro R_c , y que conocemos un estado de equilibrio x_c correspondiente a este valor, de manera que

$$0 = f(x_c, R_c).$$

Suponemos también que x_0 está próximo a x_c si R está próximo a R_c . Usando un desarrollo en serie de Taylor para funciones de dos variables, tenemos:

$$0 = f(x_0, R) = f(x_c, R_c) + (x_0 - x_c)f_x(x_c, R_c) + (R - R_c)f_R(x_c, R_c) + \dots$$

Como primera aproximación concluimos que si R está próximo a R_c , el equilibrio varía una pequeña cantidad, aproximadamente

$$x_0 - x_c = -\frac{f_R}{f_x}(R - R_c) + \dots \tag{14.8.6}$$

Esto es cierto si $f_x \neq 0$. Por tanto, el número de estados de equilibrio no varía si $f_x \neq 0$. La Fórmula (14.8.6) es la aproximación por la recta tangente al diagrama de bifurcación.

El único cambio *interesante* se produce cuando $f_x = 0$. Un punto (x, R) se denomina **punto de bifurcación** si

$$f(x, R) = 0, \quad \text{y a la vez} \quad f_x(x, R) = 0. \quad (14.8.7)$$

El número de estados de equilibrio sólo puede variar en un punto de bifurcación. También la estabilidad de un equilibrio puede cambiar en un punto de bifurcación, pues un equilibrio es estable si $f_x < 0$, e inestable si $f_x > 0$.

Consideremos de nuevo el ejemplo anterior (14.8.4), donde $0 = f(x, R) = R - x^2$. El punto de bifurcación se puede calcular imponiendo $f_x = -2x = 0$. Vemos entonces que el punto de bifurcación es $x = 0$, en cuyo caso $R = 0$.

Bifurcación de tipo silla-nodo. Vamos a ver en esta sección que el tipo de bifurcación descrito en el ejemplo anterior (14.8.4) es el tipo natural de punto de bifurcación. Consideremos el problema de primer orden dependiente del parámetro R :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, R). \quad (14.8.8)$$

Supongamos que existe un punto de bifurcación (x_c, R_c) verificando

$$f(x_c, R_c) = 0 \quad \text{y} \quad f_x(x_c, R_c) = 0. \quad (14.8.9)$$

Como estamos interesados en resolver la ecuación diferencial para R próximo a R_c , suponemos también que x está próximo a x_c . Aproximamos entonces la ecuación diferencial mediante la serie de Taylor de $f(x, R)$ alrededor de (x_c, R_c) :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = f(x, R) = & f(x_c, R_c) + (x - x_c)f_x(x_c, R_c) \\ & + (R - R_c)f_R(x_c, R_c) + \frac{1}{2}(x - x_c)^2 f_{xx}(x_c, R_c) + \dots \end{aligned}$$

Si (x_c, R_c) es un punto de bifurcación, esta expresión se simplifica obteniéndose

$$\frac{dx}{dt} = (R - R_c)f_R(x_c, R_c) + \frac{1}{2}(x - x_c)^2 f_{xx}(x_c, R_c) + \dots \quad (14.8.10)$$

Se puede mostrar que los demás términos de la serie de Taylor, por ejemplo los términos que contienen los factores $(R - R_c)^2$, $(x - x_c)(R - R_c)$, $(x - x_c)^3$, son mucho más pequeños si R está próximo a R_c y x está próximo a x_c , de manera que $(x -$

$x_c)^2 = O(R - R_c)$. Por tanto, en una aproximación cerca del punto de bifurcación, se pueden desprestigiar estos términos de mayor orden. El diagrama de bifurcación cerca del punto (x_c, R_c) del plano será, aproximadamente, de tipo parabólico (similar al diagrama descrito en la Figura 14.8.1), lo que se deduce considerando el estado de equilibrio asociado a la ecuación diferencial aproximada (14.8.10). El punto de bifurcación es aquí (x_c, R_c) . La parábola puede ser abierta por la derecha o por la izquierda, dependiendo de los signos de f_R y f_{xx} . Para que la aproximación hecha sea una buena aproximación, debemos tener $f_R(x_c, R_c) \neq 0$ y $f_{xx}(x_c, R_c) \neq 0$. Siempre que $f_R(x_c, R_c) \neq 0$ y $f_{xx}(x_c, R_c) \neq 0$, el punto de bifurcación es un **punto de retroceso** (también denominado **punto silla-nodo** por razones que sólo esbozamos más adelante). Se puede determinar, en cada caso concreto, la estabilidad de los estados de equilibrio, utilizando un diagrama de fases unidimensional. Una rama de la parábola será estable (dependiendo de nuevo de los signos de los coeficientes en el desarrollo de Taylor), es decir, consistirá en estados de equilibrio estables, mientras que la otra rama será inestable.

Otros tipos de bifurcación. En los ejercicios se muestran otros tipos de bifurcación que pueden aparecer cuando $f_R(x_c, R_c) = 0$ o $f_{xx}(x_c, R_c) = 0$, tales como bifurcación transcítica (intercambio de estabildades) o bifurcación de tipo horquilla.

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. La estabilidad de un estado de equilibrio en un sistema de ecuaciones diferenciales se determina mediante su linealización, es decir, sustituyendo la Ecuación (14.8.3) por el sistema lineal que define la matriz jacobiana. Para sistemas de segundo orden, la estabilidad se determina por el crecimiento de dos funciones exponenciales, es decir, por los autovalores de la matriz jacobiana. Se puede demostrar, aunque no es fácil, que los sistemas de segundo orden tienen todos diagramas de bifurcación semejantes. En los problemas de bifurcación típicos, en los que la estabilidad de un estado de equilibrio cambia cuando varía el parámetro R , uno de los autovalores es negativo (estable) pero el otro pasa de negativo a positivo en un valor particular de R (llamado valor de bifurcación R_c). El sistema bidimensional se reduce a un sistema unidimensional, pues las soluciones decaen exponencialmente en una dirección. En la otra dirección (llamada variedad central), se obtiene una ecuación de primer orden del tipo de (14.8.8). Usualmente, existe un comportamiento exponencial decreciente oculto. Al analizar las soluciones de equilibrio de nuestra ecuación de primer orden, existe sólo un comportamiento exponencial. En el problema unidimensional, un estado de equilibrio con dos comportamientos exponenciales negativos (uno de ellos oculto), se denomina **nodo** estable en la teoría de ecuaciones diferenciales no lineales. Un estado de equilibrio inestable tiene un crecimiento exponencial visible (y un decrecimiento exponencial oculto). El equilibrio inestable es un **punto de silla** (creciente en una dirección y decreciente en la otra). El punto de retroceso es, por tanto, un **punto de bifurcación de tipo silla-nodo**, pues la rama estable es, generalmente, una rama de nodos (estables) y la rama inestable es una rama de puntos de silla. Ambas

ramas coinciden en el punto de bifurcación.

Bifurcación de Hopf. Sin embargo, para los sistemas de dos ecuaciones, una solución de equilibrio puede pasar de estable a inestable si el exponente en el comportamiento exponencial ($e^{\sigma t}$) es complejo ($\sigma = s \pm i\omega$) y su parte real pasa de ser negativa ($s < 0$) a ser positiva ($s > 0$). En este caso, la teoría lineal da lugar a una frecuencia ω y la bifurcación se llama **bifurcación de Hopf**. Un análisis detallado de la bifurcación de Hopf sería demasiado complicado para que fuera incluido aquí y nos desviaría de nuestro principal propósito. La bifurcación de Hopf es similar a los problemas de estabilidad para ecuaciones en derivadas parciales, que discutiremos en breve. Sólo nos detendremos en el estudio de la no linealidad en la Subsección 14.8.6.

14.8.2. Un ejemplo típico de equilibrio estable en ecuaciones en derivadas parciales

Todas las soluciones de equilibrio que hemos discutido en este texto han sido estables. Consideremos, por ejemplo, la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con temperatura prescrita en los extremos del intervalo, $u(0, t) = A$ y $u(L, t) = B$. La solución de equilibrio es $u_e(x) = A + (B - A)\frac{x}{L}$. Para determinar si este estado de equilibrio es estable o no, consideramos datos iniciales próximos al equilibrio: $u(x, 0) = u_e(x) + g(x)$, donde $g(x)$ es pequeño. Pongamos

$$u(x, t) = u_e(x) + v(x, t),$$

donde $v(x, t)$ es el **desplazamiento del equilibrio**. Vemos que $v(x, t)$ verifica

$$\frac{\partial v}{\partial t} = K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \text{con } v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, \quad \text{y } v(x, 0) = g(x).$$

Usando los resultados obtenidos anteriormente, tenemos

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-K(\frac{n\pi}{L})^2 t},$$

donde a_n está determinado por el dato inicial (aunque no necesitamos su expresión explícita). Como $v(x, t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, se sigue que $u(x, t) \rightarrow u_e(x)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Decimos entonces que el estado de equilibrio $u_e(x)$ es (asintóticamente) **estable**.

Si $u(x, t) - u_e(x)$ es acotado para $t \rightarrow \infty$ [y suponemos que u está inicialmente próximo a $u_e(x)$], entonces decimos que la solución de equilibrio es **estable**. Si existe algún dato inicial [próximo a $u_e(x)$] para el cual $u(x, t) - u_e(x)$ es grande para $t \rightarrow \infty$, entonces $u_e(x)$ es **inestable**.

En general, el desplazamiento del equilibrio satisface una ecuación en derivadas parciales lineal con un número infinito de grados de libertad (modos). Si uno o más de estos modos crece exponencialmente en el tiempo, entonces el equilibrio es inestable. Para que el equilibrio sea estable, es necesario que todos los modos decaigan exponencialmente o que oscilen.

14.8.3. Equilibrio inestable típico en una ecuación en derivadas parciales y formación de patrones

Un ejemplo físico de equilibrio inestable es la difusión del calor en un fluido contenido entre dos placas paralelas, producido por el calentamiento de la superficie inferior. El interés por este tipo de problemas procede de la meteorología, donde muchos de los fenómenos interesantes se deben al calentamiento de la superficie de la tierra producido por el calor del sol. En nuestro problema, se ha observado en los experimentos que si se calienta de forma suave la placa inferior, aparece un estado simple de flujo de calor (solución de la ecuación del calor usual y, por tanto, $u = u(0) + \frac{y}{L}[u(L) - u(0)]$ si ponemos $y = 0$ para la placa inferior e $y = L$ para la placa superior). Si ahora se calienta más la placa inferior, se produce un movimiento del fluido debido a que las partes inferiores del mismo pasan a tener menor densidad que las partes superiores y tienden a subir, a flotar. La ecuación en derivadas parciales que describe este fenómeno debe incluir la ley de Newton para la velocidad del fluido, así como la ecuación del calor para la temperatura. La fuerza de la gravedad tiende a estabilizar la situación, mientras que la flotación descrita antes tiende a desestabilizarla. Experimentalmente se observa que si se calienta suficientemente la placa inferior, entonces el estado de equilibrio se vuelve inestable. El fluido tiende a moverse de manera descontrolada y aparecen remolinos entre las placas (fenómeno reminiscente de movimientos atmosféricos a gran escala). Aparece una longitud horizontal privilegiada que no existía inicialmente. Este proceso de formación de patrones es fundamental en física y ciencias naturales. Sin embargo, el estudio de un buen modelo matemático que describa la inestabilidad producida por la flotación puede resultar demasiado difícil para un primer ejemplo.

Vamos a estudiar, para empezar, la siguiente ecuación en derivadas parciales (que presentará un gran número de propiedades interesantes), que está relacionada con la ecuación de **Kuramoto-Sivashinsky** linealizada:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -u - R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}} \quad (14.8.11)$$

Observemos que $u = 0$ es una solución de equilibrio de (14.8.11). El coeficiente $R > 0$ será un parámetro importante en la ecuación. Para entender esta ecuación sustituimos en ella la función $u = e^{i(kx - \omega t)}$ ó $u = e^{\sigma t} e^{ikx}$, y obtenemos

$$\sigma = -1 + Rk^2 - k^4. \quad (14.8.12)$$

La tasa de variación temporal σ es una función de R y k . En este ejemplo, σ es siempre un número real para todos los números de onda k (para todas las longitudes de onda), por lo que se tiene una tasa de crecimiento (o decrecimiento) exponencial. Es muy importante distinguir entre los dos casos: $\sigma > 0$ (crecimiento exponencial) y $\sigma < 0$ (decaimiento exponencial). En la Figura 14.8.2, se representan las regiones de crecimiento y decaimiento exponenciales dibujando la curva $\sigma = 0$:

$$\sigma = 0 \quad \text{si } R = \frac{1}{k^2} + k^2.$$

La **curva de estabilidad neutra** que separa las regiones de estabilidad e inestabilidad de la Figura 14.8.2 tiene una asíntota vertical para $k = 0$ y se comporta como la parábola $R = k^2$ para k grande. Tiene un único punto crítico, un mínimo absoluto, donde $\frac{dR}{dk} = 0$. Para determinar este mínimo, vemos que $0 = -2\frac{1}{k^3} + 2k$ implica $k_c = 1$, por lo que $R_c = 1 + 1 = 2$. Si $R < R_c$, decimos entonces que $u = 0$ es un equilibrio estable, pues la dependencia temporal de todos los modos (todos los valores de k) decae exponencialmente. Si $R > R_c$, entonces existe una banda de números de onda con crecimiento exponencial. Si en el problema aparece cualquiera de estos números de onda, entonces el equilibrio $u = 0$ es inestable. Por ejemplo, si se plantea la Ecuación (14.8.11) en toda la recta, entonces, utilizando la transformada de Fourier, vemos que aparecen todos los valores reales para k y, por tanto, $u = 0$ es inestable si $R > R_c$. Se han realizado experimentos variando R de forma gradual, creciendo desde un valor para el cual el equilibrio $u = 0$ es estable, hasta un valor en el que $u = 0$ es inestable. Si R toma un valor ligeramente superior a R_c , se esperan ondas crecientes para números de onda en un pequeño entorno rodeando a $k_c = 1$. Por tanto, se espera que la solución contenga la longitud de onda $\frac{2\pi}{k_c}$, una longitud de onda privilegiada. De esta manera, se forman los patrones en la naturaleza, aun partiendo de datos iniciales arbitrarios.

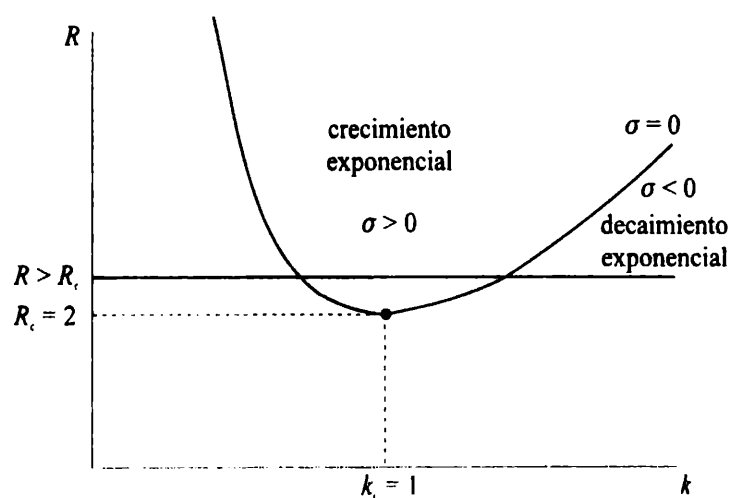


Figura 14.8.2: Curva de estabilidad neutra.

Sin embargo (y esto es un poco sutil), si las condiciones en la frontera (después de la separación de variables) son $u(0) = u''(0) = 0$ y $u(L) = u''(L) = 0$, entonces se puede mostrar que las autofunciones son $\sin \frac{n\pi x}{L}$, de manera que k toma sólo

los valores discretos $k = \frac{n\pi}{L}$. Si R no es mucho mayor que R_c , entonces existe únicamente una banda estrecha de números de onda y es posible que $u = 0$ sea estable. La primera inestabilidad se produce cuando R toma un valor específico mayor que R_c y podría corresponder a un valor específico de $n = n_c$. Se podría esperar, entonces, que se formasen patrones con esta longitud de onda diferente $\frac{2L}{n_c}$. En el resto de este capítulo consideraremos problemas planteados en toda la recta.

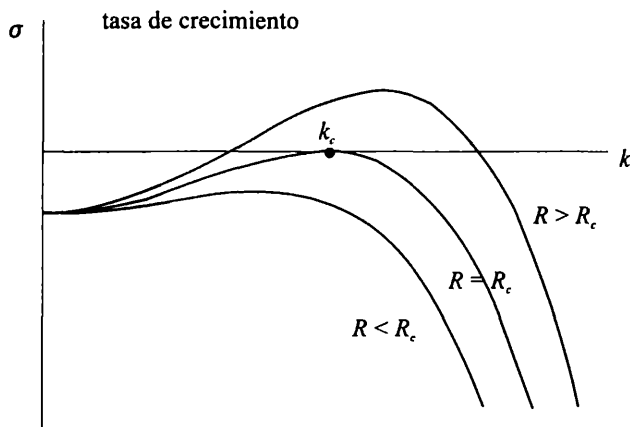


Figura 14.8.3: Tasa de crecimiento como función del número de onda.

Un método alternativo de entender la tasa de crecimiento $\sigma = \sigma(k, R)$ dada por (14.8.12), consiste en dibujar ésta como función de K , para R fijo, como se ilustra en la Figura 14.8.3. Observemos que $\sigma < 0$ para todo k si $R < R_c = 2$. Para $R = R_c = 2$, el primer cero de σ es $k = k_c = 1$:

$$\sigma(k_c, R_c) = 0, \tag{14.8.13}$$

$$\sigma_k(k_c, R_c) = 0, \tag{14.8.14}$$

$$\sigma_{kk}(k_c, R_c) < 0. \tag{14.8.15}$$

Si R toma un valor sólo ligeramente superior a R_c , entonces existe una banda de números de onda próximos a k_c , para los cuales $\sigma > 0$. Esta banda es la misma banda de números de onda inestables de la Figura 14.8.2. Se puede estimar esta banda de números de onda inestables (para R mayor pero próximo a R_c) usando una serie de Taylor para la función de dos variables $\sigma(k, R)$, alrededor de $k = k_c$ y $R = R_c$:

$$\begin{aligned} \sigma(k, R) &= \sigma(k_c, R_c) + \sigma_k(k_c, R_c)(k - k_c) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma_{kk}(k_c, R_c)(k - k_c)^2 + \dots + \sigma_R(k_c, R_c)(R - R_c) + \dots \end{aligned}$$

Utilizando (14.8.13) y (14.8.14), podemos simplificar esta expresión,

$$\sigma(k, R) = \frac{1}{2}\sigma_{kk}(k_c, R_c)(k - k_c)^2 + \sigma_R(k_c, R_c)(R - R_c) + \dots \tag{14.8.16}$$

Los demás términos de la serie de Taylor se pueden despreciar. Como la banda de números de onda inestables termina en $\sigma(k, R) = 0$, tenemos, como una aproximación, que los números de onda inestables para $R > R_c$ verifican

$$|k - k_c| < \sqrt{\frac{-2\sigma_R}{\sigma_{kk}}(R - R_c)}.$$

Necesitamos suponer también

$$\sigma_R(k_c, R_c) > 0, \quad (14.8.17)$$

pues queremos que σ sea creciente en $R = R_c$ (desde $\sigma < 0$ a $\sigma > 0$ y para $k = k_c$ fijo).

En otras ecuaciones en derivadas parciales lineales la dependencia exponencial en el tiempo es compleja, $e^{st} = e^{(\sigma - i\omega)t}$. En ese caso, σ es la parte real de s y $-\omega$ es la parte imaginaria de s , donde $\omega(k)$ es la frecuencia.

14.8.4. Problemas mal propuestos

Se dice que una ecuación en derivadas parciales lineal dependiente del tiempo está **mal propuesta** si la mayor tasa de crecimiento exponencial es positiva pero **no acotada** para los números de onda admisibles. Cuando un problema está mal propuesto, es lógico pensar que no describe de forma correcta el modelo físico planteado. En general se ha obviado, o mal utilizado, alguna propiedad física importante del modelo.

Vemos que la ecuación del calor retrógrada (en tiempo)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (14.8.18)$$

está mal propuesta, pues la tasa de crecimiento exponencial ($u = e^{\sigma t} e^{ikx}$) es

$$\sigma = k^2.$$

El equilibrio $u = 0$ es inestable, pues $\sigma > 0$ para los valores de k de interés. Sin embargo, la tasa de crecimiento es positiva y no acotada para $k \rightarrow \infty$ y, por tanto, la Ecuación (14.8.18) está mal propuesta. La dificultad aparece cuando $k \rightarrow \infty$, que corresponde a ondas infinitesimales (con longitudes de ondas cercanas a cero). La ecuación del calor retrógrada está mal propuesta incluso con condiciones de contorno en $x = 0$ y $x = L$, pues en ese caso se tiene $k = \frac{n\pi}{L}$ y, de nuevo, la tasa de crecimiento es no acotada para $n \rightarrow \infty$ (si se pudieran excluir las ondas infinitesimales, entonces la ecuación del calor no estaría mal propuesta).

La Ecuación (14.8.11) sin la derivada cuarta también estaría mal propuesta. Sin embargo, el término de derivada cuarta impide crecer las ondas cortas. Aunque el equilibrio $u = 0$ para (14.8.11) es inestable, una vez fijado $R > R_c = 2$, la tasa de crecimiento exponencial está acotada. Vemos en (14.8.12) que la tasa máxima es $\sigma_{m\acute{a}x} = -1 + \frac{1}{4}R^2$, que está acotada.

14.8.5. Ondas dispersivas ligeramente inestables y la ecuación compleja de Ginzburg-Landau linealizada

Las ondas dispersivas puras son soluciones de ecuaciones en derivadas parciales lineales en la forma $e^{i(kx-\omega t)}$, donde la frecuencia ω es real y verifica una relación de dispersión $\omega = \omega(k)$. Sin embargo, existen ejemplos de ecuaciones en los que la frecuencia no es real. Analizaremos este caso más general de posible frecuencia compleja considerando tasas de variaciones temporales en forma compleja $s = \sigma - i\omega$: $e^{ikx}e^{st} = e^{ikx}e^{(\sigma-i\omega)t}$, y estudiando la tasa de crecimiento σ . Si $\sigma > 0$ para algún valor admisible de k , decimos que el equilibrio $u = 0$ es inestable. A menudo, la ecuación en derivadas parciales depende de un parámetro R , de manera que la solución $u = 0$ es estable para $R < R_c$ y se vuelve inestable en $R = R_c$. Al igual que en la Sección 14.7, supondremos aquí que existe un número de onda especial k_c , tal que la tasa (real) de crecimiento $\sigma(k, R)$ verifica (14.8.13), (14.8.14), (14.8.15) y (14.8.17) cerca de $k = k_c$ y de $R = R_c$.

En esta sección, supondremos que R toma valores ligeramente por encima de R_c , de manera que el estado de equilibrio $u = 0$ es inestable, pero el valor mayor de σ será pequeño, por lo que el estado $u = 0$ es **ligeramente inestable**. En ese caso, existe una pequeña banda de números de onda inestables cerca de k_c . Se espera que la energía esté concentrada en un único número de onda k_c . Ya hemos discutido en la Sección 14.6 la hipótesis de onda casi monocromática, $u(x, t) = A(x, t)e^{i(k_0x-\omega(k_0)t)}$, para ondas dispersivas puras y hemos visto que la onda envolvente satisface, de forma aproximada, la ecuación lineal de Schrödinger, $\frac{\partial A}{\partial t} + \omega'(k_0)\frac{\partial A}{\partial x} = i\frac{\omega''(k_0)}{2!}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$. Queremos generalizar aquí este resultado al caso de ondas ligeramente inestables, donde la dependencia temporal es oscilatoria y exponencial, $e^{st} = e^{(\sigma-i\omega)t}$. Para $R = R_c$ y $k = k_c$, el crecimiento exponencial es cero $\sigma(k_c, R_c) = 0$ pero, en general, la frecuencia crítica $\omega(k_c, R_c)$ es distinta de cero. Por tanto, esperamos que $A(x, t)$ sea, igual que antes, la envolvente de alguna onda viajera elemental de tipo oscilatorio

$$u(x, t) = A(x, t)e^{ik_c x}e^{s(k_c, R_c)t} = A(x, t)e^{i[k_c x - \omega(k_c, R_c)t]}. \tag{14.8.19}$$

Como existen soluciones elementales de la forma $u = e^{ikx}e^{[\sigma(k, R) - i\omega(k, R)]t}$, si aplicamos el cálculo formal de las derivadas espacial y temporal (14.7.2) y (14.7.3), tenemos ahora

$$-i\frac{\partial}{\partial x} \iff (k - k_c), \tag{14.8.20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iff s(k, R) - s(k_c, R_c) = s(k, R) + i\omega(k_c, R_c). \tag{14.8.21}$$

Podemos usar estas fórmulas para obtener una ecuación en derivadas parciales para la amplitud $A(x, t)$ considerando el desarrollo en serie de Taylor de $s(k, R)$ alrededor

de $k = k_c$ y $R = R_c$:

$$s(k, R) = s(k_c, R_c) + s_k(k - k_c) + \frac{s_{kk}}{2!}(k - k_c)^2 + \dots + s_R(R - R_c) + \dots \quad (14.8.22)$$

Hay que evaluar las derivadas parciales en $k = k_c$ y $R = R_c$. Si suponemos, además, que $(k - k_c)^2 = O(R - R_c)$, podemos despreciar los demás términos de este desarrollo. Recordemos que $s(k, R)$ toma valores complejos, $s(k, R) = \sigma(k, R) - i\omega(k, R)$, por lo que s_R y s_{kk} son a su vez complejos. Sin embargo, $s_k = \sigma_k - i\omega_k = -i\omega_k$, pues usando (14.8.14) tenemos que $\sigma_k = 0$ en $k = k_c$, y $R = R_c$. Aplicando (14.8.20) y (14.8.21) al desarrollo (14.8.22), obtenemos:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -is_k \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{s_{kk}}{2!} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + s_R(R - R_c)A.$$

Como $is_k = \omega_k$ es la velocidad de grupo usual (real), la amplitud de la onda (compleja) es solución de una ecuación en derivadas parciales, llamada **ecuación de Ginzburg-Landau compleja linealizada**, ecuación GLCL:

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \omega_k \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{s_{kk}}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + s_R(R - R_c)A.} \quad (14.8.23)$$

El coeficiente de difusión (el coeficiente de la derivada segunda) es complejo, pues $s_{kk} = \sigma_{kk} - i\omega_{kk}$. Para que la ecuación GLCL esté bien propuesta, la parte real del coeficiente de difusión $-\sigma_{kk}/2$ debe ser positiva y esta propiedad se verifica pues la tasa real de crecimiento σ tiene un mínimo local allí (14.8.15). Así pues (14.8.23) es la ecuación de la envolvente que generaliza la ecuación de Schrödinger lineal en prácticamente cualquier situación física en la que la solución $u = 0$ sea ligeramente inestable. Las soluciones de tipo onda (14.8.23) crecen exponencialmente en el tiempo.

14.8.6. Ecuación de Ginzburg-Landau compleja no lineal

La ecuación GLCL (14.8.23) describe la amplitud de onda de una solución de una ecuación en derivadas parciales en la que la solución $u = 0$ es ligeramente inestable. Las ecuaciones lineales son, en general, aproximaciones para amplitudes pequeñas de ecuaciones no lineales más realistas, que aparecen con más frecuencia en la naturaleza. Como las soluciones de (14.8.23) crecen exponencialmente en el tiempo, a partir de un determinado momento toman valores demasiado grandes como para que la aproximación lineal siga siendo válida. Usando métodos perturbativos, se puede demostrar que en la mayoría de los problemas físicos debemos modificar la Ecuación (14.8.23) y tener en cuenta los términos no lineales pequeños. De este modo, podemos aproximar $u(x, t)$ igual que antes por $A(x, t)e^{i[k_c x - \omega(k_c, R_c)t]}$, pero ahora

$A(x, t)$ verifica la **ecuación de Ginzburg-Landau compleja**, ecuación GLC:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega_k \frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{s_{kk}}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + s_R(R - R_c)A + \gamma A |A|^2, \quad (14.8.24)$$

donde $\gamma = \alpha + i\beta$ es un coeficiente complejo de gran importancia, que puede deducirse para cada problema físico concreto usando métodos perturbativos, no sin gran esfuerzo. Observemos que la ecuación GLC (14.8.24) generaliza la ecuación SNL (14.7.35) en el sentido de que el coeficiente de la segunda derivada es complejo, no imaginario puro ($s_{kk} = \sigma_{kk} - i\omega_{kk}$, donde $\sigma_{kk} < 0$), por la existencia del término de inestabilidad $s_R(R - R_c)A$ y porque el coeficiente de la no linealidad es también complejo. Como ocurre con la gran mayoría de las ecuaciones en derivadas parciales no lineales, es imposible realizar un estudio completo del problema de valores iniciales asociado a la ecuación GLC (14.8.24). Sólo presentaremos algunos resultados sencillos para esta ecuación.

Diagramas de bifurcación y la ecuación de Landau. La ecuación para la amplitud (14.8.24) carece de dependencia espacial si el problema inestable del que surge es una ecuación diferencial ordinaria o si se fija el número de onda k_c (como ocurre si se considera un dominio acotado). Si la ecuación GLC no depende de la variable espacial, entonces la ecuación para la amplitud se convierte también en una ecuación diferencial, la llamada **ecuación de Landau**,

$$\frac{dA}{dt} = s_R(R - R_c)A + \gamma A |A|^2. \quad (14.8.25)$$

La solución $u = 0$ pasa a ser inestable ($u(x, t) = A(t)e^{i[k_c x - \omega(k_c, R_c)t]}$) con frecuencia $\omega(k_c, R_c)$ en $R = R_c$. Éste es un fenómeno característico de las ecuaciones diferenciales, llamado **bifurcación de Hopf**. Señalemos que los coeficientes $s_R = \sigma_R - i\omega_R$ y $\gamma = \alpha + i\beta$ son complejos, donde $\sigma_R > 0$ [véase (14.8.17)]. Se puede resolver la ecuación de Landau mediante un cambio de variables a coordenadas polares, $A(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$. Como $\frac{dA}{dt} = e^{i\theta(t)}\left(\frac{dr}{dt} + ir\frac{d\theta}{dt}\right)$, y tomando las partes real e imaginaria de la Ecuación (14.8.25), se obtienen de ésta dos ecuaciones para el tamaño r y la fase θ de la amplitud:

$$\frac{dr}{dt} = \sigma_R(R - R_c)r + \alpha r^3, \quad (14.8.26)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega_R(R - R_c) + \beta r^2. \quad (14.8.27)$$

Suponemos que se tiene $\sigma_R > 0$, de manera que la solución $u = 0$ es estable si $R < R_c$, e inestable si $R > R_c$. La ecuación radial (14.8.26) es más importante y se puede resolver de forma independiente de la ecuación de fase. Si buscamos soluciones de equilibrio r_e de la ecuación radial (14.8.26), tenemos

$$0 = \sigma_R(R - R_c)r_e + \alpha r_e^3.$$

La solución de equilibrio $r_e = 0$ corresponde a $A = 0$, o lo que es lo mismo a $u = 0$. Comprobaremos enseguida lo que ya deberíamos saber, que la solución $u = 0$ ($r_e = 0$) es estable si $R < R_c$, e inestable si $R > R_c$. Existe, por otro, lado otra solución de equilibrio próxima de gran importancia, verificando

$$0 = \sigma_R(R - R_c) + \alpha r_e^2.$$

Para que realmente exista este equilibrio no trivial, se debe tener $\frac{\sigma_R(R - R_c)}{\alpha} < 0$. Si $\alpha < 0$, esta condición implica $R > R_c$ (y viceversa). En la Figura 14.8.4 se puede ver, en ambos casos ($\alpha > 0$ y $\alpha < 0$), el equilibrio r_e como función del parámetro R , lo que se conoce como **diagrama de bifurcación**. El punto $R = R_c$ se denomina **punto de bifurcación**, pues el número de equilibrios varía (se bifurca) en ese punto. Como $r = |A|$, nos restringiremos al caso $r \geq 0$. Sin embargo, éstos son sólo soluciones de equilibrio de la ecuación de primer orden no lineal (14.8.26). Para determinar todas las soluciones (no sólo las soluciones de equilibrio), y verificar cuándo estas soluciones de equilibrio son estables o inestables, representamos un **diagrama de fases unidimensional**, véase la Figura 14.8.4. Trazamos líneas verticales (correspondientes a fijar el valor de R) e incluimos flechas hacia arriba si r es creciente ($\frac{dr}{dt} > 0$) o hacia abajo si r es decreciente ($\frac{dr}{dt} < 0$). El signo de $\frac{dr}{dt}$ viene determinado por la ecuación diferencial (14.8.26). Existen dos casos dependiendo del signo de α (la parte real de γ). Aunque en la figura se presentan los dos posibles casos, estamos interesados únicamente en el caso $\alpha < 0$ y, por tanto, describiremos sólo éste. Observemos que en el caso $\alpha < 0$ se tiene $\frac{dr}{dt} < 0$, si r es suficientemente grande. Dibujamos entonces flechas hacia abajo. La dirección de estas flechas cambia en el punto de equilibrio (si el equilibrio es una raíz simple). Vemos ahora que $r = 0$ (que corresponde a $u = 0$) es estable si $R < R_c$ pues todas las soluciones cercanas se aproximan al equilibrio según avanza el tiempo, mientras que es inestable si $R > R_c$. El equilibrio no trivial que se bifurca del origen (y que se reduce a éste cuando $R \rightarrow R_c$), existe únicamente si $R > R_c$, y es además estable (si $\alpha < 0$). Así pues, este fenómeno se denomina, si $\alpha < 0$, **bifurcación de Hopf supercrítica (subcrítica si $\alpha > 0$)**, pues el equilibrio no trivial existe para R mayor que R_c (menor que R_c en el otro caso). Es costumbre en los diagramas de bifurcación señalar los equilibrios inestables con líneas discontinuas y utilizar líneas continuas para denotar los equilibrios estables, como puede verse en la Figura 14.8.5. La no linealidad tiene dos posibles efectos en los equilibrios. Si la no linealidad es de tipo estabilizador ($\alpha < 0$), entonces se crea una solución estable para $R > R_c$. Esta solución estable tiene amplitud pequeña, pues r_e es proporcional a $(R - R_c)^{1/2}$, lo cual es consistente con nuestro análisis basado en la serie de Taylor, suponiendo

que $R - R_c$ es pequeño y r está próximo a cero. Si la no linealidad es de tipo desestabilizador ($\alpha > 0$), entonces se crea una solución inestable para $R < R_c$. En ese caso, nos preguntamos qué ocurre para $R > R_c$. La dinámica lineal es inestable y la dinámica no lineal no estabiliza la solución. En su lugar, se observa que la solución explota (tiende a más o menos infinito en tiempo finito). Si $R > R_c$ (y $\alpha > 0$), no existen soluciones estables con amplitudes pequeñas a las que se les pueda aplicar un análisis lineal o débilmente no lineal; hay que entender el problema completamente no lineal original.

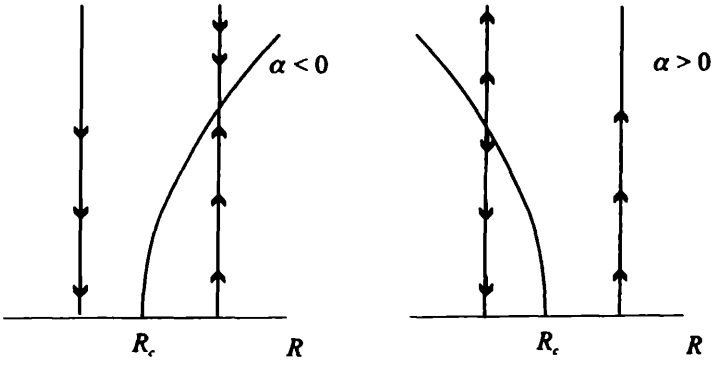


Figura 14.8.4: Diagrama de bifurcación para la bifurcación de Hopf.

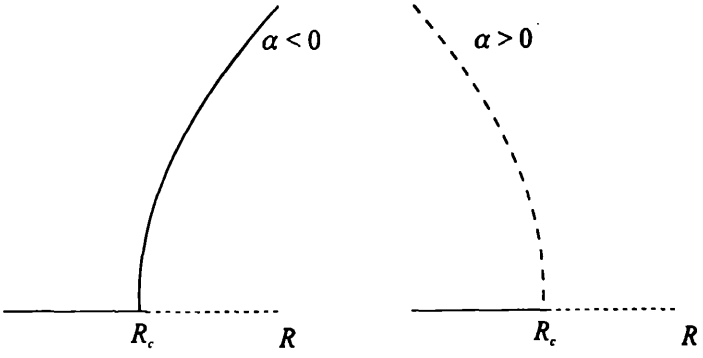


Figura 14.8.5: Estabilidad en el diagrama de bifurcación para la bifurcación de Hopf.

Para la solución de equilibrio que se bifurca del origen (sea estable o inestable), se tiene que r toma un valor específico (que depende de $R - R_c$). Usando (14.8.27), vemos que esta solución bifurcada ($A = r e^{i\theta} = r_e e^{i\theta}$) es, de hecho, una solución periódica con frecuencia $\omega_R(R - R_c) - \beta r_e^2 = (R - R_c)(\alpha \omega_R - \beta \sigma_R) / \alpha$. En la ecuación en derivadas parciales original, es decir, para $u = A(x, t) e^{i[k_c x - \omega(k_c, R_c)t]}$, la frecuencia es $\omega(k_c, R_c) + (R - R_c)(\alpha \omega_R - \beta \sigma_R) / \alpha$, y vemos la dependencia de la frecuencia en el parámetro R y la amplitud de equilibrio $|A|^2 = r_e^2$. La solución bifurcada es periódica en el tiempo (con un número de onda constante). En resumen, y para esta ecuación tan relativamente simple, la ecuación de Landau (14.8.25), la solución bifurcada es estable mientras que la solución trivial es inestable (y viceversa).

Soluciones bifurcadas para la ecuación de Ginzburg-Landau compleja. Veremos ahora que la ecuación GLC (14.8.24) tiene soluciones no triviales

en forma de ondas planas elementales

$$A(x, t) = A_0 e^{i[Kx - \Omega t + \phi_0]}, \quad (14.8.28)$$

donde A_0 y ϕ_0 son constantes reales. Como $u = A(x, t)e^{i[k_c x - \omega(k_c, R_c)t]}$, se sigue que el número de onda para $u(x, t)$ es $k_c + K$. Como antes hemos utilizado la notación k para el número de onda de $u(x, t)$, tenemos

$$K = k - k_c$$

y la frecuencia es $\omega(k_c, R_c) + \Omega$. Para que se satisfaga la ecuación GLC, la constante K debe ser pequeña (o lo que es lo mismo, el número de onda debe estar próximo a k_c). Sustituyendo (14.8.28) en (14.8.24) obtenemos

$$-i\Omega + i\omega_k K = \frac{s_{kk}}{2} K^2 + s_R(R - R_c) + \gamma A_0^2.$$

Como $s_{kk} = \sigma_{kk} - i\omega_{kk}$ (con $\sigma_{kk} < 0$), $s_R = \sigma_R - i\omega_R$ (con $\sigma_R > 0$), y $\gamma = \alpha + i\beta$ son complejos, debemos considerar sus partes reales e imaginarias,

$$\alpha A_0^2 = -\left[\frac{\sigma_{kk}}{2} K^2 + \sigma_R(R - R_c)\right], \quad (14.8.29)$$

$$\Omega = \omega_k K + \frac{\omega_{kk}}{2} K^2 + \omega_R(R - R_c) - \beta A_0^2. \quad (14.8.30)$$

Para que existan soluciones en la forma (14.8.28), el miembro de la derecha de (14.8.29) debe tener el mismo signo que α . En esta última fórmula (14.8.29), reconocemos los términos $\frac{\sigma_{kk}}{2} K^2 + \sigma_R(R - R_c)$ como parte del desarrollo de Taylor (14.8.16) de la tasa de crecimiento $\sigma(k, r)$. Al igual que antes existen dos casos completamente diferentes dependiendo del signo de α , la parte real del coeficiente no lineal γ . Si $\alpha < 0$ (el caso en que la no linealidad tenía un efecto estabilizador en la ecuación de Landau), las soluciones existen sólo si $\frac{\sigma_{kk}}{2} K^2 + \sigma_R(R - R_c) > 0$, que corresponde a una tasa de crecimiento positiva (la pequeña franja de números de onda crecientes y próximos a k_c que aparecen sólo si $R > R_c$). Si $\alpha > 0$ (el caso en que la solución bifurcada era inestable en la ecuación de Landau), existen soluciones si $\frac{\sigma_{kk}}{2} K^2 + \sigma_R(R - R_c) < 0$, es decir, si la tasa de crecimiento es negativa (excluyendo la pequeña franja mencionada antes de números de onda próximos a k_c). Sin embargo, no es fácil determinar si estas soluciones son estables o no y, por ello, sólo comentaremos este aspecto en algún caso particular, y de forma breve. De hecho, y aunque la relación (14.8.29) es probablemente más importante que la Fórmula (14.8.30), nos detendremos sólo en esta última. De ella se observa que la variación de la frecuencia en las soluciones se debe a su dependencia del número de onda, el parámetro R y la amplitud.

Estabilidad para la ecuación de Ginzburg-Landau compleja. Como hemos dicho, determinar la estabilidad para las ondas elementales de la ecuación GLC no es fácil en general. Vamos, pues, a describir brevemente algunos resultados sin demostración. Discutiremos primero el caso en el que los coeficientes de la

ecuación (14.8.24) son imaginarios puros y, después, el caso de coeficientes reales. El caso general (cuya discusión omitiremos) está más próximo al caso real.

Inestabilidad de Benjamin-Feir y recurrencia para la ecuación de Schrödinger no lineal. Cuando los coeficientes de la ecuación GLC son imaginarios puros ($s_{kk} = -i\omega_{kk}$ con $\sigma_{kk} = 0$, $s_R = \sigma_R - i\omega_R$ con $\sigma_R = 0$, y $\gamma = i\beta$ con $\alpha = 0$), esta ecuación se reduce a la ecuación de Schrödinger no lineal (SNL):

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \omega_k \frac{\partial A}{\partial x} = i \frac{\omega_{kk}}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + i\beta A |A|^2. \quad (14.8.31)$$

De hecho, existe un término adicional $-i\omega_R(R - R_c)A$ en el miembro de la derecha de (14.8.31), pero se puede demostrar que su efecto se reduce a una traslación en la frecuencia, que implicaría un cambio en el parámetro R , por lo que omitiremos este término. Esta situación no se corresponde con la inestabilidad del estado $u = 0$, sino con el estado en el que la energía se concentra en un único número de onda k_0 . La solución en forma de onda viajera elemental $A(x, t) = A_0 e^{i[Kx - \Omega t + \phi_0]}$ existe siempre para cualquier amplitud A_0 . Como la Ecuación (14.8.29) se reduce a la identidad $0 = 0$, tenemos que la amplitud puede tomar valores arbitrarios; por otro lado, la Ecuación (14.8.30) determina la frecuencia Ω (un ejemplo particular que suele aparecer en óptica es el caso $K = 0$, que implica $\Omega = -\beta A_0^2$). Se puede probar (no de manera sencilla) que estas soluciones son estables si β tiene signo contrario a ω_{kk} , por lo que en ocasiones se observan estas ondas no lineales. Sin embargo, si β tiene el mismo signo que ω_{kk} , estas ondas viajeras son inestables, según probaron Benjamin y Feir [1967]. Un análisis del problema de valores iniciales para la Ecuación (14.8.31) con condiciones de contorno periódicas, muestra que puede haber más de una longitud de onda correspondiente a una serie de Fourier elemental inestable (véase Ablowitz y Clarkson [1991]). En principio, estas ondas inestables crecerían como deberían crecer las soluciones de una ecuación lineal. Sin embargo, el término no lineal impide este tipo de crecimiento. En el caso en que la solución elemental es inestable (β tiene el mismo signo que ω_{kk}), experimentos prácticos (Yuen y Lake [1975]), numéricos (Yuen y Ferguson [1978]), así como teoría más avanzada, muestran que la solución vuelve aproximadamente a su estado inicial después de un tiempo largo, de manera que la estabilidad se repite aproximadamente una y otra vez. Este fenómeno se denomina **recurrencia**.

Ondas de amplitud finita estables e inestables. Si el estado $u = 0$ es inestable para $R = R_c$, existe además un número de onda privilegiado $k = k_c$, la tasa de crecimiento es real ($s_{kk} = \sigma_{kk}$, donde $\sigma_{kk} < 0$ y $\omega_{kk} = 0$, $s_R = \sigma_R$, con $\sigma_R > 0$ y $\omega_R = 0$) y el coeficiente no lineal es real ($\gamma = \alpha$), se tiene entonces finalmente que se puede considerar la amplitud A real y la Ecuación GLC (14.8.24) se reduce a

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\sigma_{kk}}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \sigma_R(R - R_c)A + \alpha A^3,$$

donde hemos supuesto $\omega_k = 0$. La solución en forma de onda viajera elemental $A(x, t) = A_0 e^{i[Kx - \Omega t + \phi_0]}$, corresponde a $K = k - k_c$. Usando las fórmulas (14.8.29)

y (14.8.30), vemos que estas soluciones existen si

$$\alpha A_0^2 = -\left[\frac{\sigma_{kk}}{2}K^2 + \sigma_R(R - R_c)\right], \quad (14.8.32)$$

$$\Omega = 0. \quad (14.8.33)$$

Esta solución es periódica en el espacio y constante en el tiempo. Al igual que en el caso general, si $\alpha < 0$, estas soluciones existen en una pequeña banda de números de onda con crecimiento exponencial ($|k - k_c| < \sqrt{\frac{2\sigma_R(R - R_c)}{-\sigma_{kk}}}$) que aparecen para $R > R_c$. Sin embargo, Eckhaus [1965] muestra que estas ondas son estables únicamente en una banda más estrecha, $|k - k_c| < \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2\sigma_R(R - R_c)}{-\sigma_{kk}}}$.

EJERCICIOS 14.8

- 14.8.1.** El movimiento (no lineal) de un péndulo verifica la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0$, donde x es el ángulo que forma con la vertical. Las soluciones en el equilibrio satisfacen $\sin x_0 = 0$. Esto nos da la posición natural $x_0 = 0$ así como la posición invertida $x_0 = \pi$. Determinar cuándo una solución de equilibrio es estable o inestable considerando datos iniciales cercanos al equilibrio y aproximando la ecuación diferencial cerca de esa solución. *Indicación:* utilizar una serie de Taylor de $\sin x$ alrededor de $x = x_0$.
- 14.8.2.** (a) Esbozar los diagramas de bifurcación para una bifurcación de tipo silla-nodo en un punto $(x_c, R_c) = (0, 0)$, correspondientes a cuatro elecciones diferentes de signos de f_R y f_{xx} .
- (b) Determinar la estabilidad usando diagramas de fase unidimensionales.
- 14.8.3.** Supóngase que en un punto de bifurcación $(x_c, R_c) = (0, 0)$ se tienen las condiciones adicionales $f_R = 0$ y $f_{xx} \neq 0$. Demostrar, mediante desarrollo en serie de Taylor, que se verifica la ecuación aproximada

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f_{xx}}{2}x^2 + f_{xR}Rx + \frac{f_{RR}}{2}R^2.$$

- (a) Si $f_{xR}^2 > f_{xx}f_{RR}$, la bifurcación se denomina **transcrítica**. Analizar la estabilidad usando un diagrama de fase unidimensional (supóngase $f_{xx} > 0$). Explicar por qué la bifurcación transcritical se llama también **intercambio de estabildades**.
- (b) Demostrar que si $f_{xR}^2 < f_{xx}f_{RR}$, el equilibrio se reduce a $R = R_c$.
- 14.8.4.** Supóngase que en un punto de bifurcación $(x_c, R_c) = (0, 0)$ se tienen las condiciones adicionales $f_R = 0$ y $f_{xx} = 0$. Demostrar, mediante desarrollo en serie de Taylor, que se verifica la ecuación aproximada

$$\frac{dx}{dt} = f_{xR}Rx + \frac{f_{RRR}}{6}R^3 + \dots$$

Supóngase también $f_{xR} > 0$. Demostrar que existen dos casos distintos dependiendo del signo de f_{RRR} . Analizar la estabilidad mediante un diagrama de fase unidimensional (supóngase $f_{xx} > 0$). Explicar por qué esta bifurcación recibe el nombre de **bifurcación de tipo horquilla**.

14.8.5. En los siguientes ejemplos, esbozar un diagrama de bifurcación y determinar la estabilidad mediante un diagrama de fase unidimensional:

(a) $\frac{dx}{dt} = 2x + 5R,$

(b) $\frac{dx}{dt} = -5x + 2R,$

(c) $\frac{dx}{dt} = 2x^2 + 5R,$

(d) $\frac{dx}{dt} = -2x^2 - 5R,$

(e) $\frac{dx}{dt} = xR + x^2,$

(f) $\frac{dx}{dt} = Rx - x^3,$

(g) $\frac{dx}{dt} = -(x - 3R)(x - 5R),$

(h) $\frac{dx}{dt} = Rx + x^3,$

(i) $\frac{dx}{dt} = -(x - 4)(x - e^R),$

(j) $\frac{dx}{dt} = 1 + (R - 1)x + x^2$

(dibujar primero R como función de x),

(k) $\frac{dx}{dt} = R^2 + Rx + x^2,$

(l) $\frac{dx}{dt} = R^2 + 4Rx + x^2.$

14.8.6. Encontrar la tasa de decaimiento exponencial σ y la frecuencia ω [$e^{st} = e^{(\sigma - i\omega)t}$] para las siguientes ecuaciones:

(a) $\frac{\partial u}{\partial t} = -u - R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - c \frac{\partial u}{\partial x},$

*(b) $\frac{\partial u}{\partial t} = -u - R \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$

(c) $\frac{\partial u}{\partial t} = u + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$

14.8.7. Resolver la misma cuestión para las ecuaciones siguientes, explicando brevemente si están mal propuestas:

(a) $\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial u}{\partial x},$

(b) $\frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\partial u}{\partial x},$

*(c) $\frac{\partial u}{\partial t} = -i \frac{\partial u}{\partial x},$

(d) $\frac{\partial u}{\partial t} = i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

(e) $\frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\partial u}{\partial x} = i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$

(f) $\frac{\partial u}{\partial t} - i \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$

(g) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4},$

(h) $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$

14.8.8. Deducir las relaciones (14.8.20) y (14.8.21).

14.8.9. Determinar la relación de dispersión para la ecuación de Ginzburg-Landau compleja linealizada.

14.8.10. Dibujar diagramas de bifurcación y determinar la estabilidad mediante diagramas de fase unidimensionales para la ecuación $\frac{dr}{dt} = \sigma_R(R - R_c)r + \alpha r^3$ en los siguientes casos:

(a) $\sigma_R < 0$ y $\alpha > 0,$

(b) $\sigma_R < 0$ y $\alpha < 0.$

14.9. Métodos de perturbaciones singulares: escalas múltiples

A menudo, los problemas físicamente interesantes se expresan mediante problemas matemáticos de gran dificultad, pero que se pueden aproximar (en algún sentido) por problemas más sencillos cuya solución es fácil de obtener. Por ejemplo, en la Sección 9.6 considerábamos una región aproximadamente circular, y estábamos interesados en estudiar el efecto de la pequeña perturbación del dominio respecto de esa geometría circular perfecta, es decir, estudiábamos cuánto se diferenciaba nuestra solución de la solución correspondiente al dominio circular. En general, se puede introducir un pequeño parámetro ε en el problema de manera que la solución dependa también de él, por ejemplo $u(x, y, t, \varepsilon)$. Si se puede escribir la solución en la forma

$$u(x, y, t, \varepsilon) = u_0(x, y, t) + \varepsilon u_1(x, y, t) + \dots \quad (14.9.1)$$

decimos que se trata de un **problema de perturbación regular**. El primer término (llamado término principal), $u_0(x, y, t)$ es, en general, la solución correspondiente al problema sin perturbar, con $\varepsilon = 0$, y suele ser conocida. Normalmente, sólo son necesarios unos pocos términos del desarrollo (14.9.1) y éstos, como por ejemplo $u_1(x, y, t)$, que suele ser el más interesante, se pueden obtener de manera sucesiva sustituyendo el desarrollo anterior en la ecuación en derivadas parciales de partida.

Cuando no es válido un desarrollo como (14.9.1), nos encontramos con situaciones más difíciles de tratar (pero más interesantes), en cuyo caso el problema se denomina **problema de perturbaciones singulares**. Existen textos enteros dedicados a este tema (como, por ejemplo, el excelente libro de Kevorkian y Cole [1996]). En ocasiones, sí se pueden obtener desarrollos como (14.9.1), pero estos desarrollos tienen formas diferentes en las distintas regiones de interés en el problema. Esto es lo que se denomina método de **capas límites**, que será estudiado posteriormente en la Sección 14.10. En ocasiones se introducen también variables con escalas diferentes (que definiremos en breve), y que se utilizan de manera simultánea para tratar los diferentes comportamientos que se observan en las distintas regiones, dando lugar a lo que se llama método de **escalas múltiples**.

14.9.1. Ejemplo en ecuaciones diferenciales: oscilador débilmente amortiguado

Como motivación para el uso del método de escalas múltiples, comenzaremos estudiando éste en el contexto más sencillo de una ecuación diferencial ordinaria, considerando un oscilador lineal con un pequeño término de amortiguamiento no lineal (proporcional al cubo de la velocidad). En variables adimensionales la ecuación es

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dt^2} + u = -\varepsilon \left(\frac{du}{dt} \right)^3,} \quad (14.9.2)$$

donde ε es un parámetro positivo pequeño, $0 < \varepsilon \ll 1$. El término de perturbación se traduce en cierta forma de amortiguamiento no lineal, pues es una función impar de la velocidad $\frac{du}{dt}$.

Intento de desarrollo regular. Comenzamos suponiendo que la solución tiene un desarrollo regular en la forma:

$$u(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots \quad (14.9.3)$$

Sustituyendo (14.9.3) en (14.9.2) y comparando los coeficientes de las diferentes potencias de ε , obtenemos

$$O(\varepsilon^0) \quad \frac{d^2 u_0}{dt^2} + u_0 = 0, \quad (14.9.4)$$

$$O(\varepsilon^1) \quad \frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = - \left(\frac{du_0}{dt} \right)^3. \quad (14.9.5)$$

El término principal da lugar a la ecuación sin perturbar (14.9.4). La solución de ésta es una función periódica, una combinación lineal de $\sin t$ y $\cos t$. Para simplificar algunas de las operaciones que nos aparecerán posteriormente, utilizaremos la notación exponencial para denotar estas funciones periódicas:

$$u_0(t) = Ae^{it} + A^*e^{-it}. \quad (14.9.6)$$

La amplitud A es compleja y para que la combinación lineal dé lugar a una solución real, el otro coeficiente A^* debe ser el conjugado complejo de A .

Usando esta solución en (14.9.5), obtenemos el primer término, el más importante de la perturbación, u_1 :

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = i(Ae^{it} - A^*e^{-it})^3 = i(A^3 e^{3it} - 3A^2 A^* e^{it}) + (*), \quad (14.9.7)$$

donde $(*)$ representa el conjugado complejo del otro sumando del miembro derecho. Vemos que este miembro derecho contiene los armónicos fundamentales $e^{\pm it}$, así como los terceros armónicos $e^{\pm 3it}$. Usando el método de los coeficientes indeterminados, es fácil encontrar una solución particular correspondiente a los terceros armónicos. Sin embargo, los armónicos fundamentales producen resonancia, pues su frecuencia coincide con la frecuencia natural de la ecuación. Por tanto, la amplitud de la solución correspondiente crece linealmente en el tiempo y recibe el nombre de **solución secular**. Así, una solución particular de la Ecuación (14.9.7) es

$$u_1(t) = i \frac{A^3}{1-9} e^{3it} + \# te^{it} + (*),$$

donde $\#$ es un coeficiente no nulo cuyo valor no es necesario determinar (se podría calcular de nuevo por el método de coeficientes indeterminados). A esta solución particular habría que sumarle la solución homogénea general.

La resonancia produce que la aproximación regular considerada de la solución, $u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots$, sea una buena aproximación sólo si εt es pequeño; no basta con que ε sea pequeño. Por ello, si t es suficientemente grande, de manera que εt sea de orden uno o mayor, la aproximación regular deja de ser válida, precisamente por la presencia del término resonante o secular³.

El método de las escalas múltiples. Hemos visto que los desarrollos regulares de la solución perturbada no son válidos para tiempos grandes. Esto sugiere la aparición de fenómenos interesantes, precisamente cuando $\varepsilon t = O(1)$. Si estamos interesados en la solución en esta escala de tiempos largos, debemos suponer que la solución depende también del tiempo en esta escala, es decir, $u = u(t, T, \varepsilon)$ depende de dos variables, una **variable rápida** t y una **variable lenta**

$$T = \varepsilon t. \quad (14.9.8)$$

Éste es el método conocido como **método de escalas múltiples**, llamado también, a veces, método de variación lenta. Usando la dependencia en estas dos variables, podemos utilizar la regla de la cadena, para tener

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T}, \quad (14.9.9)$$

donde las derivadas ahora son derivadas parciales (y utilizamos la notación con subíndices). De esta manera, la ecuación no lineal (14.9.2) del oscilador amortiguado se convierte en

$$u_{tt} + 2\varepsilon u_{tT} + \varepsilon^2 u_{TT} + u = -\varepsilon(u_t + \varepsilon u_T)^3. \quad (14.9.10)$$

Aplicando ahora un desarrollo regular, $u(t, T, \varepsilon) = u_0(t, T) + \varepsilon u_1(t, T) + \dots$, tenemos:

$$O(\varepsilon^0) : \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + u_0 = 0, \quad (14.9.11)$$

$$O(\varepsilon^1) : \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 = -\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^3 - 2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right). \quad (14.9.12)$$

Vemos que sólo el sumando $-2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)$ en el término de orden ε es diferente en este desarrollo al desarrollo (14.9.4) y (14.9.5) intentado antes.

³N.T. La denominación histórica del término secular procede de su aplicación a las mediciones astronómicas, donde se comprobó que el tiempo característico a partir del cual deja de ser válida la aproximación regular era, más o menos, de un siglo.

La ecuación principal es, de nuevo, la del oscilador lineal sin perturbar, pero debemos recordar que $\frac{\partial}{\partial t}$ implica mantener T fijo. La solución general de esta ecuación es entonces

$$u_0(t, T) = A(T)e^{it} + A^*(T)e^{-it}, \tag{14.9.13}$$

donde $A(T)$ es una función compleja arbitraria de la variable lenta.

Usando (14.9.13), el primer término de la perturbación satisface

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 &= i(Ae^{it} - A^*e^{-it})^3 - 2i \left(\frac{dA}{dT}e^{it} - \frac{dA^*}{dT}e^{-it} \right) \\ &= i(A^3e^{3it} - 3A^2A^*e^{it}) - 2i \frac{dA}{dT}e^{it} + (*). \end{aligned} \tag{14.9.14}$$

Queremos determinar $A(T)$ de manera que desaparezca el término secular y, así, la aproximación sea válida para tiempos grandes, $t = O(\frac{1}{\epsilon})$. Tenemos así:

$$2 \frac{dA}{dT} = -3A^2A^*. \tag{14.9.15}$$

Existe otro modo de obtener esta ecuación. Como (14.9.14) es una ecuación diferencial lineal no homogénea, con dos condiciones de contorno homogéneas (condiciones de periodicidad), el teorema de la alternativa de Fredholm implica que puede existir soluciones periódicas sólo si el miembro derecho es ortogonal a las soluciones homogéneas, esto es, en este caso, a los armónicos $e^{\pm it}$. De aquí se deduce (14.9.15), pues por la teoría de series de Fourier, e^{3it} es ortogonal a $e^{\pm it}$ en el intervalo de 0 a 2π .

La ecuación diferencial para la variación lenta de la amplitud compleja $A(T)$ puede resolverse usando la forma polar (en términos de la amplitud real y la fase),

$$A(T) = r(T)e^{i\phi(T)}, \tag{14.9.16}$$

obteniéndose

$$u_0(t, T) = r(T)e^{i(t+\phi(T))} + r(T)e^{-i(t+\phi(T))} = 2r(T) \cos(t + \phi(T)).$$

Vemos que $2r(T)$ es la amplitud real de la oscilación de variación lenta, mientras que la fase de esta oscilación es $t + \phi(T)$. Como la derivada temporal de la fase se corresponde físicamente con la frecuencia, tenemos que ésta es $1 + \epsilon \frac{d\phi}{dT}$.

Por otro lado, $\frac{dA}{dT} = (\frac{dr}{dT} + i \frac{d\phi}{dT}r)e^{i\phi(T)}$ y $A^2A^* = r^3e^{i\phi(T)}$, por lo que (14.9.15) se traduce, tomando las partes real e imaginaria, en

$$2 \frac{dr}{dT} = -3r^3, \tag{14.9.17}$$

$$r \frac{d\phi}{dT} = 0. \tag{14.9.18}$$

La ecuación compleja única (14.9.15) es equivalente a dos ecuaciones reales, (14.9.17) y (14.9.18). En este ejemplo particular, la traslación de la fase es constante y vale $\phi(T)$. Sin embargo, la amplitud de la oscilación decae debido al amortiguamiento no lineal que se obtiene a partir de (14.9.17). Escribiendo esta ecuación como $\frac{dr}{r^3} = -\frac{3}{2}dT$, y después de algunos cálculos, llegamos a

$$r(T) = \frac{r(0)}{\sqrt{1 + 3r^2(0)T}}.$$

La fase $[t + \phi(T)]$ varía rápidamente, mientras que la amplitud $[r(T)]$ lo hace de manera lenta. Esto es típico de los problemas con escalas diferentes. Un dibujo de la solución suele ser de gran ayuda, pues en él se debería distinguir la aparición simultánea de las dos escalas. El oscilador modelizado en este ejemplo se denomina **oscilador de variación lenta**, pues la amplitud decae lentamente.

14.9.2. Oscilador de variación lenta

Otro ejemplo de ecuación diferencial en el que aparecen osciladores de variación lenta es el de las ecuaciones oscilatorias con frecuencia variable. Consideremos el siguiente sistema masa-resorte cuya constante elástica varía lentamente con el tiempo:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2(\epsilon t)u = 0. \quad (14.9.19)$$

Esta ecuación también modeliza la propagación de la luz en un medio en el que el índice de refracción ω varía lentamente, $\omega(\epsilon t)$. También, si en la ecuación unidimensional de ondas ($\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2(x)\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$) fijamos la frecuencia temporal ω_f [es decir, ponemos $E = u(x)e^{-i\omega_f t}$], obtenemos la ecuación $-\omega_f^2 u = c^2(x)\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$. Si la longitud típica sobre la que varía $c(x)$ es mucho mayor que la longitud de onda típica $\frac{2\pi c}{\omega_f}$ de las soluciones, entonces el medio es de variación lenta y obtenemos de nuevo una ecuación equivalente a (14.9.19).

Las soluciones de (14.9.19) dependen de dos variables, una fase rápida θ y un tiempo lento $T = \epsilon t$. Si el coeficiente $\omega(\epsilon t)$ fuese una constante, entonces la frecuencia de vibración sería ω . Intuitivamente, si ω varía lentamente, entonces la frecuencia también variará lentamente, pero sería precisamente $\omega(\epsilon t)$. Como hemos visto antes, la frecuencia debe ser la derivada temporal de la fase, por lo que suponemos que la fase rápida es exactamente

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(\epsilon t) \quad (14.9.20)$$

(se puede probar que los métodos de perturbaciones basados en fases que no vienen dadas por (14.9.20) no funcionan). Obtenemos así la expresión

$$\theta = \int \omega(\varepsilon t) dt = \frac{1}{\varepsilon} \int \omega(T) dT. \quad (14.9.21)$$

Suponemos, como antes, que la solución $u(\theta, T, \varepsilon)$ depende de dos variables, una fase rápida θ que verifica (14.9.20) y un tiempo lento $T = \varepsilon t$. Utilizando la regla de la cadena (que es la base del método de las escalas múltiples), tenemos

$$\frac{d}{dt} = \omega(T) \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T}. \quad (14.9.22)$$

La segunda derivada requiere mayor atención, pues el operador en (14.9.22) no tiene coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &= \left(\omega(T) \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} \right) \left(\omega(T) \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} \right) \\ &= \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \varepsilon \left(2\omega(T) \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \theta} + \omega'(T) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2}. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial (14.9.19) se convierte entonces en

$$\omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \varepsilon \left(2\omega(T) \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \omega'(T) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial T^2} + \omega^2 u = 0. \quad (14.9.23)$$

Consideramos ahora un desarrollo regular de la solución en las dos escalas

$$u(\theta, T, \varepsilon) = u_0(\theta, T) + \varepsilon u_1(\theta, T) + \dots \quad (14.9.24)$$

Sustituyendo (14.9.24) en (14.9.23), obtenemos una sucesión de ecuaciones, de las que sólo nos ocuparemos de las dos primeras

$$O(\varepsilon^0) : \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + u_0 \right) = 0, \quad (14.9.25)$$

$$O(\varepsilon^1) : \omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + u_1 \right) = -2\omega(T) \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \omega'(T) \frac{\partial u_0}{\partial \theta}. \quad (14.9.26)$$

En la aproximación de orden cero tenemos una ecuación cuya solución es un oscilador elemental de variación lenta en la fase θ :

$$u_0(\theta, T) = A(T)e^{i\theta} + A^*(T)e^{-i\theta}, \quad (14.9.27)$$

donde $A(T)$ es una función arbitraria del tiempo lento $T = \epsilon t$, que determinaremos posteriormente. Esta expresión, junto con (14.9.20), muestra que la frecuencia de variación lenta es ω , como habíamos impuesto.

Si sustituimos ahora la solución (14.9.27) en (14.9.26), obtenemos

$$\omega^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + u_1 \right) = -[2\omega(T)A'(T) + \omega'(T)A(T)]ie^{i\theta} + (*).$$

Los términos de la derecha proporcionales a los armónicos $e^{\pm i\theta}$ son seculares (resonantes, pues la frecuencia de la fuerza coincide con la frecuencia natural) y deben ser, por tanto, eliminados. Tenemos entonces una ecuación diferencial para la amplitud compleja de variación lenta

$$2\omega(T)A'(T) + \omega'(T)A(T) = 0. \quad (14.9.28)$$

Como $A(T)$ puede ser compleja, ponemos

$$A(T) = r(T)e^{i\psi}. \quad (14.9.29)$$

Sin embargo, se puede probar que en este problema la fase ψ es constante, mientras que la amplitud verifica

$$2\omega(T)r'(T) + \omega'(T)r(T) = 0. \quad (14.9.30)$$

Esta ecuación es muy fácil de resolver por distintos métodos, por ejemplo observando que es equivalente a

$$\frac{d}{dT}(\omega^{\frac{1}{2}}r) = 0, \quad (14.9.31)$$

por lo que obtenemos

$$r(T) = c\omega^{-\frac{1}{2}}, \quad (14.9.32)$$

donde c es una constante arbitraria.

Este ejemplo ilustra la propiedad conocida como **conservación de la acción**, estudiada primero por Einstein,

$$\frac{d}{dT}(\text{acción}) = 0, \quad \text{donde} \quad \text{acción} \equiv \frac{\text{energía}}{\text{frecuencia}},$$

y que sustituye a la conservación de la energía. Veamos que esta última no se conserva y que en su lugar se tiene la conservación de la acción. Se define la energía del problema como la energía que se tendría si los coeficientes fuesen constantes. En nuestro caso, si ω fuese constante, es decir, si la ecuación fuese $\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = 0$, la energía se definiría como $E = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{\omega^2}{2} u^2$ (energía cinética más energía potencial). La solución de la ecuación diferencial, en notación compleja, sería $u = Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t} =$

$2r \cos(\omega t + \phi_0)$. Por tanto, la energía es $E = \frac{\omega^2}{2} (2r)^2 (\cos^2 + \text{sen}^2) = 2\omega^2 r^2$. Tenemos así, usando (14.9.32), que la energía no se conserva,

$$\frac{dE}{dT} = \frac{d}{dT}(\omega^2 r^2) \neq 0,$$

mientras que la acción sí lo hace,

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{2\omega^2 r^2}{\omega} \right) = 0.$$

En problemas más complicados, los físicos usan la ley de conservación de la acción para determinar la variación lenta de la amplitud. No es fácil imaginar cómo se introduce o se elimina energía en el sistema mediante la acción de la fuerza elástica de variación lenta. Es por ello que es útil estudiar la conservación de la acción.

En resumen, hemos analizado la ecuación diferencial con coeficientes de variación lenta

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2(\varepsilon t)u = 0, \quad (14.9.33)$$

y hemos obtenido la siguiente solución aproximada:

$$u(t) \approx u_0(\theta, T) = c\omega^{-\frac{1}{2}} e^{i\theta + \psi} + (*) = 2c\omega^{-\frac{1}{2}} \cos \left(\int \omega(\varepsilon t) dt + \psi \right), \quad (14.9.34)$$

donde c y ψ son constantes arbitrarias, pues θ satisface

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(\varepsilon t). \quad (14.9.35)$$

Esta última relación no es difícil de memorizar, pues usualmente se obtiene la fase a partir de la noción intuitiva de la frecuencia. En cuanto a la solución, sólo es necesario recordar el factor mágico $\omega^{-\frac{1}{2}}$ que aparece en la amplitud, y que se puede obtener mediante la ley de conservación de la acción. Esta fórmula es bien conocida en la propagación de ondas en medios variables. Se puede usar también para aproximar las autofunciones de problemas de Sturm-Liouville correspondientes a autovalores grandes (véase la Sección 6.9). El método se denomina a veces, de manera incorrecta, método WKB (Wentzel, Kramers y Brillouin), aunque debería ser más apropiado el reconocimiento a Liouville y Green: estos últimos trabajaron en él de forma independiente en 1837, mientras que los primeros lo hicieron alrededor de 1920, resolviendo problemas en los que el coeficiente ω^2 pasaba de ser positivo a negativo, en conexión con el efecto túnel de la mecánica cuántica, y obteniendo relaciones entre soluciones oscilatorias del tipo de (14.9.34) y las soluciones exponenciales correspondientes.

14.9.3. Ecuaciones en derivadas parciales ligeramente inestables

Consideremos la siguiente ecuación en derivadas parciales débilmente no lineal

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ru - \varepsilon u^3, \quad (14.9.36)$$

con las condiciones de contorno $u(0, t) = 0$ y $u(L, t) = 0$. El problema linealizado ($\varepsilon = 0$) tiene como soluciones $\sin \frac{n\pi x}{L} e^{\sigma t}$, donde $\sigma = R - k(\frac{n\pi}{L})^2$. Algunos modos crecen exponencialmente, dependiendo del parámetro R . Si n es suficientemente grande, todos los modos decaen exponencialmente, al igual que ocurre en la ecuación del calor. La primera inestabilidad (del estado $u = 0$) aparece cuando R es ligeramente mayor que $k(\frac{\pi}{L})^2$, en cuyo caso sólo el modo $n = 1$ crece exponencialmente, mientras que todos los demás decrecen. Pongamos, por tanto, $R = k(\frac{\pi}{L})^2 + \varepsilon R_1$, con $R_1 > 0$, de manera que se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[k \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 + \varepsilon R_1 \right] u - \varepsilon u^3. \quad (14.9.37)$$

Se puede probar que el desarrollo regular de la solución falla para la escala de tiempo larga

$$T = \varepsilon t. \quad (14.9.38)$$

Usamos entonces el método de las escalas múltiples

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T}, \quad (14.9.39)$$

que convierte la Ecuación (14.9.37) en

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 u + \varepsilon \left[-\frac{\partial u}{\partial T} + R_1 u - u^3 \right]. \quad (14.9.40)$$

Sustituyendo ahora el desarrollo asintótico $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$ en (14.9.40), se tiene

$$O(\varepsilon^0) \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 u_0, \quad (14.9.41)$$

$$O(\varepsilon) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 u_1 - \frac{\partial u_0}{\partial T} + R_1 u_0 - u_0^3. \quad (14.9.42)$$

Usaremos como solución de la ecuación correspondiente al orden cero (14.9.41) el siguiente modo elemental

$$u_0 = A(T) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}, \quad (14.9.43)$$

pues los demás modos decaen exponencialmente en el tiempo. La amplitud $A(T)$ del modo ligeramente inestable $\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$ es una función arbitraria del tiempo lento T . Determinaremos $A(T)$ eliminando los términos seculares de la ecuación para el orden 1, $O(\varepsilon)$.

Usando (14.9.43), la ecuación perturbada (14.9.42) se convierte en

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 u_1 - \frac{dA}{dT} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + R_1 A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} - A^3 \operatorname{sen}^3 \frac{\pi x}{L}, \quad (14.9.44)$$

a la que hay que añadir las condiciones de contorno homogéneas $u_1(0, t) = 0$ y $u_1(L, t) = 0$. Si miramos ahora unas tablas trigonométricas, podemos aprovechar la fórmula $(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L})^3 = \frac{3}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L}$, para observar que la no linealidad contiene el tercer armónico en x . Esto implica que el término de fuente en la Ecuación (14.9.44) contiene sólo los armónicos primero y tercero. El método de desarrollo en autofunciones implica ahora la siguiente forma de la solución

$$u_1 = B_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + B_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L}, \quad (14.9.45)$$

que sustituida en (14.9.44) nos lleva a las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias para los coeficientes:

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = -\frac{dA}{dT} + R_1 A - \frac{3}{4} A^3, \quad (14.9.46)$$

$$\frac{\partial B_3}{\partial t} + 8k \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 B_3 = \frac{1}{4} A^3. \quad (14.9.47)$$

No necesitamos calcular una solución particular para el tercer armónico (por ejemplo, $B_3 = \frac{1}{32k} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 A^3$), pues éste no es secular; las soluciones homogéneas correspondientes al tercer armónico en x decaen exponencialmente en t .

Consideremos el término de mayor orden para el primer armónico. El miembro derecho de la Ecuación (14.9.46) es una función del tiempo lento $T = \varepsilon t$ y, por tanto, es constante respecto del tiempo rápido t , respecto del cual se tiene la derivada en el miembro izquierdo. Por tanto, la solución será una recta $B_1 = ct$. Como este crecimiento algebraico en el tiempo no es aceptable en el desarrollo asintótico $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$, debemos hacer que el miembro derecho de (14.9.46) se anule. Tenemos así que la amplitud $A(T)$ varía lentamente, pues satisface la ecuación siguiente, que hemos denominado **ecuación de Landau** en la Subsección 14.8.6:

$$\frac{dA}{dT} = R_1 A - \frac{3}{4} A^3. \quad (14.9.48)$$

De acuerdo con la teoría lineal (suponiendo A pequeño), la amplitud crece exponencialmente si $R_1 > 0$. Sin embargo, según se muestra en el diagrama de fases unidimensional de la Figura 14.9.1, la **no linealidad de la ecuación impide este crecimiento**, haciendo que la amplitud se estabilice cuando $t \rightarrow \infty$ en uno de los dos valores $A = \pm\sqrt{\frac{4R_1}{3}}$ (dependiendo del dato inicial). Este fenómeno recibe el nombre de **bifurcación de tipo horquilla**. En la Figura 14.9.1 se refleja la variación de la amplitud de equilibrio en términos de R_1 : si $R_1 > 0$, la amplitud nula $A = 0$ es inestable, mientras que los dos valores $A = \pm\sqrt{\frac{4R_1}{3}}$ son estables. La fórmula $\varepsilon R_1 = R - k\left(\frac{\pi}{L}\right)^2$ nos dice que el parámetro R_1 mide la distancia desde el valor crítico del parámetro R .

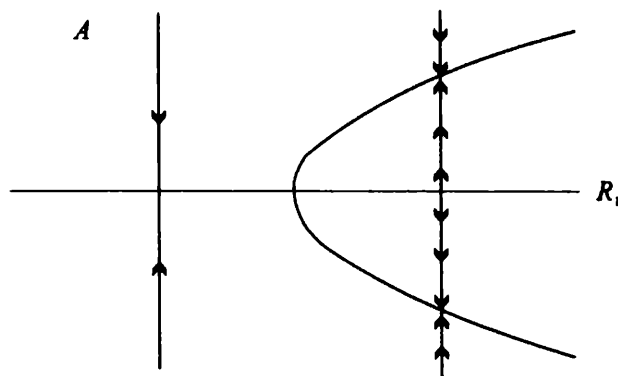


Figura 14.9.1: Diagrama de fases unidimensional y diagrama de bifurcación de tipo horquilla para la ecuación de Landau.

14.9.4. Medios de variación lenta para la ecuación de ondas

La ecuación de ondas en un medio tridimensional es

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2(x, y, z)\nabla^2 E.$$

Las ondas planas en un medio uniforme (c constante) son de la forma

$$E = E_0 e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z - i\omega t)},$$

donde $k = \left| \vec{k} \right| = \frac{\omega}{c}$. La parte espacial de la fase se puede definir, en ese caso, mediante la fórmula $\theta \equiv k_1 x + k_2 y + k_3 z$, que implica que el vector de números de onda satisface las relaciones $k_1 \equiv \frac{\partial \theta}{\partial x}$, $k_2 \equiv \frac{\partial \theta}{\partial y}$, $k_3 \equiv \frac{\partial \theta}{\partial z}$, que se pueden resumir en la ecuación $\vec{k} = \nabla \theta$.

En **medios no uniformes** (el coeficiente c depende de la variable espacial), la frecuencia temporal ω está a menudo fijada, por ejemplo, por una onda que viene del infinito, y se tiene $E = u e^{-i\omega t}$, de manera que u satisface la **ecuación reducida de ondas** (también llamada **ecuación de Helmholtz**):

$$\nabla^2 u + n^2 u = 0, \quad (14.9.49)$$

donde $n = \frac{\omega}{c}$ es el **índice de refracción**. Hemos supuesto que el medio es de **variación lenta**, es decir, que el medio varía a lo largo de distancias mucho mayores que las longitudes de onda típicas, de modo que $n^2 = n^2(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon z)$. Por ejemplo, si x varía del orden de $O(\frac{1}{\epsilon})$ (una gran cantidad de longitudes de onda), entonces el índice de refracción puede variar. El problema unidimensional análogo fue discutido en la Subsección 14.9.2.

Para obtener lo que se denomina un **tren de ondas de variación lenta**, introducimos una incógnita nueva θ , denominada fase rápida, y definimos, igual que hicimos para medios uniformes, los números de onda mediante $k_1 \equiv \frac{\partial \theta}{\partial x}$, $k_2 \equiv \frac{\partial \theta}{\partial y}$, $k_3 \equiv \frac{\partial \theta}{\partial z}$. Así, el vector de números de onda se define como sigue:

$$\boxed{\vec{k} = \nabla \theta.} \quad (14.9.50)$$

Suponemos que la solución depende de esta fase rápida θ , así como de las escalas espaciales "lentas", $X = \epsilon x$, $Y = \epsilon y$, $Z = \epsilon z$. Usando el método de escalas múltiples, a través de la regla de la cadena, tenemos, por ejemplo para la variable x ,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} = k_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X},}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(k_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X} \right) \left(k_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X} \right) \\ &= k_1^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \epsilon \left(2k_1 \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial}{\partial \theta} + k_{1x} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2}. \end{aligned}$$

En general, y usando notación vectorial (los subíndices del operador gradiente significan derivadas respecto de las variables espaciales lentas), tenemos

$$\nabla^2 = k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \epsilon \left(2\vec{k} \cdot \nabla_X \frac{\partial}{\partial \theta} + \nabla \cdot \vec{k} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \epsilon^2 \nabla_X^2. \quad (14.9.51)$$

Por tanto, la ecuación reducida de ondas (14.9.49) se escribe como

$$\boxed{k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \epsilon \left(2\vec{k} \cdot \nabla_X \frac{\partial u}{\partial \theta} + \nabla \cdot \vec{k} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \epsilon^2 \nabla_X^2 u + n^2 u = 0.} \quad (14.9.52)$$

Se puede probar (no de manera fácil) que los métodos de perturbaciones sólo funcionan si se verifica además la llamada **ecuación eikonal**:

$$\boxed{k^2 = \nabla \theta \cdot \nabla \theta = n^2,} \quad (14.9.53)$$

donde $k = |\vec{k}|$. Como ya vimos en la Sección 12.7, la ecuación eikonal implica que el número de onda de una onda de variación lenta coincide siempre con el número de onda asociado a la onda plana infinita, es decir, $k = \frac{\omega}{c} = n$. La ecuación eikonal, que se puede resolver mediante el método de las características descrito en la Sección 12.6, describe la **refracción** en medios de variación lenta y es la base de la **óptica geométrica**.

Suponiendo entonces que se verifica la ecuación eikonal (14.9.53), la Ecuación (14.9.52) se convierte en

$$n^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \varepsilon \left(2\vec{k} \cdot \nabla_X \frac{\partial u}{\partial \theta} + \nabla \cdot \vec{k} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \nabla_X^2 u + n^2 u = 0. \quad (14.9.54)$$

Consideremos ahora un desarrollo asintótico regular, $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$, que sustituido en la ecuación anterior nos da:

$$O(\varepsilon^0) : \quad n^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + u_0 \right) = 0, \quad (14.9.55)$$

$$O(\varepsilon) : \quad n^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + u_1 \right) = -2\vec{k} \cdot \nabla_X \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \nabla \cdot \vec{k} \frac{\partial u_0}{\partial \theta}. \quad (14.9.56)$$

La solución de la Ecuación (14.9.55), correspondiente al término principal, es una onda plana de variación lenta

$$u_0 = A(X, Y, Z) e^{i\theta}, \quad (14.9.57)$$

donde necesitamos determinar la amplitud A , cosa que haremos eliminando los términos seculares en el siguiente término del desarrollo asintótico.

Sustituyendo (14.9.57) en (14.9.56), vemos que el primer término de la perturbación verifica

$$n^2 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + u_1 \right) = -(2\vec{k} \cdot \nabla_X A + \nabla \cdot \vec{k} A) i e^{i\theta}. \quad (14.9.58)$$

El término de la derecha es secular, pues su frecuencia coincide con la frecuencia natural de vibración. Por tanto, para que el desarrollo asintótico sea válido, necesitamos igualar a cero este término. Tenemos, así, que la amplitud debe verificar la llamada **ecuación de transporte**:

$$2\vec{k} \cdot \nabla_X A + \nabla \cdot \vec{k} A = 0. \quad (14.9.59)$$

Como $\vec{k} = \nabla \theta$, una expresión equivalente de esta ecuación de transporte es

$$2\nabla \theta \cdot \nabla_X A + \nabla^2 \theta A = 0. \quad (14.9.60)$$

Usando el método de las características, se puede obtener fórmulas elegantes para la amplitud (véase, por ejemplo, Bleistein [1984]). Estas ecuaciones constituyen la base de la teoría geométrica de Keller para la difracción de ondas planas a través de objetos romos, tales como cilindros, aeroplanos o submarinos.

En resumen, el término principal de nuestro desarrollo asintótico para la ecuación reducida de ondas ($\nabla^2 u + n^2 u = 0$), en medios de variación lenta, es

$$u_0 = Ae^{i\theta}, \quad (14.9.61)$$

donde θ satisface la ecuación eikonal (14.9.53), y la amplitud A satisface la ecuación de transporte (14.9.59), o lo que es lo mismo, (14.9.60). Por el mismo procedimiento se pueden obtener términos de mayor orden en el desarrollo.

14.9.5. Ondas dispersivas lineales de variación lenta (incluyendo efectos débilmente no lineales)

A modo de ejemplo sencillo de aplicación del método de escalas múltiples a ecuaciones en derivadas parciales, consideremos el siguiente modelo de ecuaciones dispersivas lineales (en variables adimensionales) con un término de perturbación no lineal débil:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \varepsilon \beta u^3. \quad (14.9.62)$$

La ecuación sin perturbar ($\varepsilon = 0$) es una ecuación lineal de ondas con una fuerza adicional de restauración $-u$. Las soluciones en forma de ondas planas de este problema sin perturbar, $u = e^{i(kx - \omega t)}$, verifican la relación de dispersión $\omega^2 = k^2 + 1$ y, por tanto, son ondas dispersivas. Si escribimos la fase $\theta = kx - \omega t$, se verifica que el número de onda es $k = \frac{\partial \theta}{\partial x}$, mientras que la frecuencia satisface $\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}$.

Busquemos ahora soluciones en forma de ondas planas de variación lenta en nuestra ecuación perturbada. Estas ondas de variación lenta pueden aparecer debido a ciertas condiciones iniciales de variación lenta o debido al término de perturbación no lineal. A partir de la fase desconocida, θ definimos el número de onda y la frecuencia de forma análoga al caso de ondas planas:

$$k = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (14.9.63)$$

$$\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (14.9.64)$$

Suponemos que el número de onda k puede no ser constante inicialmente, puede variar lentamente, sólo de manera apreciable a lo largo de varias longitudes de onda. Consideremos las escalas lentas, tanto espacial como temporal,

$$\boxed{X = \varepsilon x,} \quad (14.9.65)$$

$$\boxed{T = \varepsilon t,} \quad (14.9.66)$$

del mismo orden de magnitud que el término perturbativo en la ecuación. Para usar el **método de escalas múltiples**, aplicamos la regla de la cadena a la fase rápida θ , y las escalas lentas de tiempo y espacio X y T , obteniendo las derivadas primeras,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X},} \quad (14.9.67)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = -\omega \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T},} \quad (14.9.68)$$

así como las derivadas segundas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(k \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} \right) \left(k \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} \right), \\ &= k^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \varepsilon \left(2k \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial}{\partial \theta} + k_X \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} \end{aligned} \quad (14.9.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \left(-\omega \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} \right) \left(-\omega \frac{\partial}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} \right) \\ &= \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \varepsilon \left(-2\omega \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \theta} - \omega_T \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial T^2}. \end{aligned} \quad (14.9.70)$$

Sustituyendo estas expresiones en la Ecuación (14.9.62) tenemos

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u + \varepsilon \left(-2\omega \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \omega_T \frac{\partial u}{\partial \theta} - 2k \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \theta} - k_X \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right) = \varepsilon \beta u^3. \end{aligned} \quad (14.9.71)$$

Este método sólo funciona si la frecuencia de la onda de variación lenta satisface la relación de dispersión para las ondas planas elementales

$$\boxed{\omega^2 = k^2 + 1.} \quad (14.9.72)$$

Con estas ecuaciones se puede obtener el número de onda k y la frecuencia ω (así como la fase θ), usando el método de las características a partir de una condición inicial dada, tal y como vimos en la Sección 14.6, que resumimos aquí. En particular, la conservación de la cantidad de ondas se deduce de las definiciones (14.9.63) y (14.9.64) de k y ω :

$$k_T + \omega_X = 0. \tag{14.9.73}$$

Esta relación, junto con la relación de dispersión (14.9.72), nos da una ecuación en derivadas parciales cuasilineal,

$$k_T + \omega_k k_X = 0, \tag{14.9.74}$$

que nos dice que el número de onda se mantiene constante según se mueva con la velocidad de grupo (que en este problema verifica $\omega\omega_k = k$).

Usando de nuevo la relación de dispersión (14.9.72), la Ecuación (14.9.71) se simplifica un poco,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + u + \varepsilon \left(-2\omega \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \omega_T \frac{\partial u}{\partial \theta} - 2k \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial \theta} - k_X \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right) = \varepsilon \beta u^3. \end{aligned} \tag{14.9.75}$$

Escribimos ahora la solución mediante un desarrollo asintótico, $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$, que sustituido en nuestra Ecuación (14.9.75) e igualando como siempre los términos del mismo orden, nos da:

$$O(\varepsilon^0) : \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} + u_0 = 0, \tag{14.9.76}$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^1) : \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + u_1 = & \left(\omega_T + 2\omega \frac{\partial}{\partial T} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} \\ & + \left(k_X + 2k \frac{\partial}{\partial X} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \beta u_0^3. \end{aligned} \tag{14.9.77}$$

La solución de la ecuación principal (14.9.76) es una **onda plana de variación lenta**

$$u_0 = A(X, T)e^{i\theta} + (*),$$

(14.9.78)

donde el símbolo $(*)$ representa el conjugado complejo del otro término. En general, $A(X, T)$ es la amplitud compleja de la onda, que se determina eliminando los términos seculares en la ecuación correspondiente al siguiente orden en el desarrollo.

Consideremos entonces la Ecuación (14.9.77) correspondiente a $O(\varepsilon)$, cuyo miembro derecho contiene los efectos de la perturbación no lineal así como la hipótesis de variación lenta. Si $\beta \neq 0$, entonces la no linealidad genera los armónicos primero

y tercero, pues $u_0^3 = A^3 e^{3i\theta} + 3A^2 A^* e^{i\theta} + (*)$. Sustituyendo (14.9.78) en el miembro derecho de (14.9.77), se tiene

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + u_1 = i(\omega_T A + 2\omega \frac{\partial A}{\partial T})e^{i\theta} + i(k_X A + 2k \frac{\partial A}{\partial X})e^{i\theta} + \beta(A^3 e^{3i\theta} + 3A^2 A^* e^{i\theta}) + (*). \quad (14.9.79)$$

Los términos correspondientes al primer armónico $e^{i\theta}$ son seculares (resonantes con frecuencia igual a la frecuencia natural de la ecuación). Igualando estos términos a cero obtenemos una ecuación en derivadas parciales $A(X, T)$:

$$2\omega \frac{\partial A}{\partial T} + 2k \frac{\partial A}{\partial X} + (\omega_T + k_X)A - i\beta 3A^2 A^* = 0. \quad (14.9.80)$$

A partir de esta ecuación, vemos que la amplitud se mueve con la velocidad de grupo, pues la relación de dispersión $\omega^2 = k^2 + 1$ implica que la velocidad de grupo viene dada por $\omega_k = \frac{k}{\omega}$, aunque la amplitud no es constante.

Si multiplicamos (14.9.80) por A^* y le sumamos su conjugado complejo (y recordamos que $|A|^2 = AA^*$), obtenemos una ecuación que representa el concepto físico (no trivial) de **principio de conservación de la acción de la onda**:

$$\frac{\partial}{\partial T}(\omega |A|^2) + \frac{\partial}{\partial X}(k |A|^2) = 0. \quad (14.9.81)$$

Las leyes de conservación se pueden poner siempre en la forma $\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$ donde p es la magnitud conservada y q es el flujo. Las leyes de conservación en forma diferencial se obtienen, en general, a partir de cierta forma integral, como vimos brevemente en la Sección 1.2. En ocasiones, cuando el dominio es por ejemplo toda la recta, se puede probar alguna propiedad del tipo $\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx = 0$, que implicaría que para todo tiempo la cantidad $\int_{-\infty}^{\infty} \rho dx$ es constante e igual a la cantidad inicial. El enunciado general del **principio de conservación de la acción de la onda para ecuaciones dispersivas lineales, incluso cuando los coeficientes son de variación lenta**, es

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{E}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(c_g \frac{E}{\omega} \right) = 0. \quad (14.9.82)$$

La acción de la onda $\frac{E}{\omega}$ se conserva, donde E es la densidad media de energía y c_g es la velocidad usual de grupo. Se puede demostrar que en nuestro ejemplo se tiene $E = \omega^2 |A|^2$. Por tanto, el flujo de la acción verifica $c_g \frac{E}{\omega} = k |A|^2$, pues en esta situación $\omega_k = \frac{k}{\omega}$ (en el caso lineal $\beta = 0$, en el que A puede ser real,

este resultado se obtendría simplemente multiplicando (14.9.80) by A). La acción de la onda proporciona una generalización a las ecuaciones en derivadas parciales lineales de la idea de acción que aparece en las ecuaciones diferenciales lineales. Una posterior generalización a las ecuaciones dispersivas no lineales fue realizada por Whitham [1974].

En el ejemplo estudiado, la no linealidad afecta sólo a la fase, pues la fuerza no lineal es únicamente una fuerza de restauración. Si el término no lineal hubiese contenido una fuerza de amortiguamiento, habría resultado afectada también la amplitud (véanse los ejercicios). Para ver brevemente el efecto que causa la no linealidad sobre la fase, pongamos

$$A = re^{i\phi}, \quad (14.9.83)$$

donde ya hemos analizado la amplitud $r = |A|$. Sustituyendo (14.9.83) en (14.9.80), y mirando sólo la parte real, se obtiene una ecuación para la fase (de la amplitud compleja A)

$$2\omega \frac{\partial \phi}{\partial T} + 2k \frac{\partial \phi}{\partial X} = 3\beta r^2, \quad (14.9.84)$$

que muestra que la fase se mueve con la velocidad de grupo, pero varía dependiendo de $r^2 = |A|^2$. Como $\frac{\partial \phi}{\partial T}$ es una frecuencia y $\frac{\partial \phi}{\partial X}$ es un número de onda espacial, la Ecuación (14.9.84) representa la dependencia de las frecuencias espacial y temporal en la amplitud $r = |A|$, debida a la no linealidad. En el caso $\beta = 0$, la fase ϕ habría sido constante.

Típicamente las pequeñas perturbaciones de los fenómenos oscilatorios causan pequeñas modulaciones (variaciones lentas) de la amplitud (como en la Sección 14.9.1) y la fase (como en esta subsección).

EJERCICIOS 14.9

En *todos* los ejercicios, supóngase que $0 < \varepsilon \ll 1$. En los cuatro primeros utilizar el método de las escalas múltiples para obtener ecuaciones para la amplitud y la fase, en las ecuaciones propuestas.

14.9.1. $\frac{d^2 u}{dt^2} + u = -\varepsilon \frac{du}{dt}$ (compárese con aproximaciones de la solución exacta).

14.9.2. $\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2(\varepsilon t)u = -\varepsilon \frac{du}{dt}$.

14.9.3. $\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2(\varepsilon t)u = -\varepsilon \left(\frac{du}{dt}\right)^3$.

14.9.4. $\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \varepsilon(u^3 - \frac{du}{dt})$.

*14.9.5. Se puede probar que un péndulo de longitud variable L satisface una ecuación que, una vez linealizada, se reduce a

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{g}{L}u = -2\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \frac{du}{dt}.$$

Obsérvese que el miembro de la derecha es no nulo. Supóngase que L varía lentamente $L = L(\varepsilon t)$. Usar el método de escalas múltiples para obtener una solución válida cuando $\varepsilon t = O(1)$. *Indicación:* $\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} \frac{dL}{dT}$, donde $T = \varepsilon t$.

14.9.6. Considérese el sistema

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + 9x &= \varepsilon y^3, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + y &= \varepsilon x y^2. \end{aligned}$$

- (a) Estudiando las frecuencias, ¿por qué el tiempo lento debe ser $T = \varepsilon t$?
 (b) Obtener las ecuaciones de orden cero (pero sin resolverlas), válidas para $T = O(1)$, que describen el comportamiento para tiempos grandes.

14.9.7. Aproximar la solución de la ecuación de Airy $\frac{d^2 y}{dx^2} + xy = 0$ en la región de oscilación (supóngase que x grande se puede interpretar como un coeficiente de variación lenta), usando una aproximación de Liouville-Green.

En los tres ejercicios siguientes, y para las ecuaciones propuestas, usar el método de las escalas múltiples, y obtener una ecuación para la amplitud y la fase de variación lenta.

***14.9.8.** $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$.

14.9.9. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = \varepsilon \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^3$.

14.9.10. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u = 0$ Supóngase que c y β dependen de forma lenta de las variables X y T . Supóngase también que se verifica la relación de dispersión.

14.9.11. Como la ecuación reducida de ondas (14.9.49) es lineal, podemos poner simplemente $u = A(X, Y, Z)e^{i\theta}$, donde θ satisface la ecuación eikonal (14.9.53). Encontrar la ecuación exacta para A y la ecuación principal de la aproximación.

14.10. Perturbaciones singulares: capa límite

Existe una gran variedad de problemas físicos (véase, por ejemplo, Kevorkian y Cole [1996]) que se pueden describir por medio de ecuaciones en derivadas parciales en las que se obtienen distintas aproximaciones válidas en regiones diferentes (espaciales y/o temporales). A menudo, una de estas regiones es mucho más pequeña que las demás y suele estar cerca de la frontera, por lo que esta región *delgada* se denomina **capa límite**. En cada región se puede determinar un desarrollo perturbativo, pero estos desarrollos deben estar relacionados (conectados) entre sí, por lo que el método se llama **método de conexión de desarrollos asintóticos** (*matched*

asymptotic expansions, en inglés). Comenzaremos con un ejemplo sencillo de aplicación de este método a una ecuación diferencial ordinaria. Presentaremos después otro ejemplo en derivadas parciales que modeliza la convección de un contaminante en el que la difusión es significativa sólo cerca de la frontera.

14.10.1. Capa límite en una ecuación diferencial

Vamos, pues, a introducir el método de conexión de desarrollos asintóticos en un ejemplo sencillo. Consideremos el problema de contorno que consiste en la siguiente ecuación diferencial de *segundo orden*

$$\boxed{\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{du}{dx} + 2xu = 0,} \quad (14.10.1)$$

junto con las *dos* condiciones de contorno $u(0) = 3$ y $u(1) = 2$, y supongamos que ε es un parámetro pequeño, $0 < \varepsilon \ll 1$. A pesar de su apariencia elemental, este problema no puede resolverse de forma analítica, debido a que posee coeficientes variables. Por otro lado, los métodos numéricos son difíciles de aplicar si ε es pequeño (o imposibles si es excesivamente pequeño). Además, estos métodos numéricos no ofrecen ninguna información adicional sobre el fenómeno de capa límite que vamos a estudiar.

Problema reducido. Intuitivamente podemos pensar que si ε es muy pequeño (por ejemplo 10^{-8}), entonces, a efectos prácticos, se debería tener una aproximación muy buena considerando la *ecuación de primer orden reducida*:

$$\boxed{-\frac{du}{dx} + 2xu = 0.} \quad (14.10.2)$$

La solución general de esta ecuación reducida,

$$\boxed{u = ce^{x^2},} \quad (14.10.3)$$

(que se puede obtener utilizando variables separadas o por medio de un factor integrante) contiene una constante arbitraria, y sólo una, por lo que no podemos esperar que se verifiquen a la vez las dos condiciones de contorno prescritas (*véase* la Figura 14.10.1). Veremos que esta solución será una buena aproximación en casi todas partes, si determinamos la constante c a partir de la condición de contorno en uno de los extremos (aunque debemos elegir cuidadosamente cuál de los dos utilizar), pero no lo será en una zona pequeña cerca del otro extremo. Esta zona

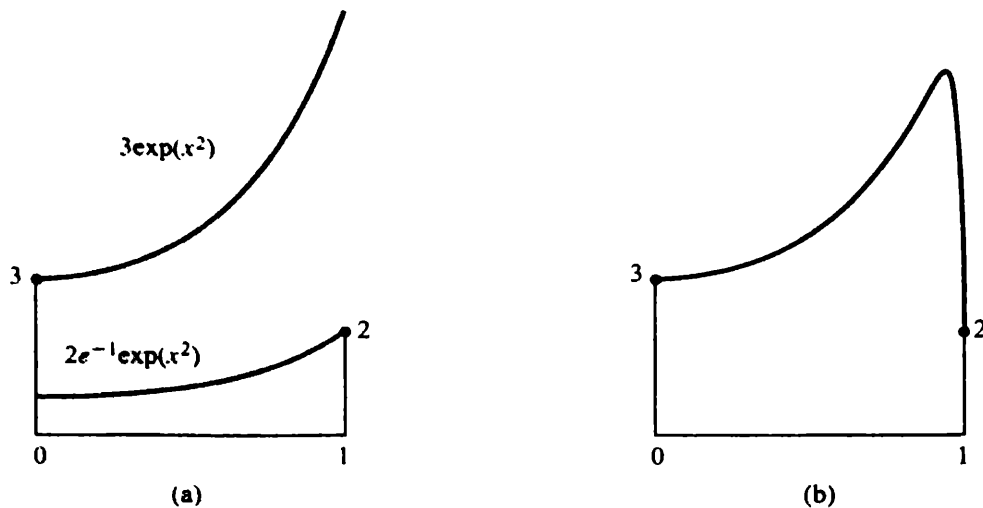


Figura 14.10.1: (a) La solución de la ecuación reducida sólo puede satisfacer una de las dos condiciones de contorno; (b) capa límite en $x = 1$.

estrecha, donde no es válida la aproximación mediante la solución (14.10.3), se denomina **capa límite**.

Localización y espesor de la capa límite. Parece, entonces, que eliminar el término $\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2}$ cuando ε es pequeño nos causa problemas, pues nuestra ecuación de segundo orden se reduce a una de primer orden. Quiere esto decir que el término $\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2}$ no puede ser despreciado en todas partes y en alguna región tendrá una gran influencia, incluso aunque ε sea pequeño. Como conclusión, deducimos que nuestra aproximación (14.10.2) puede fallar si el término $\frac{d^2 u}{dx^2}$ es grande. Existen varias posibilidades: que la segunda derivada $\frac{d^2 u}{dx^2}$ sea grande sólo cerca de la frontera izquierda $x = 0$, sólo cerca de la frontera derecha $x = 1$, cerca de ambas, alrededor de algún punto interior o que sea grande en todas partes. La idea principal en la que se basa el concepto de capa límite es que la segunda derivada será grande en una región pequeña. Las derivadas son grandes si la solución u varía una cantidad apreciable en una distancia corta $x - x_0$, cerca de algún punto desconocido x_0 . Esta distancia pequeña cerca de x_0 es lo que se denomina **espesor o anchura de la capa límite** y se supone que es del orden de $O(\varepsilon^p)$, para algún $p > 0$ de manera que la magnitud de este espesor es pequeña,

$$x - x_0 = \varepsilon^p X, \quad (14.10.4)$$

o lo que es lo mismo,

$$X = \frac{x - x_0}{\varepsilon^p}. \quad (14.10.5)$$

Esta fórmula introduce un cambio de escala en la variable independiente x , y la nueva variable X se denomina **variable de la capa límite**. Las derivadas son grandes, pues debido a la regla de la cadena se tiene $\frac{du}{dx} = \varepsilon^{-p} \frac{du}{dX}$, siempre que

supongamos que $\frac{du}{dX}$ es del orden de $O(1)$ cerca de la capa límite. Usando la nueva variable X , la ecuación diferencial (14.10.1) se convierte en

$$\varepsilon^{1-2p} \frac{d^2 u}{dX^2} - \varepsilon^{-p} \frac{du}{dX} + 2(x_0 + \varepsilon^p X)u = 0. \quad (14.10.6)$$

Como ε es pequeño, el término intermedio es grande, del orden de $O(\varepsilon^{-p})$, mucho mayor que el término $2(x_0 + \varepsilon^p X)u$. Para que la ecuación diferencial dé lugar a un equilibrio no trivial, los dos primeros términos deben ser del mismo orden de magnitud, lo que implica:

$$1 - 2p = -p. \quad (14.10.7)$$

Se tiene entonces, *en este ejemplo*, el valor

$$p = 1, \quad (14.10.8)$$

por lo que el espesor de la capa límite es del orden de $O(\varepsilon^1)$, es decir, $x - x_0 = \varepsilon X$.

No obstante, tenemos todavía que localizar dónde se encuentra la capa límite. En esta región se tiene que los dos primeros términos de la ecuación son ambos del orden de $O(\varepsilon^{-1})$, mayores que el término restante, por lo que en una primera aproximación se tiene que la ecuación correspondiente al orden principal de la capa límite es

$$\boxed{\frac{d^2 u}{dX^2} - \frac{du}{dX} = 0.} \quad (14.10.9)$$

La solución general de esta ecuación, que suponemos que será una aproximación válida en la capa límite, es

$$\boxed{u = A + Be^X = A + Be^{\frac{x-x_0}{\varepsilon}}.} \quad (14.10.10)$$

Un término crece exponencialmente con x , con tasa de crecimiento grande, del orden de $O(\frac{1}{\varepsilon})$ en la escala dada por la variable x . Si $x - x_0 > 0$ es mayor que $O(\varepsilon)$, el término exponencial será tan grande que no se podrá conectar con la solución reducida. Debemos evitar este tipo de crecimiento prácticamente no acotado de la solución cerca de la capa límite. Una manera de conseguirlo es hacer $B = 0$. En ese caso, se tendría que la solución es constante en la capa límite, algo que no coincide con el hecho de que las derivadas deben ser grandes. Por tanto, la solución debe contener el término $Be^{\frac{x-x_0}{\varepsilon}}$ en la capa límite. Por otro lado, el punto x_0 no puede ser un punto interior (ni el extremo izquierdo $x_0 = 0$) pues la solución crecería exponencialmente con una tasa grande si $x > x_0$. Debemos tener, por tanto, $x_0 = 1$, es decir, la capa límite ha de encontrarse en el extremo derecho, pues si $x_0 = 1$, entonces x no puede ser mayor que x_0 . Esto implica

$$x - 1 = \varepsilon X, \quad (14.10.11)$$

y el término principal de la aproximación (14.10.10) cerca de $x = 1$, es

$$u = A + Be^{\frac{x-1}{\varepsilon}}, \quad (14.10.12)$$

que decae exponencialmente cuando nos alejamos del extremo derecho. Tenemos, entonces, que el término $e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}$ es muy pequeño y la solución varía muy rápidamente en una región muy pequeña, que es lo que caracteriza a una capa límite. Ahora que sabemos que la capa límite se encuentra localizada en el extremos derecho, procedamos a calcular la aproximación analítica.

Desarrollo exterior. Comencemos determinando un desarrollo asintótico de la solución, lejos de la capa límite, en la forma

$$u(x, \varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \dots, \quad (14.10.13)$$

que denominamos **desarrollo exterior**, pues es válido lejos de la capa límite. Como ε es muy pequeño, necesitaremos generalmente sólo unos pocos términos de este desarrollo (en ocasiones incluso el término principal $u_0(x)$ basta). Sustituyendo el desarrollo (14.10.13) en la ecuación diferencial (14.10.1) tenemos

$$O(\varepsilon^0) : \frac{du_0}{dx} - 2xu_0 = 0, \quad (14.10.14)$$

$$O(\varepsilon^1) : \frac{du_1}{dx} - 2xu_1 = \frac{d^2u_0}{dx^2}. \quad (14.10.15)$$

Nos limitaremos a considerar la Ecuación (14.10.14) correspondiente al término principal, cuya solución es (igual que antes)

$$u_0(x) = ce^{x^2}. \quad (14.10.16)$$

Como ya sabemos que existe una capa límite en $x = 1$, pedimos a esta función que satisfaga la condición de contorno en $x = 0$,

$$u_0(0) = c = 3. \quad (14.10.17)$$

Obtenemos así la solución

$$u_0(x) = 3e^{x^2}, \quad (14.10.18)$$

que verifica la condición de contorno en $x = 0$, pero no en $x = 1$.

Desarrollo interior (capa límite). En la capa límite cerca de $x = 1$, consideramos una variable interior $x = 1 + \varepsilon X$ (14.10.11). La ecuación interior exacta se obtiene multiplicando (14.10.6) por ε

$$\frac{d^2u}{dX^2} - \frac{du}{dX} + 2\varepsilon(1 + \varepsilon X)u = 0. \quad (14.10.19)$$

Introducimos entonces un desarrollo asintótico correspondiente a la capa límite, llamado **desarrollo interior** o **desarrollo de la capa límite**:

$$u = U_0(X) + \varepsilon U_1(X) + \dots \quad (14.10.20)$$

La sustitución de (14.10.20) en (14.10.19) da:

$$\frac{d^2U_0}{dX^2} - \frac{dU_0}{dX} = 0, \quad (14.10.21)$$

$$\frac{d^2U_1}{dX^2} - \frac{dU_1}{dX} = -2U_0. \quad (14.10.22)$$

Como ya obtuvimos antes, el término principal del desarrollo, que se obtiene resolviendo (14.10.21), es

$$U_0(X) = A + Be^X = A + Be^{\frac{x-1}{\epsilon}}, \quad (14.10.23)$$

expresado en términos tanto de la variable X como de la variable x . Imponiendo ahora la condición de contorno en $x = 1$ [es decir, $u(x = 1) = 2$, o lo que es lo mismo $U_0(X = 0) = 2$], obtenemos

$$2 = A + B. \quad (14.10.24)$$

En este ejemplo la ecuación correspondiente a la capa límite es una ecuación de segundo orden, por lo que la solución contiene dos constantes arbitrarias. Una condición para determinar estas constantes es la condición de contorno que acabamos de usar, mientras que una segunda condición vendrá dada imponiendo que las dos soluciones obtenidas, la exterior y la interior, deben unirse de forma continua, lo que se llama *conexión*.

Conexión. Tenemos entonces un desarrollo exterior, o solución exterior, válido lejos de la capa límite

$$u = 3e^{x^2} + \epsilon u_1(x) + \dots, \quad (14.10.25)$$

y un desarrollo interior, o solución interior, válido en la capa límite

$$u = A + Be^X + \epsilon U_1(X) + \dots, \quad (14.10.26)$$

en el que las constantes verifican, usando la condición de contorno, que $2 = A + B$. Estas dos expresiones son desarrollos de la misma solución de la ecuación diferencial. Vamos a suponer que existe una región de solapamiento entre ambas regiones donde los dos desarrollos son válidos de forma simultánea. Igualamos entonces las soluciones interior y exterior utilizando lo que se llama **método de conexión de desarrollos asintóticos**. La región de solapamiento está próxima a la capa límite desde el punto de vista de la solución exterior, así como lejos de ella desde el punto de vista de la solución interior. En los casos sencillos, como el que nos ocupa, el **principio de conexión** establece que

el límite interior de la solución exterior
= el límite exterior de la solución interior.

(14.10.27)

Desde el punto de vista de la solución exterior, el límite interior es el límite cuando $x \rightarrow 1$, mientras que el límite exterior observado desde la solución interior implica $X \rightarrow -\infty$. Tenemos, por tanto, en nuestro ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 1} u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \dots = \lim_{X \rightarrow -\infty} U_0(X) + \varepsilon U_1(X) + \dots \quad (14.10.28)$$

Usando sólo los términos principales de ambas soluciones, esta igualdad se traduce en

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3e^{x^2} = \lim_{X \rightarrow -\infty} A + Be^X. \quad (14.10.29)$$

Por tanto, $3e = A$, que aplicado a la condición obtenida antes, $A + B = 2$, implica $B = 2 - 3e$. Finalmente,

término principal de la solución exterior (lejos de $x = 1$): $u = 3e^{x^2}$
 término principal de la solución interior (cerca de $x = 1$): $u = 3e + (2 - 3e)e^X$,

lo que se representa en la Figura 14.10.1.

A menudo, estos límites interior y exterior no existen, y debemos reemplazarlos por los correspondientes desarrollos asintóticos:

el desarrollo asintótico interior de la solución exterior
 = el desarrollo asintótico exterior de la solución interior. (14.10.30)

Observemos que existen dos límites completamente diferentes que deben dar el mismo resultado. Si $x - 1 = \varepsilon X$, los dos límites siguientes deben coincidir:

1. fijada x , hacer $\varepsilon \rightarrow 0$ (que implica $X \rightarrow -\infty$, es decir, la aproximación exterior de la solución interior),

2. fijada X , hacer $\varepsilon \rightarrow 0$ (que implica $x \rightarrow 1$, es decir, la aproximación interior de la solución exterior).

En la práctica, sólo es necesario calcular unos pocos términos de cada desarrollo. Recordemos que si ε es muy pequeño, los términos de mayor orden son en general despreciables.

En otros problemas puede ser necesario modificar el procedimiento por el cual se conectan las soluciones interior y exterior, teniendo en cuenta términos de orden superior que deben también coincidir. Aunque este proceso es de gran importancia, no puede ser incluido aquí por razones de espacio. Los desarrollos asintóticos de las soluciones interior y exterior son, en general, factibles de calcular, pero con un mayor esfuerzo que el empleado para este ejemplo sencillo. Los problemas no lineales suelen ser mucho más difíciles e interesantes.

14.10.2. Difusión de un contaminante dominada por la convección

Vamos a analizar ahora otro ejemplo sencillo, pero en derivadas parciales, de un problema de perturbaciones singulares en el que seguiremos el método de capa límite

descrito antes, mediante la conexión de desarrollos asintóticos. Consideremos un contaminante cuya concentración química $u(x, y, t)$ es desconocida. En ausencia de convección (movimiento del fluido), la concentración verifica la ecuación de difusión $\frac{\partial u}{\partial t} = k(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$. Si el fluido se mueve con una velocidad dada \vec{v} (que en dinámica de fluidos suele verificar la condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \vec{v} = 0$), entonces la derivada temporal debe ser reemplazada por la **derivada convectiva** (derivada temporal siguiendo el movimiento del fluido, también llamada derivada material o total) $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u$, con lo que se obtiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (14.10.31)$$

Consideremos la situación idealizada en la que la contaminación está producida por una serie de columnas de humo de un parque industrial, cada una produciendo un nivel distinto de contaminación, pero sin cambiar ninguna con el tiempo. Tenemos, por tanto, que el nivel de contaminación es conocido en la frontera de cierta región y queremos determinar el estado estacionario de la contaminación en el interior de esa región, que verifica

$$\vec{v} \cdot \nabla u = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (14.10.32)$$

Suponemos primero que la velocidad convectiva de la atmósfera es constante, y que sigue una dirección más o menos general, $\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j}$. En ese caso, la ecuación estacionaria del proceso de difusión se convierte en

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (14.10.33)$$

donde (por conveniencia para aplicar los métodos de perturbaciones singulares) hemos introducido un coeficiente de difusión pequeño ε . El problema que obtenemos así no es en absoluto un problema fácil de resolver matemáticamente, en especial si el dominio considerado no es un rectángulo.

Desarrollo exterior. Si ε es un parámetro muy pequeño, se obtiene una buena aproximación considerando la ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$a \frac{\partial u_0}{\partial x} + b \frac{\partial u_0}{\partial y} = 0. \quad (14.10.34)$$

Esta aproximación se puede justificar mediante la introducción del desarrollo asintótico regular

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots \quad (14.10.35)$$

en (14.10.33), cuyo término principal satisface (14.10.34). Vemos, entonces, que en primera aproximación el nivel de contaminación u_0 se mantiene constante según se mueva con la velocidad del fluido ($\frac{du_0}{dt} = 0$, si $\frac{dx}{dt} = a$ y $\frac{dy}{dt} = b$). La Ecuación (14.10.34) se puede resolver mediante el uso del método de las características. Si

$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$, entonces $\frac{du_0}{dx} = 0$, o lo que es lo mismo, $u_0 = \text{constante}$. Las características de la ecuación reducida (14.10.34) son $ay - bx = \text{constante}$. Por tanto, la solución verifica

$$u_0 = f(ay - bx), \quad (14.10.36)$$

donde se debe determinar la función arbitraria f a partir de una condición de contorno. Sin embargo, la ecuación de difusión viene acompañada de dos condiciones de contorno (determinadas por la manera en que las características dividen la frontera del dominio considerado, como quedará claro en el ejemplo particular que consideraremos enseguida). Veremos también que la capa límite está localizada en una zona específica de la frontera. Decimos que (14.10.35) es el **desarrollo exterior** y (14.10.36) es la parte principal de la **solución exterior**, ya que es válido lejos de la capa límite.

Ejemplo sencillo. Para el resto de los cálculos supondremos que la velocidad del fluido es el vector unitario en la dirección positiva del eje horizontal, es decir $\vec{v} = (0, 1)$, de manera que la ecuación en derivadas parciales para el estado estacionario del proceso de difusión considerado (14.10.33) se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (14.10.37)$$

La ecuación correspondiente al término principal de la solución exterior es $\frac{\partial u_0}{\partial y} = 0$, que tiene como solución cualquier función arbitraria de x ,

$$u_0 = f(x). \quad (14.10.38)$$

Supongamos que las características de la ecuación reducida, $x = \text{constante}$, dividen la frontera del dominio en dos partes, que llamaremos la parte superior, $y = y_T(x)$, e inferior, $y = y_B(x)$ (véase la Figura 14.10.2). La condición de contorno para la ecuación de difusión es el nivel de contaminación especificado en toda la frontera. Consideremos las dos funciones que dan los niveles de contaminación en estas dos partes de la frontera:

$$u = u_T(x), \quad \text{en la parte superior } y = y_T(x), \quad (14.10.39)$$

$$u = u_B(x), \quad \text{en la parte inferior } y = y_B(x). \quad (14.10.40)$$

Sólo podemos hacer que la función arbitraria $f(x)$ satisfaga una de las condiciones frontera. Siguiendo la intuición física, como la atmósfera se mueve en la dirección vertical hacia arriba, el viento llevará la contaminación también hacia arriba. Esperamos pues que la solución del problema reducido verifique la condición de contorno en la parte inferior.

$$u_0 = f(x) = u_B(x). \quad (14.10.41)$$

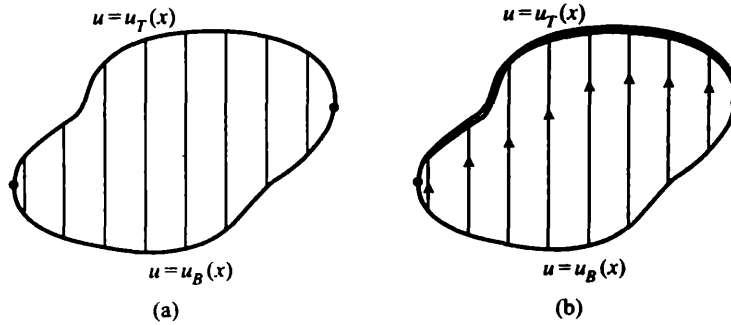


Figura 14.10.2: (a) Características; (b) la convección domina (la capa límite se encuentra en la parte superior).

Como esta solución no verifica la condición de contorno en la parte superior, esperamos que exista una zona delgada cerca de la parte superior donde las derivadas sean grandes y no puedan ser suprimidas de la ecuación en una aproximación allí. Veremos ahora que la capa límite se localiza efectivamente en la parte superior y determinaremos su espesor.

Capa límite (desarrollo interior). Queremos determinar un procedimiento que permita localizar dónde está permitido que exista una capa (así como calcular su espesor). Primero analizaremos la posibilidad de que la capa límite esté en la parte superior, como suponemos. El método que utilizaremos permitirá probar que ésta no puede estar en la parte inferior. Introducimos un conjunto de variables espaciales escaladas (ξ, η) con espesor desconocido $O(\epsilon^p)$, $p > 0$:

$$\begin{aligned} \xi &= x, \\ \eta &= \frac{y - y_T(x)}{\epsilon^p}. \end{aligned} \tag{14.10.42}$$

Como la frontera no es necesariamente recta, las derivadas en x e y no son pequeñas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y'_T(x)}{\epsilon^p} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\epsilon^p} \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

También necesitamos las derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{y'_T(x)}{\epsilon^p} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{y'_T(x)}{\epsilon^p} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{[y'_T(x)]^2}{\epsilon^{2p}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots \tag{14.10.43}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\epsilon^{2p}} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \tag{14.10.44}$$

Podemos evitarnos los cálculos de las derivadas sucesivas, pues en la capa límite no serán necesarias. Sustituyendo estas expresiones en nuestro ejemplo (14.10.37), obtenemos la ecuación del término principal $u = U_0(\xi, \eta) + \dots$ del desarrollo en la capa límite,

$$\frac{1}{\varepsilon^p} \frac{\partial U_0}{\partial \eta} = \varepsilon^{1-2p} k_T(\xi) \frac{\partial^2 U_0}{\partial \eta^2}, \quad (14.10.45)$$

donde el coeficiente principal es positivo

$$k_T(\xi) = 1 + [y_T'(x)]^2. \quad (14.10.46)$$

Igualando los órdenes de magnitud de los términos más grandes en la Ecuación (14.10.45), obtenemos que

$$p = 1, \quad (14.10.47)$$

lo que implica que el **espesor de la capa límite** es $O(\varepsilon^1)$. Como las derivadas son mayores en una dirección determinada, la ecuación en derivadas parciales se reduce a una ecuación diferencial ordinaria:

$$\boxed{\frac{\partial U_0}{\partial \eta} = k_T(\xi) \frac{\partial^2 U_0}{\partial \eta^2}.} \quad (14.10.48)$$

La solución general de esta ecuación es

$$U_0(\xi, \eta) = A(\xi) + B(\xi) e^{\frac{\eta}{k_T(\xi)}}, \quad (14.10.49)$$

donde $A(\xi)$ y $B(\xi)$ son funciones arbitrarias de ξ , pues para calcular la derivada parcial $\frac{\partial}{\partial \eta}$ se considera ξ fijo.

Es posible ahora determinar cuándo puede existir una capa límite en la parte superior o inferior. El método de conexión de desarrollos asintóticos establece que la solución en la capa límite (o interior) debe conectar de forma continua con la solución lejos de ésta (o exterior). Como la variable espacial nueva es

$$\eta = \frac{y - y_T(x)}{\varepsilon}, \quad (14.10.50)$$

la capa límite se aproxima mediante los límites

$$\begin{aligned} \eta &\rightarrow -\infty, & \text{si la capa límite está en la parte superior} \\ \eta &\rightarrow +\infty, & \text{si la capa límite está en la parte inferior.} \end{aligned}$$

El crecimiento exponencial dado por (14.10.49) no está permitido en la capa límite si la solución se hace excesivamente grande. Por otro lado, el decaimiento exponencial es típico de estos ejemplos. Como $k_T(\xi) > 0$, así como $k_B(\xi) > 0$, debemos evitar en este ejemplo el caso $\eta \rightarrow +\infty$, que implica que la capa límite se encuentra en la parte superior. Recordemos que ésta es la conclusión a la que habíamos llegado

usando la intuición física de que la contaminación se desplaza hacia el interior de la región mediante la velocidad atmosférica hacia arriba.

De esta manera, hemos obtenido el término principal de la solución en la capa límite, localizada en la parte superior:

$$U_0(\xi, \eta) = A(\xi) + B(\xi)e^{\frac{\eta}{k_T(\xi)}}. \quad (14.10.51)$$

Debemos imponer ahora la condición de contorno en esta parte superior, que es $u = u_T(x)$, para $y = y_T(x)$. Como $y = y_T(x)$ se traduce en $\eta = 0$, tenemos

$$A(\xi) + B(\xi) = u_T(\xi), \quad (14.10.52)$$

que es una primera condición para determinar las funciones arbitrarias $A(\xi)$ y $B(\xi)$. La otra condición necesaria se obtendrá mediante la conexión de los dos desarrollos asintóticos.

Conexión de los desarrollos interior y exterior. En resumen, el término principal de la solución exterior, válido lejos de una delgada capa límite localizada en la parte superior de la frontera del dominio, es

$$u_0 = u_B(x). \quad (14.10.53)$$

Igualmente, el término principal de la solución interior, válido cerca de la capa límite, es

$$U_0 = A(x) + B(x)e^{\frac{\eta}{k_T(x)}}, \quad (14.10.54)$$

donde la variable de la capa límite es $\eta = \frac{y - y_T(x)}{\epsilon}$, y donde se debe tener $A(x) + B(x) = u_T(x)$ para que se satisfaga la condición de contorno en la parte superior.

Estos dos desarrollos asintóticos suponen buenas aproximaciones de la solución de nuestra ecuación original, pero cada una en una región diferente. Como existe una zona de solapamiento donde ambas aproximaciones deben ser válidas, el **principio de conexión** establece que

el límite interior de la solución exterior = el límite exterior de la solución interior.

En nuestro ejemplo, el límite interior se obtiene cuando $y \rightarrow y_T(x)$, mientras que el límite exterior cuando $\eta \rightarrow -\infty$. Por tanto, igualando ambos, se tiene

$$\lim_{y \rightarrow y_T(x)} u_B(x) = \lim_{\eta \rightarrow -\infty} A(x) + B(x)e^{\frac{\eta}{k_T(x)}}, \quad (14.10.55)$$

o lo que es lo mismo,

$$u_B(x) = A(x). \quad (14.10.56)$$

Como $A(x) + B(x) = u_T(x)$, tenemos $B(x) = u_T(x) - u_B(x)$. El término principal de la solución en la capa límite es

$$U_0 = u_B(x) + [u_T(x) - u_B(x)]e^{\frac{y-y_T(x)}{\varepsilon k_T(x)}}. \quad (14.10.57)$$

La concentración del contaminante se desplaza desde la parte inferior hacia el interior, según refleja el término principal de la solución exterior (14.10.53). Por otro lado, el término principal de la solución interior (14.10.57) muestra que existe una capa límite, una zona delgada cerca de la parte superior de la frontera (que se ilustra en la Figura 14.10.2), en la que la difusión domina y el nivel de contaminación cambia bruscamente desde el nivel en el interior hasta el nivel prescrito en la frontera.

EJERCICIOS 14.10

En todos los ejercicios de esta sección se supone $0 < \varepsilon \ll 1$. En los Ejercicios 14.10.1 - 14.10.5 encontrar el término principal de los desarrollos interior y exterior correspondientes a los problemas planteados, y conectar ambos desarrollos.

- 14.10.1. $\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} - 2 \frac{du}{dx} + 3u = 0$, con $u(0) = 1$ y $u(1) = 2$.
- 14.10.2. $\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} - 3u = 0$, con $u(0) = 1$ y $u(1) = 2$.
- *14.10.3. $\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} - 4u = x$, con $u(0) = 1$ y $u(1) = 2$.
- 14.10.4. $\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + \varepsilon \frac{du}{dx} - 9u = 0$, con $u(0) = 1$ y $u(1) = 2$.
- 14.10.5. $\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + 2e^{-x}u = 8$, con $u(0) = 1$ y $u(1) = 2$.
- *14.10.6. $\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + (2x + 1) \frac{du}{dx} + 2u = 0$, con $u(0) = 1$ y $u(1) = 2$.
- 14.10.7. Encontrar una solución exacta del Ejercicio 14.10.1 (y dibujarla).
- 14.10.8. Encontrar una solución exacta del Ejercicio 14.10.2 (y dibujarla).
- 14.10.9. En ocasiones puede existir una capa límite dentro de otra. Considérese, para $0 < x < 1$ y $0 < \varepsilon \ll 1$, el problema

$$\varepsilon^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 \frac{dy}{dx} - \varepsilon y = 0, \quad \text{con } y(0) = 1 \text{ e } y(1) = 2.$$

Supóngase (sin verificarlo) que no hay capa límite en $x = 1$. Resolver este problema obteniendo dos términos en el desarrollo exterior. Comprobar que existen dos escalas diferentes cerca de $x = 0$, una más delgada que la otra. Determinar sólo un término de cada uno de estos nuevos desarrollos. Conectar la solución exterior con la solución interior más ancha, así como las dos soluciones interiores.

- 14.10.10. Considérese la ecuación $\varepsilon(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 4\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$, con u especificada en la frontera del cuadrado $0 < x < 1, 0 < y < 1$. Usando algún razonamiento físico, explicar dónde puede estar localizada la capa límite.
- 14.10.11. Considérese el problema determinado por la ecuación $\varepsilon(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = u - f(x, y)$, con las condiciones de contorno en la frontera del cuadrado unidad $u(x, 0) = g(x), u(x, 1) = h(x), u(0, y) = r(y)$, y $u(1, y) = s(y)$. Determinar el término principal de la solución exterior. Para simplificar los cálculos, determinar sólo el término principal de la solución interior en una capa límite (pues en las otras es similar). Conectar estas soluciones.

Bibliografía

- [1] Ablowitz, M.J. y Clarkson, P.A. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [2] Ablowitz, M.J. y Segur, H. *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. Philadelphia: SIAM, 1981.
- [3] Abramowitz, M. y Stegun, I.A. eds. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1965.
- [4] Acheson, D.J. *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford: Oxford University Press, 1990.
- [5] Aki, K. y Richards, P.G. *Quantitative Seismology*. San Francisco: Freeman, 1980.
- [6] Ames, W.F. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 3rd ed. Academic Press: New York, 1992.
- [7] Antman, S.S. The equations for large vibrations of strings. *Amer. Math. Monthly* **87**, 1980, pp. 359-370.
- [8] Bender, C.M. y Orszag, S.A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. New York: McGraw-Hill, 1978.
- [9] Benney, D.J. y Newell, A.C. The propagation of nonlinear wave envelopes, *J. Math. Phys. (Stud. Appl. Math.)* **46**, 1967, pp. 133-139.
- [10] Berg, P.W. y McGregor, J.L. *Elementary Partial Differential Equations*. San Francisco: Holden-Day, 1966.
- [11] Bleistein, N. *Mathematical Methods for Wave Phenomena*. Orlando: Academic Press, 1984.
- [12] Bleistein, N. y Handelsman, R.A. *Asymptotic Expansions of Integrals*, New York: Dover, 1986.
- [13] Boyce, W.E. y Di Prima, R.C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 6th ed. New York: Wiley, 1997.

- [14] Campbell, S.L. y Haberman, R. *Introduction to Differential Equations with Boundary Value Problems*. Boston: Houghton Mifflin, 1996.
- [15] Carrier, G. y Pearson, C. *Partial Differential Equations*. 2nd ed. New York: Academic Press, 1988.
- [16] Carslaw, H.S. y Jaeger, J.C. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 1959.
- [17] Churchill, R.V. *Operational Mathematics*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [18] Churchill, R.V. y Brown, J.W. *Fourier Series and Boundary Value Problems*. 4th ed. New York: McGraw-Hill, 1987.
- [19] Courant, R. y Hilbert, D. *Methods of Mathematical Physics*, Vols. 1 y 2. New York: Wiley, 1953.
- [20] *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae*, 30th ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996.
- [21] Dennemeyer, R. *Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [22] Drazin, P.G. y Reid, W.H. *Hydrodynamic Stability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [23] Duff, G.F.D. y Naylor, D. *Differential Equations of Applied Mathematics*. New York: Wiley, 1966.
- [24] Garabedian, P. *Partial Differential Equations*. New York: Wiley, 1964.
- [25] Gardner, C.S. Greene, J.M., Kruskal, M.D. y Miura, R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1967, pp. 1095-1097.
- [26] Gel'fand, I.M. y Levitan, B.M. On the determination of a differential equation from its spectral function, *Amer. Math. Soc. Transl.* **1**, Ser. 2, 1955, pp. 253-304.
- [27] Glendenning, P. *Stability, Instability, and Chaos*, Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [28] Greenberg, M.D. *Foundations of Applied Mathematics*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1978.
- [29] Guckenheimer, J. y Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [30] Haberman, R. *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1977.

- [31] Hildebrand, F.B. *Advanced Calculus for Applications*. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.
- [32] Isaacson, E. y Keller, H.B. *Analysis of Numerical Methods*. New York: Wiley, 1966.
- [33] Jackson, J.D. *Classical Electrodynamics*. 2nd ed. New York: Wiley, 1975.
- [34] Kaplan, W. *Advanced Mathematics for Engineers*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1981.
- [35] Keener, J.P. *Principles of Applied Mathematics*. Reading, MA: Addison Wesley, 1988.
- [36] Kevorkian, J. *Partial Differential Equations*, Pacific Grove. CA: Wadsworth, 1990.
- [37] Kevorkian, J. y Cole, J.D. *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods*. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [38] Kinsman, B. *Wind Waves*. New York: Dover, 1984.
- [39] Lax, P.D. Integrals on nonlinear equations and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* **21**, 1968, pp. 467-490.
- [40] Lighthill, J. *Waves in Fluids*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
- [41] Mathews, J. y Walker, R.L. *Mathematical Methods of Physics*. New York: W.A. Benjamin, 1970.
- [42] Mikhlin, S.G. ed. *Linear Equations of Mathematical Physics*. New York: Holt, Rinehart y Winston, 1967.
- [43] Morse, P.M. y Feshbach, H. *Methods of Theoretical Physics*. Partes 1 y 2. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [44] Morton, K.W. y Mayers, D.F. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [45] Nayfeh, A.H. *Perturbation Methods*. New York: Wiley, 1973.
- [46] Newell, A.C. y Moloney, J.V. *Nonlinear Optics*. Redwood City, CA: Addison Wesley, 1992.
- [47] Powers, D.L. *Boundary Value Problems*. 3rd ed. San Diego: Harcourt Brace Jovanovich, 1987.
- [48] Protter, M.H. y Weinberger, H.F. *Maximum Principles in Differential Equations*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1967.

- [49] Roberts, G.E. y Kaufman, H. *Tables of Laplace Transforms*. New York: W. B. Saunders Co., 1966.
- [50] Sagan, H. *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics*. New York: Dover, 1989.
- [51] Smith, G.D. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. 3rd ed. New York: Oxford University Press, 1986.
- [52] Stakgold, I. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. New York: Wiley, 1980.
- [53] Strauss, W.A. *Partial Differential Equations*. New York: Wiley, 1992.
- [54] Strang, G. *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 1986.
- [55] Strang, G. *Introduction to Linear Algebra*. Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 1993.
- [56] Street, R.L. *The Analysis and Solution of Partial Differential Equations*. Monterey, CA: Brooks/Cole, 1973.
- [57] Strogatz, S.H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Reading, MA: Addison Wesley, 1994.
- [58] Verhulst, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [59] Watson, G.N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1966.
- [60] Weinberger, H.F. *A First Course in Partial Differential Equations*. Lexington, MA: Xerox, 1965.
- [61] Whitham, G.B. *Linear and Nonlinear Waves*. New York: Wiley, 1974.
- [62] Young, E.C. *Partial Differential Equations*. Boston: Allyn y Bacon, 1972.
- [63] Yuen, H.C. y Ferguson, W.E., Relationship between Benjamin-Feir instability and recurrence in the nonlinear Schrodinger equation, *Phys. Fluids* **21**, 1978, pp. 1275-1278.
- [64] Yuen, H.C. y Lake, B.M. Instabilities of waves on deep water. *Phys. Fluids* **18**, 1975, pp. 956-960.
- [65] Zabusky, N.J. y Kruskal, M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 1965, pp. 240-243.

- [66] Zachmanoglou, E.C. y Thoe, D.W. *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*. New York: Dover, 1986.
- [67] Zauderer, E. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. 2nd ed. New York: Wiley, 1989.
- [68] Zwillinger, D., *Handbook of Differential Equations*. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1992.

Soluciones a los ejercicios seleccionados

1.2.3. $\int_0^L c\rho u A dx.$

1.2.4. (e) $u(t) = u_0 \exp\left[-\left(\frac{2h}{c\rho r}\right)t\right].$

1.3.2. $K_0(x_{0-})\frac{\partial u}{\partial x}(x_{0-}, t) = K_0(x_{0+})\frac{\partial u}{\partial x}(x_{0+}, t).$

1.3.3. $Vc_f\rho_f\frac{\partial u}{\partial t}(L, t) = -K_0(L)\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)A,$ donde V es el volumen del depósito.

1.4.1. (a) $u(x) = \frac{Tx}{L}.$

(d) $u = T + \alpha x.$

(f) $u(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{L^3x}{3} + T.$

(h) $u = T + \alpha(x + 1).$

1.4.2. (a) $\frac{K_0L^2}{2}.$

1.4.7. (a) $\beta = 1 - L.$

1.5.2. $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla u = k\nabla^2 u - u\nabla\cdot\mathbf{v}$ (a menudo, la condición física es $\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$).

1.5.9. (a) $u = \frac{T_1 \ln r_2/r + T_2 \ln r/r_1}{\ln r_2/r_1}.$

1.5.11. $\beta = \frac{b}{a}.$

1.5.13. $u(r) = \frac{320}{3}\left(1 - \frac{1}{r}\right).$

2.3.1. (a) $\frac{dh}{dt} = -\lambda kh$ y $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\phi}{dr}\right) = -\lambda\phi.$

2.3.1. (c) $\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi$ y $\frac{d^2h}{dy^2} = \lambda h.$

2.3.1. (e) $\frac{1}{kh}\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\phi}\frac{d^4\phi}{dx^4} = \lambda.$

2.3.1. (f) $\frac{1}{c^2 h} \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\lambda.$

2.3.2. (b) $\lambda = (n\pi/L)^2$ con $L = 1$, de manera que $\lambda = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \dots$

2.3.2. (d) $\lambda = \left[\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{L} \right]^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

2.3.2. (f) $\lambda = \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$

2.3.3. (c) $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t},$

$$\text{donde } A_n = \frac{2}{L} \int_0^L 2 \cos \frac{3\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

2.3.4. (a) $c\rho A \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-k(\frac{n\pi}{L})^2 t} \left(\frac{1 - \cos \frac{n\pi}{L}}{\frac{n\pi}{L}} \right).$

2.3.4. (c) La energía calorífica es igual a la energía inicial más la integral en el tiempo del flujo de calor que entra por la frontera.

2.3.6. 0 ($n \neq m$), $\frac{L}{2}$ ($n = m \neq 0$), L ($n = m = 0$).

2.3.8. (a) $u = 0.$

2.3.8. (b) $u = e^{-\alpha t} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$

2.3.9. (a) Si $\sqrt{\frac{-\alpha}{k}} L = n\pi$, entonces $u(x) = A \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$

2.3.9. (b) Si $-\frac{\alpha}{k} = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$, entonces $u(x, t) \rightarrow B \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$, cuando $t \rightarrow \infty$. Si $-\frac{\alpha}{k} < \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$, entonces $u \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Sin embargo, si $-\frac{\alpha}{k} > \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$, entonces $u \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$.

2.3.10. (c) $\left[\int_0^L A(x)B(x) dx \right]^2 \leq \left(\int_0^L A^2 dx \right) \left(\int_0^L B^2 dx \right).$

2.4.1. $u = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{L} e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$

(a) $A_0 = \frac{1}{2}$, $A_n = -\frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$ ($n \neq 0$).

(b) $A_0 = 6$, $A_3 = 4$, y el resto de coeficientes = 0.

(c) $A_0 = -\frac{4}{\pi}$, $A_n = -\frac{4}{L} \int_0^L \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx$, que puede evaluarse fácilmente usando fórmulas trigonométricas.

2.4.2. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{(n-1/2)\pi x}{L} e^{-[(n-1/2)\pi/L]^2 kt},$

$$\text{donde } c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{(n-1/2)\pi x}{L} dx.$$

2.4.3. $\lambda = n^2$, $\phi = \text{sen } nx$ y $\cos nx$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

2.5.1. (a) $u(x, y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} \text{senh } \frac{n\pi y}{L}$.

2.5.1. (c) $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh \frac{n\pi x}{H} \text{sen } \frac{n\pi y}{H}$,

$$\text{donde } A_n \cosh \frac{n\pi L}{H} = \frac{2}{H} \int_0^H g(y) \text{sen } \frac{n\pi y}{H} dy.$$

2.5.1. (e) $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n h_n(y) \text{sen } \frac{n\pi x}{L}$,

$$\text{donde } A_n h_n(H) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$\text{y } h_n(y) = \cosh \frac{n\pi y}{L} + \frac{L}{n\pi} \text{senh } \frac{n\pi y}{L}.$$

2.5.2. (a) $\int_0^L f(x) dx = 0$.

2.5.3. $u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{-n} \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-n} \text{sen } n\theta$.

(a) $A_0 = \ln 2$, $A_3 a^{-3} = 4$, y el resto de coeficientes $A_n = 0$, $B_n = 0$.

(b) Véase (2.5.47) con a^n sustituido por a^{-n} .

2.5.4. $u(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{\theta}) d\bar{\theta}}{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \bar{\theta})}$.

2.5.5. (a) $u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta$.

2.5.5. (c) $u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{2n} \text{sen } 2n\theta$, $A_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \text{sen } 2n\theta d\theta$.

2.5.6. (a) $u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \text{sen } n\theta$.

2.5.7. (b) $u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{3n} \cos 3n\theta$.

2.5.8. (a) $\phi_1(r) = \begin{cases} \ln(r/a) & n = 0, \\ \left(\frac{r}{a}\right)^n - \left(\frac{a}{r}\right)^n & n \neq 0, \end{cases} \quad \phi_2(r) = \begin{cases} \ln(r/b) & n = 0, \\ \left(\frac{r}{b}\right)^n - \left(\frac{b}{r}\right)^n & n \neq 0, \end{cases}$

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\theta [A_n \phi_1(r) + B_n \phi_2(r)] + \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen } n\theta [C_n \phi_1(r) + D_n \phi_2(r)],$$

$$D_n \phi_2(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \text{sen } n\theta d\theta, \text{ etc.}$$

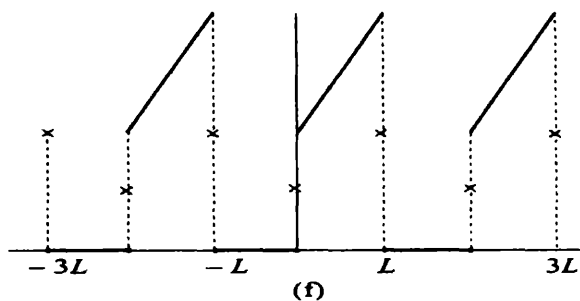
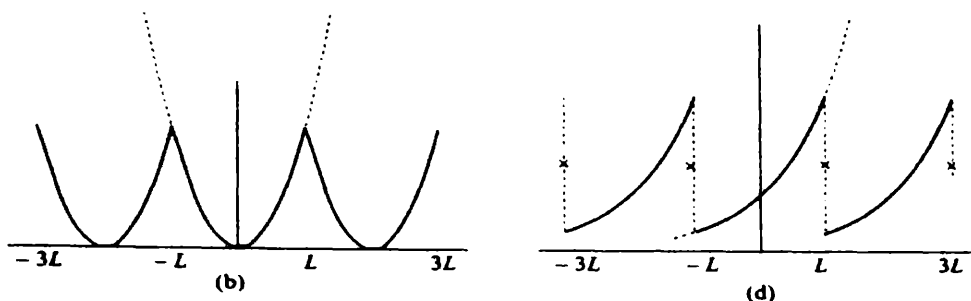
2.5.9. (a) $u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{2n} - \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} \right] \text{sen } 2n\theta$,

$$\text{donde } A_n \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{2n} - \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} \right] = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \text{sen } 2n\theta d\theta.$$

2.5.9. (b) $u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \frac{n\pi\theta}{\ln(b/a)} \sin \left[n\pi \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \right],$

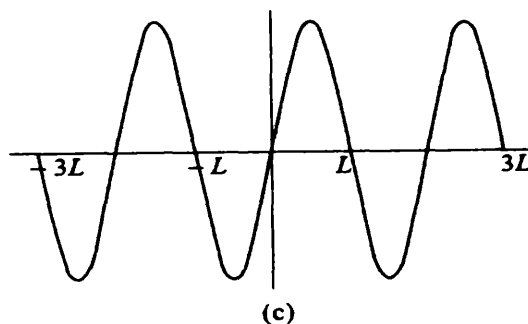
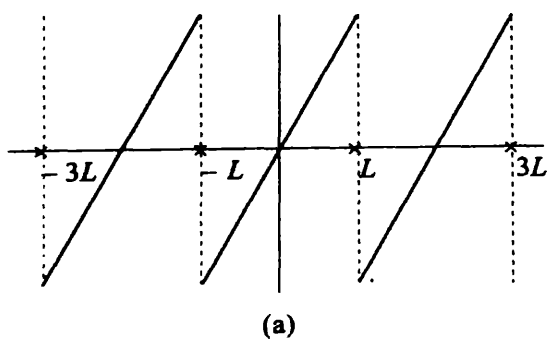
donde $A_n \sinh \frac{n\pi^2}{2 \ln(b/a)} = \frac{2}{\ln(b/a)} \int_a^b f(r) \sin \left[n\pi \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \right] dr/r.$

3.2.1.

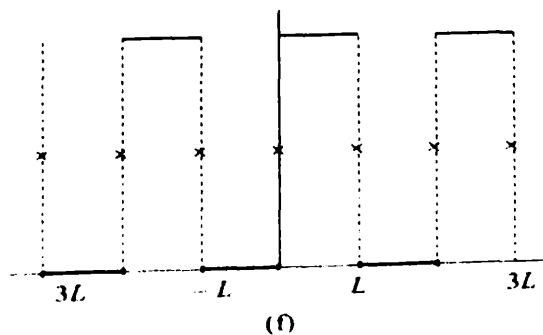


3.2.2. (a) $a_n = 0, b_n = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}.$

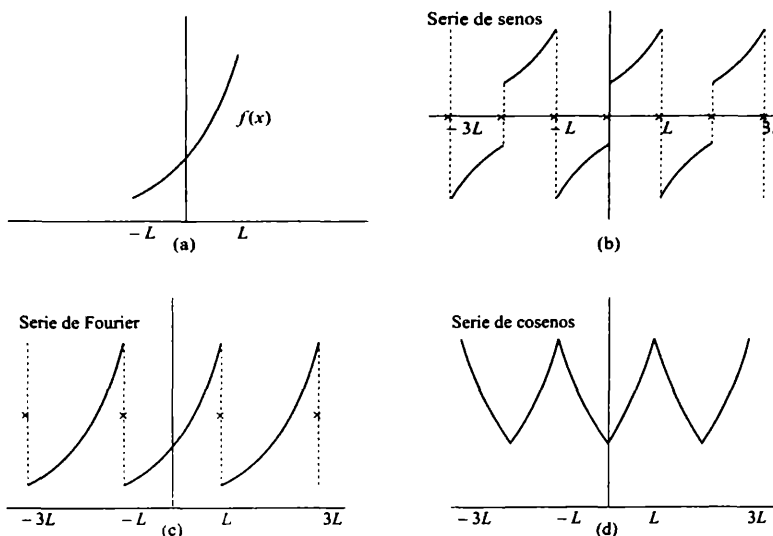
(c) $b_1 = 1, \text{ el resto } = 0.$



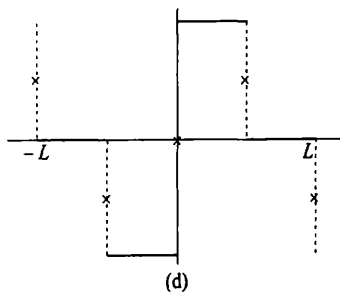
(f) $a_0 = \frac{1}{2}, \text{ el resto } a_n = 0; b_n = \frac{2}{n\pi} (n \text{ impar}), \text{ el resto } b_n = 0.$



3.3.1. (d)



3.3.2. Repetir la figura periódicamente; $b_n = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos \frac{n\pi}{2})$.



3.3.10. $f_e(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = \frac{1}{2} \begin{cases} x^2 + e^x & x < 0, \\ x^2 + e^{-x} & x > 0, \end{cases}$
 $f_o(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = \frac{1}{2} \begin{cases} x^2 - e^x & x < 0, \\ e^{-x} - x^2 & x > 0. \end{cases}$

3.3.13. $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen } n\pi x/L dx$, $b_n = 0$ para n par, pues $\text{sen } n\pi x/L$ es simétrico impar alrededor de $L/2$ para n par.

3.4.1. (a)

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} dx = uv \Big|_a^b + uv \Big|_{c+}^{c-} - \int_a^b v \frac{du}{dx} dx.$$

3.4.3. (a) $b_n = \frac{2}{L} \text{sen } \frac{n\pi x_0}{L} (\alpha - \beta) - \frac{n\pi}{L} a_n$.

3.4.9. $\frac{db_n}{dt} + k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 b_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x, t) \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx$.

$$3.4.12. \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \cos n\pi x/L,$$

$$\begin{aligned} n \neq 0, 3, \quad A_n(t) &= A_n(0)e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \\ A_0(t) &= A_0(0) + 1 - e^{-t}, \\ A_3(t) &= A_3(0)e^{-k(3\pi/L)^2 t} + \frac{e^{2t} - e^{-k(3\pi/L)^2 t}}{k\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 - 2}, \end{aligned}$$

$$\text{con } A_0(0) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \text{ y } A_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (n \neq 0).$$

$$3.5.1. \quad (c) \quad \left(\frac{x}{L}\right)^3 = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 6 \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2} + 12 \frac{[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^4} \right\} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

$$3.5.4. \quad b_n = \frac{2n\pi}{L^2 + n^2\pi^2} [1 - (-1)^n \cosh L].$$

$$3.5.7. \quad \pi^3/32.$$

$$3.6.1. \quad C_m = \frac{1}{m\pi\Delta} e^{im\pi/L(x_0 + \Delta/2)} \operatorname{sen} \frac{m\pi\Delta}{2L}.$$

$$4.4.1. \quad (a) \quad \frac{n\pi c}{L}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$4.4.1. \quad (b) \quad (m - \frac{1}{2})\pi c/H, m = 1, 2, 3, \dots$$

$$4.4.2. \quad (c) \quad \text{Las frecuencias de vibración son } \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\frac{(n\pi/L)^2 T_0 - \alpha}{\rho_0}}.$$

$$4.4.3. \quad (b) \quad u = e^{-\beta t/2\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n t + b_n \operatorname{sen} w_n t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

$$\text{donde } w_n = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4\rho_0^2}}.$$

$$5.3.1. \quad T_0 \frac{d^2\phi}{dx^2} + \alpha\phi + \lambda\rho_0\phi = 0.$$

$$5.3.3. \quad H = c_1 \exp \left[\int^x \alpha(t) dt \right] \quad (\text{pongamos } c_1 = 1). \text{ Entonces } p(x) = H, \quad q(x) = \gamma H$$

$$\text{y } \sigma(x) = \beta H.$$

$$5.3.4. \quad (b) \quad u = e^{\frac{v_0}{2k}x} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n t},$$

$$\text{donde } A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{v_0}{2k}x} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

$$\text{Obsérvese que } \lambda = \frac{v_0^2}{4k} + k \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2.$$

$$5.3.9. \quad (c) \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lambda = (n\pi/\ln b)^2.$$

$$5.4.2. \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x) e^{-\lambda_n t} \quad (\text{con } \lambda_1 = 0, \phi_1 = 1).$$

$$5.4.3. \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(r) e^{-\lambda_n t}, \quad \text{donde } a_n = \frac{\int_0^a f(r) \phi_n(r) r dr}{\int_0^a \phi_n^2(r) r dr}.$$

$$5.4.6. \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) \cos \sqrt{\lambda_n} t.$$

5.5.1. (g) $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

5.5.9. $\lambda = \frac{-\int_0^1 \left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_0^1 e^x \phi^2 dx}$.

5.5.11. (a) $H(x) = p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}\right) + uv \left(\frac{dp}{dx} - r\right)$.

5.5A.4. (a) $\mathbf{v}(t) = \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{7t} - \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{2t}$.

5.5A.5. (b) $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$.

5.6.1. (c) $u_T = ax + bx^2$, con $a = 3, b = -2, \lambda_1 \leq 2/3$.

5.7.1. La frecuencia circular (ciclos por 2π unidades de tiempo) es $\sqrt{\lambda}$, pero la frecuencia real es $\sqrt{\lambda}/2\pi$ (ciclos por una unidad de tiempo):

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \leq \frac{1}{2} \sqrt{1 + \alpha^2}.$$

5.8.2. (c) Por extensión de la Figura 5.8.2 (a), $(n-l)\pi < \sqrt{\lambda_n}L < (n - \frac{1}{2})\pi$.

5.8.3. (b) $(n-1)\pi < \sqrt{\lambda_n}L < (n - \frac{1}{2})\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$

5.8.7. (b) $\lambda = 1/4$. (c) ninguno. (d) no. (e) si.

5.8.8. (c) $\sqrt{\lambda_n} \sim (n-1)\pi$.

5.8.10. (a) $\lambda_1 \approx 4,12$. (b) $\lambda_1 = 4,11586\dots$

5.8.13. $\cos \sqrt{\lambda}L = \frac{1}{\sqrt{1 + (\lambda/h^2)}}$. Por tanto, $\int_0^L \sin^2 \sqrt{\lambda}x dx = \frac{L}{2} + \frac{1}{2h[1 + (\lambda/h^2)]}$.

5.9.1. (b) $\lambda^{1/2} \int_0^L (\sigma/p)^{1/2} dx_0 \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$.

5.9.3. (a) $A'' + i\lambda^{1/2} (2A'\sigma^{1/2} + \frac{1}{2}\sigma^{-1/2}\sigma'A) + qA = 0$.

5.9.3. (e) $A_{n+1} = \frac{i}{2}\sigma^{-1/4} \int_0^x \sigma^{-1/4} (A_n'' + qA_n) dx_0$.

5.10.2. (b) $\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$

6.2.6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \approx \frac{1}{4(\Delta x)^2} [u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x - \Delta x, y + \Delta y) - u(x + \Delta x, y - \Delta y) + u(x - \Delta x, y - \Delta y)]$, suponiendo que $\Delta x = \Delta y$.

$$6.3.4. \text{ (a) } \beta_n = \frac{\sum_{j=1}^{N-1} f_j \operatorname{sen}(n\pi j/N)}{\sum_{j=1}^{N-1} f_j \operatorname{sen}^2(n\pi j/N)}.$$

$$6.3.4. \text{ (b) } (N-1)/2.$$

$$6.3.6. \text{ (d) Estable si } s < 0,5125.$$

$$6.3.9. \text{ (b) } \mathbf{A} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$6.3.10. \text{ (b) } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{ka}{s} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$6.3.14. \text{ (c) } \lambda = 0, 3, 4; |\lambda - 1| \leq 5, |\lambda - 4| \leq 8, |\lambda - 2| \leq \frac{1}{3}.$$

$$6.4.1. k\Delta t \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right] \leq \frac{1}{2}.$$

$$6.5.5. \text{ (b) Inestable.}$$

$$6.5.6. \text{ (b) Estable si } \frac{c}{\Delta x/\Delta t} \leq 1.$$

$$7.3.1. \text{ (a) } u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} e^{-\lambda_{nm} kt},$$

$$\text{donde } \lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2$$

$$7.3.1. \text{ (c) } u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi y}{H} e^{-\lambda_{nm} kt},$$

$$\text{donde } \lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2.$$

$$7.3.2. \text{ (b) } u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{nml} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{H} \cos \frac{\ell\pi z}{W} e^{-\lambda_{nml} kt},$$

$$\text{donde } \lambda_{nml} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{W}\right)^2$$

$$u(x, y, z, t) \rightarrow a_{000} = \frac{1}{LHW} \int_0^W \int_0^H \int_0^L f(x, y, z) dx dy dz \text{ para } t \rightarrow$$

∞

$$7.3.4. \text{ (b) } u(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{H} h_{nm}(t),$$

$$\text{donde } h_{nm}(t) = \begin{cases} t & n=0, m=0, \\ \operatorname{sen} \omega_{nm} t & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$\omega_{nm}^2 = c^2 \pi^2 \left[(n/L)^2 + (m/H)^2 \right],$$

$$A_{nm} h'_{nm}(0) = \frac{\int_0^H \int_0^L f \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{H} dx dy}{\int_0^H \int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi y}{H} dx dy}.$$

$$7.3.6. \text{ (b) } u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{W} \cosh \sqrt{\lambda_{nm}} z,$$

$$\text{donde } \lambda_{nm} = (n\pi/L)^2 + (m\pi/W)^2.$$

$$7.3.7. \text{ (c) y (d) } u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{n\pi y}{W} \cos \frac{m\pi z}{H} \cosh \beta_{nm} x,$$

$$\text{donde } \beta_{nm}^2 = (n\pi/W)^2 + (m\pi/H)^2.$$

Para (c) sólo existe una solución si $\int_0^H \int_0^W f(y, z) dy dz = 0$, en cuyo caso A_{00} es arbitrario y los demás cumplen

$$A_{nm} \beta_{nm} \sinh \beta_{nm} L = \frac{\int_0^H \int_0^W f \cos \frac{n\pi y}{W} \cos \frac{m\pi z}{H} dy dz}{\int_0^H \int_0^W \cos^2 \frac{n\pi y}{W} \cos^2 \frac{m\pi z}{H} dy dz}.$$

Para (d):

$$A_{nm} \cosh \beta_{nm} L = \frac{\int_0^H \int_0^W g \cos \frac{n\pi y}{W} \cos \frac{m\pi z}{H} dy dz}{\int_0^H \int_0^W \cos^2 \frac{n\pi y}{W} \cos^2 \frac{m\pi z}{H} dy dz}.$$

$$7.4.1. \text{ (a) } \lambda_{nm} = (n\pi/H)^2 + (m\pi/L)^2, \text{ donde } n = 1, 2, 3, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$$

$$7.7.1. u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_3(\sqrt{\lambda_{3n}} r) \sin 3\theta \sin c\sqrt{\lambda_{3n}} t.$$

$$7.7.2. \text{ (d) } u(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos m\theta + B_{mn} \sin m\theta) H_{mn}(r, t), \text{ donde}$$

$$H_{mn}(r, t) = \begin{cases} t & m = 0, n = 1, \\ J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) \sin c\sqrt{\lambda_{mn}} t & \text{en otro caso con } J'_m(\sqrt{\lambda_{mn}} a) = 0, \end{cases}$$

$$A_{mn} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \beta(r, \theta) \phi_{mn}(r) \cos m\theta r dr d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \phi_{mn}^2(r) \cos^2 m\theta r dr d\theta},$$

donde

$$\phi_{mn}(r) = \begin{cases} 1 & n = 0, m = 1, \\ c\sqrt{\lambda_{mn}} J_m(\sqrt{\lambda_{mn}} r) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y B_{mn} es como A_{mn} pero cambiando $\cos m\theta$ por $\sin m\theta$.

$$7.7.3. \text{ (a) } c\sqrt{\lambda_{mn}} \text{ donde } J_{2m}(\sqrt{\lambda_{mn}} a) = 0.$$

7.7.5. Las frecuencias son $c\sqrt{\lambda}$, donde

$$J_{2m}(\sqrt{\lambda} a) Y_{2m}(\sqrt{\lambda} b) - J_{2m}(\sqrt{\lambda} b) Y_{2m}(\sqrt{\lambda} a) = 0.$$

7.7.8. La Sección 7.7 es válida para la ecuación del calor cambiando (7.7.5) por $dh/dt = -\lambda kh$. La condición de contorno introduce cambios más importantes. El cociente de Rayleigh prueba que $\lambda \geq 0$ y que sólo puede ser $\lambda = 0$ cuando $\phi(r, \theta)$ es constante, lo que equivale a $m = 0$. Las otras autofunciones aún

satisfacen (7.7.38) con la condición de contorno $f'(a) = 0$, lo que nos conduce a $J'_m(\sqrt{\lambda}a) = 0$. Por tanto,

$$\phi_{mn}(r, \theta) = \begin{cases} 1 & m = 0, n = 1, \\ J_m(\sqrt{\lambda}r) \cos m\theta & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, $e^{-\lambda_{mn}kt} \rightarrow 0$, excepto para $m = 0, n = 1$, puesto que entonces $\lambda_{mn} = 0$. Entonces $u(r, \theta, t) \rightarrow A_{01}$, donde $A_{01} = \frac{\pi}{a^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a f(r, \theta) r dr d\theta$.

7.7.9. (b)

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} \phi_{mn}(r) \cos m\theta e^{-\lambda_{mn}kt}, \text{ donde}$$

$$\phi_{mn}(r) = \begin{cases} 1 & m = 0, n = 1, \\ J_m(\sqrt{\lambda_{mn}}r) & \text{en otro caso donde } J'_m(\sqrt{\lambda}a) = 0. \end{cases}$$

7.7.10. $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\sqrt{\lambda_n}r) e^{-\lambda_n kt}$, donde $J_0(\sqrt{\lambda_n}a) = 0$.

7.7.12. (c) $y = c_1 [\cos(2 \ln x) + \dots] + c_2 [\sin(2 \ln x) + \dots]$.

7.7.12. (e) $y = c_1 (x^2 + \dots) + c_2 (x^3 + \dots)$.

7.8.1. (b) $J_m(\sqrt{\lambda}) Y_m(2\sqrt{\lambda}) - J_m(2\sqrt{\lambda}) Y_m(\sqrt{\lambda}) = 0$.

7.8.1. (d) $\frac{1}{2}\pi^2 \leq \lambda_1 \leq 2\pi^2$.

7.8.2. (d) $u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} J_{2m}(\sqrt{\lambda_{mn}}r) \sin 2m\theta e^{-\lambda_{mn}kt}$,

$$\text{donde } J_{2m}(\sqrt{\lambda_{mn}}a) = 0.$$

7.8.8. $J_{1/2}(z) = \sqrt{2/\pi z} \sin z$.

7.9.1. (b) $u(r, \theta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \sqrt{\lambda_{7n}}(H - z) \sin 7\theta J_7(\sqrt{\lambda_{7n}}r)$,

$$\text{donde } J_7(\sqrt{\lambda_{7n}}a) = 0.$$

7.9.2. (b) $u(r, \theta, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} I_m \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{H} r \right] \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{H} \sin m\theta$.

7.9.3. (b) $u(r, \theta, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell mn} \phi_{\ell mn}(r, \theta, z) e^{-\lambda_{mn}kt}$,

$$\text{donde } \lambda_{mn} = (\ell\pi/H)^2 + \lambda'_{mn} \text{ y } J'_{2m}(\sqrt{\lambda'_{mn}}a) = 0.$$

$$\phi_{\ell mn}(r, \theta, z) = \begin{cases} 1 & m = 0, \ell = 0, n = 1, \\ \cos \frac{\ell\pi}{H} z \cos 2m\theta J_{2m}(\sqrt{\lambda'_{mn}}r) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$7.9.4. \text{ (a) } u(r, z, t) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{n\ell} J_0(\sqrt{\lambda'_n} r) \operatorname{sen} \frac{\ell\pi z}{H} e^{-\lambda kt},$$

$$\text{donde } \lambda = \lambda' + (\ell\pi/H)^2 \text{ y } J_0(\sqrt{\lambda'_n} a) = 0.$$

$$\text{Aquí } A_{nm} = \frac{\iint f(r, z) J_0(\sqrt{\lambda'_n} r) \operatorname{sen} \frac{m\pi z}{H} r \, dr \, dz}{\iint J_0^2(\sqrt{\lambda'_n} r) \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi z}{H} r \, dr \, dz}.$$

$$8.2.1. \text{ (a) } u(x, t) = A + Bx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} e^{-[(n-1/2)\pi/L]^2 kt}.$$

$$\text{donde } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L} dx$$

$$8.2.1. \text{ (d) } u_E(x) = -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{B-A}{L} + \frac{L}{2} \right) x + A.$$

$$8.2.2. \text{ (a) } r(x, t) = A(t)x + \frac{[B(t)-A(t)]x^2}{2L}.$$

$$8.2.2. \text{ (c) } r(x, t) = A(t)x + B(t) - LA(t)$$

$$8.2.6. \text{ (a) } u(x, t) = A + (B-A) \frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi ct}{L} \right),$$

$$\text{donde } A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left\{ f(x) - \left[A + (B-A) \frac{x}{L} \right] \right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$\text{y } B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

$$\text{(d) } u_E(x) = \frac{L^2}{c^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}.$$

$$8.3.1. \text{ (c) } u(x, t) = A(t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \operatorname{sen} \frac{(n-1/2)\pi x}{L}.$$

$$8.3.1. \text{ (f) } u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L},$$

$$\text{donde } \frac{dA_n}{dt} + k \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 A_n = \frac{\int_0^L Q(x, t) \cos n\pi x/L \, dx}{\int_0^L \cos^2 n\pi x/L \, dx}.$$

$$8.3.3. u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x), \text{ donde } \frac{da_n}{dt} = -\lambda_n a_n + \frac{\int_0^L \phi_n f \, dx}{\int_0^L \phi_n^2 c \rho \, dx}.$$

$$8.3.4. \text{ (a) } u_E(x) = A + (B-A) \frac{\int_0^x d\bar{x}/K_0(\bar{x})}{\int_0^L d\bar{x}/K_0(\bar{x})}.$$

$$8.3.5. u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) J_0(\lambda_n^{1/2} r), \text{ donde } J_0(\lambda_n^{1/2} a) = 0,$$

$$\text{y donde } \frac{dA_n}{dt} + k\lambda_n A_n = \frac{\int_0^a f(r, t) J_0(\lambda_n^{1/2} r) r dr}{\int_0^a J_0^2(\lambda_n^{1/2} r) r dr}.$$

$$8.3.7. \quad r(x, t) = \frac{x^3}{6L} + \left(\frac{t}{L} - \frac{L}{6} \right) x.$$

$$8.4.1. \quad (b) \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \cos \frac{n\pi x}{L}, \text{ donde}$$

$$A_n(t) = e^{-k(n\pi/L)^2 t} \left(A_n(0) + \int_0^t e^{k(n\pi/L)^2 \bar{t}} \left\{ q_n(\bar{t}) + \frac{I_n k}{L} [(-1)^n B(\bar{t}) - A(\bar{t})] \right\} d\bar{t} \right),$$

$$\text{con } A_n(0) = \frac{\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx}{\int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx}, \quad q_n(t) = \frac{\int_0^L Q(x, t) \cos \frac{n\pi x}{L} dx}{\int_0^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx}, \quad I_n = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ 2 & n \neq 0. \end{cases}$$

$$8.5.2. \quad (b) \quad \omega^2 = \left(\frac{n\pi c}{L} \right)^2.$$

$$8.5.5. \quad (c) \quad u(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm}(t) J_m(\sqrt{\lambda} r) \text{ sen } m\theta \text{ con } J_m(\sqrt{\lambda} a) = 0,$$

$$\text{donde } A_{nm} = \frac{1}{c\sqrt{\lambda}} \int_0^t Q_{nm}(\bar{t}) \text{ sen } c\sqrt{\lambda}(t - \bar{t}) d\bar{t} + c_{nm} \cos c\sqrt{\lambda} t,$$

$$Q_{nm} = \frac{\iint Q(x, y, t) J_m(\sqrt{\lambda} r) \text{ sen } m\theta r dr d\theta}{\iint J_m^2(\sqrt{\lambda} r) \text{ sen}^2 m\theta r dr d\theta},$$

$$c_{nm} = \frac{\iint f(x, y) J_m(\sqrt{\lambda} r) \text{ sen } m\theta r dr d\theta}{\iint J_m^2(\sqrt{\lambda} r) \text{ sen}^2 m\theta r dr d\theta}.$$

$$8.5.6. \quad (a) \quad \frac{1}{c^2} \frac{d^2 a}{dt^2} + \lambda a = \frac{\int_0^\pi \int_0^\alpha g \phi r dr d\theta}{\int_0^\pi \int_0^\alpha \phi^2 r dr d\theta}, \text{ donde } \frac{d}{dr} J_m(\lambda^{1/2} \alpha) = 0$$

$$8.6.1. \quad (b) \quad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \text{ sen } \frac{n\pi x}{L} \text{ sen } \frac{m\pi y}{H},$$

$$\text{donde } A_{nm} = \frac{-Q_{nm} - (2/L)(-1)^n (n\pi/L)^2}{(n\pi/L)^2 + (m\pi/H)^2}.$$

(d) Si $\iint Q dx dy = 0$, entonces $u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{H}$, donde A_{00} es arbitrario y los otros coeficientes vienen dados por

$$A_{nm} \left[\left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2 \right] = \frac{\iint Q \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{H} dx dy}{\iint \cos^2 \frac{n\pi x}{L} \cos^2 \frac{m\pi y}{H} dx dy}$$

$$8.6.3. \text{ (a) } u(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos m\theta J_m(\sqrt{\lambda}r) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \operatorname{sen} m\theta J_m(\sqrt{\lambda}r),$$

$$\text{donde } J_m(\sqrt{\lambda}a) = 0 \text{ y } \begin{pmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \end{pmatrix} = \frac{-\frac{1}{\lambda} \int Q \begin{pmatrix} \cos m\theta \\ \operatorname{sen} m\theta \end{pmatrix} J_m(\sqrt{\lambda}r) r dr d\theta}{\int \begin{pmatrix} \cos^2 m\theta \\ \operatorname{sen}^2 m\theta \end{pmatrix} J_m^2(\sqrt{\lambda}r) r dr d\theta}.$$

$$8.6.6. u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \operatorname{sen} nx, \text{ donde } a_n(y) = \frac{1}{3} e^{2y} \delta_{n1} + \alpha_n \operatorname{senh} ny + \beta_n \operatorname{cosh} ny \\ \text{y } \delta_{n1} = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 0 & n \neq 1. \end{cases}$$

$$9.2.1. \text{ (d) } G(x, t; x_0, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{I_n} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x_0}{L} e^{-k(n\pi/L)^2(t-t_0)},$$

$$\text{donde } I_n = \begin{cases} L & n = 0 \\ L/2 & n \neq 0 \end{cases} \text{ y}$$

$$u(x, t) = \int_0^L g(x_0) G(x, t; x_0, t_0) dx_0 + \int_0^L \int_0^t Q(x_0, t_0) G(x, t; x_0, t_0) dt_0 dx_0 \\ + \int_0^t kB(t_0) G(x, t; L, t_0) dt_0 - \int_0^t kA(t) G(x, t; 0, t_0) dt_0.$$

$$9.2.3. G(x, t; x_0, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \frac{\operatorname{sen} n\pi c(t-t_0)/L}{n\pi c/L},$$

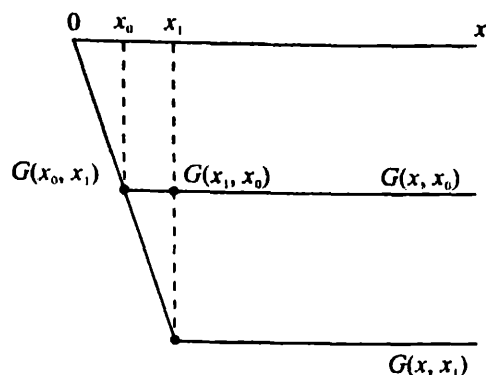
$$u(x, t) = \int_0^L \int_0^t Q(x_0, t_0) G(x, t; x_0, t_0) dt_0 dx_0 + \int_0^L g(x_0) G(x, t; x_0, 0) dx_0 \\ + \int_0^L f(x_0) \frac{\partial G}{\partial t}(x, t; x_0, 0) dx_0.$$

$$9.3.5. \text{ (a), (b) } u(x) = \int_0^x (x-x_0) f(x_0) dx_0 - x \int_0^L f(x_0) dx_0.$$

$$9.3.5. \text{ (c) } G(x, x_0) = \begin{cases} -x & x < x_0, \\ -x_0 & x > x_0. \end{cases}$$

9.3.6. (a) Véase la respuesta a 9.3.5(c).

9.3.6. (b)



9.3.9. (b) Véase la respuesta a 9.3.11.

$$9.3.11. (a) G(x, x_0) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x_0 - L) \text{sen } x}{\text{sen } L} & x < x_0, \\ \frac{\text{sen}(x - L) \text{sen } x_0}{\text{sen } L} & x > x_0. \end{cases}$$

$$9.3.13. (b) G(x, x_0) = \frac{1}{2ik} e^{ik|x-x_0|}.$$

$$9.3.14. (d) u(x) = \int_0^L G(x, x_0) f(x_0) dx_0 - \alpha p(0) \left. \frac{dG}{dx_0}(x, x_0) \right|_{x_0=0} - \beta p(L) G(x, L).$$

$$9.3.15. (a) G(x, x_0) = \begin{cases} \frac{1}{k} y_1(x) y_2(x_0) & x < x_0, \\ \frac{1}{k} y_1(x_0) y_2(x) & x > x_0, \end{cases} \text{ donde } k \text{ es una constante.}$$

$$9.3.21. G(x, x_0) = \begin{cases} 0 & x < x_0, \\ 1 & x > x_0, \end{cases}$$

$$9.3.25. (b) u(x) = \frac{1}{6} \int_0^x f(t_0) (x - t_0)^3 dt_0.$$

$$9.4.2. (a) 0 = \int_0^L \phi_h(x) f(x) dx - \alpha p(0) \left. \frac{d\phi_h}{dx} \right|_{x=0} + \beta p(L) \left. \frac{d\phi_h}{dx} \right|_{x=L}.$$

9.4.3. (b) Número infinito de soluciones.

9.4.6. (a) $u = 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x$; sin soluciones.9.4.6. (b) $c_2 = 0$, c_1 arbitrario.9.4.6. (c) c_1 y c_2 arbitrarios.9.4.8. (a) $u = \frac{1}{2} x \text{sen } x + c_2 \text{sen } x$.9.4.10. $G_m(x, x_0) =$

$$a \text{sen } x \text{sen } x_0 + \begin{cases} \frac{1}{\pi} (x \cos x \text{sen } x_0 + x_0 \cos x_0 \text{sen } x) - \cos x_0 \text{sen } x & x < x_0, \\ \frac{1}{\pi} (x_0 \cos x_0 \text{sen } x + x \cos x \text{sen } x_0) - \cos x \text{sen } x_0 & x > x_0, \end{cases}$$

$$u(x) = \int_{x_0}^x f(x_0) G_m(x, x_0) dx_0 + \frac{\beta}{\pi} (x \cos x + \text{sen } x)$$

$$-\alpha \left[\frac{1}{\pi} (\sin x + x \cos x) - \cos x \right] + k \sin x,$$

donde k es una constante arbitraria.

9.4.11. (a),(b) $c = 1$.

9.4.11. (d) $G_a(x, x_0) = \alpha + \begin{cases} x_0 & x < x_0, \\ x & x > x_0, \end{cases}$ donde α es una constante arbitraria.

9.4.11. (e) $u(x) = \int_0^L f(x_0) G_a(x, x_0) dx_0 + k_1$, donde k_1 es arbitraria.

$$9.5.3. (c) G(r, \theta; r_0, \theta_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta \sin m\theta_0 J_m(\sqrt{\lambda}r) J_m(\sqrt{\lambda}r_0)}{-\lambda \iint J_m^2(\sqrt{\lambda}r) \sin^2 m\theta r dr d\theta},$$

donde $J_m(\sqrt{\lambda}a) = 0$.

9.5.4. Véase (9.5.23) pero escrita en dimensión tres en lugar de en dimensión dos, es decir añadiendo un signo de integración extra en cada integral.

$$9.5.9. (b) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta \sin m\theta_0}{m\pi} \begin{cases} \left(\frac{r}{a}\right)^m \left[\left(\frac{r_0}{a}\right)^m - \left(\frac{a}{r_0}\right)^m \right] & r < r_0, \\ \left(\frac{r_0}{a}\right)^m \left[\left(\frac{r}{a}\right)^m - \left(\frac{a}{r}\right)^m \right] & r > r_0. \end{cases}$$

9.5.10. (a) $L = \nabla^2 + k^2$, $\iiint [uL(v) - vL(u)] dV = \iint (\mathbf{u} \nabla v - v \nabla u) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$.

9.5.10. (b) $c_2 = 0$, $c_1 = \frac{-1}{(4\pi)}$. (c) $G = \frac{1}{4} [Y_0(kr) - iJ_0(kr)]$.

$$9.5.13. (a) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right].$$

$$9.5.14. G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2][(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2]}{[(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2][(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2]}.$$

$$9.5.19. G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \left[a^2 \frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)}{r^2 r_0^2 + a^4 - 2rr_0 a^2 \cos(\theta - \theta_0)} \right] - \frac{1}{4\pi} \ln \left[a^2 \frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta + \theta_0)}{r^2 r_0^2 + a^4 - 2rr_0 a^2 \cos(\theta + \theta_0)} \right].$$

$$9.5.22. (c) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \alpha_n|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \beta_n|} \right),$$

donde $\alpha_n = (x_0 + 2Ln, y_0, z_0)$ y $\beta_n = (-x_0 + 2Ln, y_0, z_0)$.

$$10.2.1. c(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}[A(-\omega) - iB(-\omega)] & \omega < 0, \\ \frac{1}{2}[A(\omega) + iB(\omega)] & \omega > 0. \end{cases}$$

10.3.6. Véase la tabla de transformadas.

10.3.7. Véase la tabla de transformadas.

$$\mathbf{10.3.10. (b)} \quad \int_0^L J_0(sr)J_0(s_1r)r dr \approx \frac{2 - \sqrt{s_1/s} \cos sL - \pi/4 \operatorname{sen} s_1L - \pi/4 + \sqrt{s/s_1} \cos s_1L - \pi/4 \operatorname{sen} sL - \pi/4}{\pi(s^2 - s_1^2)}.$$

$$\mathbf{10.3.10. (c)} \quad A(s_1) = \int_0^\infty f(r)J_0(s_1r)r dr.$$

$$\mathbf{10.3.16.} \quad \int_0^\infty y^p e^{-ky^n} dy = \frac{1}{n} k^{-(1+p)/n} \Gamma\left(\frac{1+p}{n}\right).$$

$$\mathbf{10.4.3. (a)} \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^\infty f(\bar{x}) e^{-(x+ct-\bar{x})^2/4kt} d\bar{x}.$$

$$\mathbf{10.4.5. (c)} \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty f(\bar{x}) \sqrt{\frac{\pi}{dt}} e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} d\bar{x} \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{-\infty}^\infty Q(\bar{x}, \tau) \sqrt{\frac{\pi}{k(t-\tau)}} e^{-(x-\bar{x})^2/4k(t-\tau)} d\bar{x} d\tau.$$

$$\mathbf{10.4.6.} \quad A_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{\omega^3}{3} + \omega x\right) d\omega.$$

$$\mathbf{10.4.7. (c)} \quad u(x, t) = \frac{1}{(3kt)^{1/3}} \int_{-\infty}^\infty f(\bar{x}) A_i\left[\frac{\bar{x}-x}{(3kt)^{1/3}}\right] d\bar{x}.$$

$$\mathbf{10.5.3.} \quad C[e^{-\alpha x^2}] = 2 \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} e^{-\omega^2/4\alpha}.$$

$$\mathbf{10.5.10.} \quad C^{-1}(\omega e^{-\omega\alpha}) = \frac{(\alpha^2 - x^2)}{(\alpha^2 + x^2)^2}.$$

$$\mathbf{10.5.11.} \quad u(x, t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^\infty (f(\bar{x}) - 1) \left(e^{-(x-\bar{x})^2/4kt} - e^{-(x+\bar{x})^2/4kt} \right) d\bar{x}.$$

$$\mathbf{10.5.17. (b)} \quad \bar{U}(\omega, t) \approx \frac{(2/\pi)\omega A e^{i\sigma_0 t}}{\omega^2 + i\sigma_0/k}.$$

10.6.1. (a) $\bar{u}(\omega, y) = F_2(\omega) \frac{\operatorname{senh} \omega y}{\operatorname{senh} \omega H} + F_1(\omega) \frac{\operatorname{senh} \omega(H-y)}{\operatorname{senh} \omega H}$, donde $\bar{u}(\omega, y)$ es la transformada de Fourier de $u(x, y)$.

10.6.2. (b) $\bar{u}(x, \omega) = \frac{G_1(\omega) \cosh \omega(L-x)}{\cosh \omega L}$, donde $\bar{u}(x, \omega)$ es la transformada de Fourier en cosenos de $u(x, y)$.

$$10.6.4. (a) u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(\bar{x}) \ln \frac{(x - \bar{x})^2 + y^2}{(x + \bar{x})^2 + y^2} d\bar{x}.$$

$$10.6.11. (a) u(x, y, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x_0, y_0) \frac{1}{4\pi kt} \left\{ \exp \left[\frac{-(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{4kt} \right] \right. \\ \left. + \exp \left[\frac{-(x + x_0)^2 - (y + y_0)^2}{4kt} \right] - \exp \left[\frac{-(x + x_0)^2 - (y - y_0)^2}{4kt} \right] \right. \\ \left. - \exp \left[\frac{-(x - x_0)^2 - (y + y_0)^2}{4kt} \right] \right\} dx_0 dy_0.$$

$$10.6.12. (a) u(x, y, t) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \bar{A}_n(\omega, t) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \operatorname{sen} \omega y d\omega,$$

$$\text{donde } \bar{A}_n(\omega, t) = c(\omega) e^{-k[\omega^2 + (n\pi/L)^2]t}$$

$$\text{y } c(\omega) = \frac{4}{L\pi} \int_0^\infty \int_0^L f(x, y) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \omega y dx dy.$$

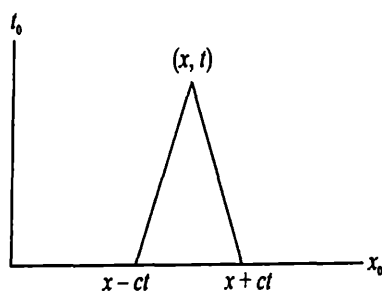
$$10.6.15. (a) \bar{U} = F(\omega) e^{-\omega z}.$$

$$10.6.15. (b) u(x, y) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x_0, y_0) dx_0 dy_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2]^{3/2}}.$$

$$10.6.16. (b) u(r, \theta) = \int_0^\infty A(\omega) \operatorname{senh} \omega \theta \operatorname{sen} \left(\omega \ln \frac{r}{a} \right) d\omega.$$

$$10.6.18. u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\bar{x}) d\bar{x}.$$

11.2.6. (b)



$$11.2.7. (a) u(x, t) = \int_{x-ct}^{x+ct} g(x_0) \frac{1 - e^{-i\omega(t - |x - x_0|/c)}}{2i\omega c} dx_0.$$

$$11.2.8. (a) \text{Función de influencia} = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - x_0| > ct, \\ \frac{e^{-i\omega(t - r/c)}}{4\pi c^2 r} & \text{si } |x - x_0| < ct, \end{cases} \text{ donde } r = |x - x_0|.$$

$$11.2.10. \text{ (b) } u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > ct, \\ h\left(t - \frac{x}{c}\right) & \text{si } x < ct. \end{cases}$$

$$11.2.12. \text{ (a) } G(x, t; x_1, t_1) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > c(t - t_1), \\ \frac{1}{2\pi c \sqrt{c^2(t-t_1)^2 - r^2}} & \text{si } r < c(t - t_1). \end{cases}$$

$$11.3.2. \text{ (c) Si } A = 1, u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{4kt}}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta.$$

$$11.3.3. G(x, t; x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-t_0)}} \left\{ \exp\left[\frac{-(x-x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right] + \exp\left[\frac{-(x+x_0)^2}{4k(t-t_0)}\right] \right\}.$$

$$12.2.2. w(x, t) = \cos(x + 3t).$$

$$12.2.5. \text{ (b) } w(x, t) = t + f(xe^{-t}).$$

$$12.2.5. \text{ (d) } w(x, t) = e^t f\left(x - \frac{3}{2}t^2\right).$$

$$12.2.6. x = 2f(x_0)t + x_0.$$

$$12.2.8. u(x, t) = \begin{cases} 1 & x \leq 2t, \\ x/(2t) & 2t < x < 4t, \\ 2 & x \geq 4t. \end{cases}$$

$$12.3.4. \text{ (a) } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -c \frac{dF(x)}{dx}.$$

$$12.3.4. \text{ (b) } \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = -\frac{1}{c} \frac{dF(-ct)}{dt}.$$

$$12.4.1. u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > ct, \\ h\left(t - \frac{x}{c}\right) & \text{si } x < ct. \end{cases}$$

$$12.4.2. u(x, t) = \begin{cases} \cos x \cos ct & \text{si } x < -ct, \\ e^{-(t+x/c)} + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} ct & \text{si } 0 > x > -ct. \end{cases}$$

$$12.4.6. u(x, t) = \begin{cases} 0 & x > ct, \\ -c \int_0^{t-x/c} h(\bar{t}) d\bar{t} & x < ct. \end{cases}$$

$$12.4.7. u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] & \text{si } x > ct, \\ \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(ct-x)] - c \int_0^{t-x/c} h(\bar{t}) d\bar{t} & \text{si } x < ct. \end{cases}$$

$$12.5.1. \text{ (b) } u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)].$$

$$12.6.1. \text{ (a) } \rho(x, t) = f(x).$$

$$12.6.1. \text{ (c) } \rho(x, t) = f(x)e^{-3ct}.$$

$$12.6.2. \rho(x, t) = (1 + \operatorname{sen} x)e^{t+x/2}.$$

12.6.3. (a) $\rho(x, t) = \text{sen}(x - c_0 t)$.

12.6.3. (b) $\rho(x, t) = \begin{cases} g\left(t - \frac{x}{c_0}\right) & x < c_0 t, \\ f(x - c_0 t) & x > c_0 t. \end{cases}$

12.6.4. (a) $q = u_{\text{máx}} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{máx}}}\right)$.

12.6.4. (b) $\rho = \rho_{\text{máx}}/2$, $u = \frac{u_{\text{máx}}}{2}$, $q = \frac{\rho_{\text{máx}} u_{\text{máx}}}{4}$.

12.6.8. (a) $\rho(x, t) = \frac{e^{-3(x-ct)}}{3c} (1 - e^{-3ct}) + f(x - ct)$.

(c) $\rho(x, t) = 5t + f\left(x - \frac{1}{2}t^2\right)$.

(e) $\rho(x, t) = e^{-t} f\left(x + \frac{1}{3}t^3\right)$.

(g) $\rho(x, t) = \frac{1}{2}t^2 + f(xe^{-t})$.

12.6.9. (a) $\rho(x, t) = e^{3t} f(x_0)$, donde $x = x_0 - \frac{1}{6}(e^{6t} - 1) f^2(x_0)$.

12.6.9. (c) $\rho(x, t) = e^{-t} f(x_0)$, donde $x = x_0 + f(x_0) \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$.

12.6.11. $u(x, t) = \begin{cases} e^{3t} f\left(x - t - \frac{t^2}{2}\right) & x > t + \frac{t^2}{2}, \\ e^{3(t-\tau)} g(\tau) & \text{donde } x = t + \frac{t^2}{2} - \frac{3}{2}\tau - \frac{\tau^2}{2}, x < t + \frac{t^2}{2}. \end{cases}$

12.6.14. (a) $-V f' + u_{\text{máx}} \left(1 - \frac{2f}{\rho_{\text{máx}}}\right) f' = v f''$.

12.6.14. (c) $V = \frac{[q]}{[\rho]} = u_{\text{máx}} \left(1 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_{\text{máx}}}\right)$.

12.6.17. (a) $\rho(x, t) = \begin{cases} \frac{\rho_{\text{máx}}}{5} & x < u_{\text{máx}} t/5, \\ \frac{3\rho_{\text{máx}}}{5} & x > u_{\text{máx}} t/5. \end{cases}$

12.6.18. (b) $\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_1 & x < u_{\text{máx}} \left(1 - 3 \frac{\rho_1^2}{\rho_{\text{máx}}^2}\right) t, \\ \frac{\rho_{\text{máx}}}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{x}{u_{\text{máx}} t}} & \text{en otro caso,} \\ \rho_2 & x > u_{\text{máx}} \left(1 - \frac{3\rho_2^2}{\rho_{\text{máx}}^2}\right) t. \end{cases}$

13.2.4. $\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\bar{t}) d\bar{t} \right] = \frac{F(s)}{s}$.

13.2.5. (b) $\frac{8s}{(s^2+16)^2}$.

(d) $\frac{4}{s^2-6s+25}$.

(f) $e^{-5s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{10}{s^2} + \frac{25}{s}\right) - e^{-8s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{16}{s^2} + \frac{64}{s}\right)$.

(h) $\frac{24e^{-s}}{s^5}$.

13.2.6. (e) $\frac{7}{6}e^{-7t} - \frac{1}{6}e^{-t}$.

$$(j) \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t - \frac{2}{9} \cos 3t - 5H(t-4) \left[\frac{2}{9} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3(t-4) - \frac{2}{9} \cos 3(t-4) \right].$$

$$13.2.7. (b) y = 1 + e^{-t}.$$

$$(d) y = \begin{cases} \frac{25}{7}e^t - \frac{4}{7}e^{-6t} & 0 < t < 3, \\ -\frac{1}{10}e^{-t} + e^t \left(\frac{25}{7} + \frac{1}{14}e^{-6} \right) + e^{-6t} \left(\frac{1}{35}e^{15} - \frac{4}{7} \right) & t > 3. \end{cases}$$

$$(f) y = \frac{1}{3} \operatorname{sen} t - \frac{1}{6} \operatorname{sen} 2t.$$

$$13.3.2. G(t, t_0) = \operatorname{sen}(t - t_0).$$

$$13.4.3. u(x, t) = \operatorname{sen} x \cos ct.$$

$$13.4.4. \bar{U}(x, s) = F(s)e^{-\sqrt{s/k}x}.$$

$$13.5.3. \bar{U}(x, s) = \frac{cB(s) \operatorname{senh} sx/c}{s \cosh sL/c}.$$

$$13.6.4. (a) \bar{G}(x, s; x_0, t_0) = \frac{e^{-st_0}}{\sqrt{sk}} \begin{cases} e^{-\sqrt{s/k}x_0} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k}}x & x < x_0, \\ e^{-\sqrt{s/k}x} \operatorname{senh} \sqrt{\frac{s}{k}}x_0 & x > x_0. \end{cases}$$

$$13.7.1. (b) f(t) = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3t.$$

$$13.8.1. u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L}, \text{ donde } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx.$$

$$14.2.1. (c) \omega = -k^2.$$

$$14.2.5. \omega^2 = gk \tanh kh.$$

$$14.2.7. \omega^2 = g|k|.$$

$$14.3.9. (a) \text{ Sean } k = \omega_f^{1/3} \text{ y } s = \operatorname{sign}(\omega_f). G(x, 0) = \frac{1}{3}(is\sqrt{3} + 1)e^{-ikx/2 + \sqrt{3}|k|x/2}, \\ \text{ para } x < 0; G(x, 0) = \frac{2}{3}e^{ikx} + \frac{1}{3}(is\sqrt{3} - 1)e^{-ikx/2 - \sqrt{3}|k|x/2}, \text{ para } x > 0.$$

$$14.5.3. (b) \text{ Dos ondas si } x > -\frac{1}{4}t \text{ y ninguna onda si } x < -\frac{1}{4}t.$$

$$14.6.1. k = k_0 \text{ y } \omega = \omega(k_0).$$

$$14.7.8. 2B = Cu + 2B_0, 8A = -Cu_{xx} + 3Cu^2 + 4B_0u + 8A_0, 2u_t = -A_{xxx} + 4uA_x + 2Au_x.$$

$$14.8.6. (b) \sigma = -1 + Rk^2 - k^4, \omega = k^3.$$

$$14.8.7. (c) \sigma = k, \omega = 0 \text{ mal propuesto, ya que } \sigma \rightarrow \infty \text{ cuando } k \rightarrow +\infty.$$

$$14.9.3. \psi = \text{constante y } 2\omega \frac{dr}{dT} + \frac{d\omega}{dT}r + 3\omega^3 r^3 = 0.$$

$$14.9.5. u = cL^{-3/4} \cos \left(\int \sqrt{\frac{g}{L(\epsilon t)}} dt + \psi \right).$$

$$14.9.8. k = \theta_x, \omega = -\theta_t, k_T + 3k^2 k_X = 0, u_0 = Ae^{i\theta} + (*), A_T + 3k^2 A_X + 3kk_X A = 0.$$

14.10.3. Exterior $u_0 = -\frac{x}{4}$. Interior (derecha) $U_0 = -\frac{1}{4} + \frac{9}{4}e^{2X}$, donde $x - 1 = \varepsilon^{1/2}X$.
Interior (izquierda) $U_0 = e^{-2X}$, donde $x = \varepsilon^{1/2}X$.

14.10.6. Exterior $u_0 = 6(2x + 1)^{-1}$. Interior $U_0 = 6 - 5e^{-X}$, donde $x = \varepsilon X$.

Apéndice

	Sturm-Liouville	Helmholtz (bidimensional)
Problema de autovalores	$\frac{d}{dx} \left(p \frac{d\phi}{dx} \right) + (\lambda\sigma + q)\phi = 0$	$\nabla^2 \phi + \lambda\phi = 0$
Operador	$L = \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} \right) + q$	$L = \nabla^2$
Fórmula de Green	$\int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx = p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big _a^b$	$\iint [uL(v) - vL(u)] dx dy$ $= \oint (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \hat{n} ds$
Cociente de Rayleigh	$\lambda = \frac{-p\phi \frac{d\phi}{dx} \Big _a^b + \int_a^b \left[p \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - q\phi^2 \right] dx}{\int_a^b \phi^2 \sigma dx}$	$\lambda = \frac{-\oint \phi \nabla \phi \cdot \hat{n} ds + \iint \nabla \phi ^2 dx dy}{\iint \phi^2 dx dy}$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

	$f(t)$	$F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
Funciones elementales (Ejercicios 13.2.1 y 13.2.2)	1 $t^n (n > -1)$ e^{at} $\text{sen } \omega t$ $\text{cos } \omega t$ $\text{sinh } at = \frac{1}{2} (e^{at} - e^{-at})$ $\text{cosh } at = \frac{1}{2} (e^{at} + e^{-at})$	$\frac{1}{s}$ $n!s^{-(n+1)}$ $\frac{1}{s-a}$ $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a} \right) = \frac{a}{s^2-a^2}$ $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) = \frac{s}{s^2-a^2}$
Propiedades fundamentales (Sección 13.2.3 y Ejercicio 13.2.3)	$\frac{df}{dt}$ $\frac{d^2f}{dt^2}$ $-tf(t)$ $e^{at}f(t)$ $H(t-b)f(t-b)$	$sF(s) - f(0)$ $s^2F(s) - sf(0) - \frac{df}{dt}(0)$ $\frac{dF}{ds}$ $F(s-a)$ $e^{-bs}F(s) \quad (b > 0)$
Convolución (Sección 13.2.4)	$\int_0^t f(t-\bar{t})g(\bar{t}) d\bar{t}$	$F(s)G(s)$
Delta de Dirac (Sección 13.2.4)	$\delta(t-b)$	$e^{-bs} \quad (b \geq 0)$
Transformada inversa (Sección 13.7)	$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s)e^{st} ds$	$F(s)$
Miscelánea (Ejercicio 13.2.9)	$t^{-1/2}e^{-a^2/4t}$ $t^{-3/2}e^{-a^2/4t}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-a\sqrt{s}} \quad (a \geq 0)$ $\frac{2\sqrt{\pi}}{a}e^{-a\sqrt{s}} \quad (a > 0)$

TRANSFORMADA DE FOURIER

$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x} d\omega$	$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx$	Referencia
$e^{-\alpha x^2}$ $\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-x^2/4\beta}$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}}e^{-\omega^2/4\alpha}$ $e^{-\beta\omega^2}$	Gaussiana (Sección 10.3.3)
$\frac{\partial f}{\partial t}$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial F}{\partial t}$ $-i\omega F(\omega)$ $(-i\omega)^2 F(\omega)$	Derivadas (Sección 10.4.2)
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{x})g(x - \bar{x})d\bar{x}$	$F(\omega)G(\omega)$	Convolución (Sección 10.4.3)
$\delta(x - x_0)$	$\frac{1}{2\pi} e^{i\omega x_0}$	Delta de Dirac (Ejercicio 10.3.18)
$f(x - \beta)$	$e^{i\omega\beta} F(\omega)$	Teorema de desplazamiento (Ejercicio 10.3.5)
$xf(x)$	$-i \frac{dF}{d\omega}$	Multiplicación por x (Ejercicio 10.3.8)
$\frac{2\alpha}{x^2 + \alpha^2}$	$e^{- \omega \alpha}$	Ejercicio 10.3.7
$f(x) = \begin{cases} 0 & x > a \\ 1 & x < a \end{cases}$	$\frac{1}{\pi} \frac{\text{sen } a\omega}{\omega}$	Ejercicio 10.3.6

TRANSFORMADA DE FOURIER DOBLE O BIDIMENSIONAL

$f(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega \cdot \mathbf{r}} d\omega_1 d\omega_2$	$F(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r})e^{i\omega \cdot \mathbf{r}} dx dy$	Referencia
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ $\nabla^2 f$	$-i\omega_1 F(\omega), -i\omega_2 F(\omega)$ $-\omega^2 F(\omega)$	Derivadas (Sección 10.6.5)
$\frac{\pi}{\beta} e^{-\mathbf{r}^2/4\beta}$	$e^{-\beta\omega^2}$	Gaussiana (Sección 10.6.5)
$f(\mathbf{r} - \beta)$	$e^{i\omega \cdot \beta} F(\omega)$	Ejercicio 10.6.8
$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}_0)g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dx_0 dy_0$	$F(\omega)G(\omega)$	Convolución (Ejercicio 10.6.7)

TRANSFORMADA DE FOURIER EN SENOS

$f(x) = \int_0^{\infty} F(\omega) \operatorname{sen} \omega x \, d\omega$	$S[f(x)] = F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \omega x \, dx$	Referencia
$\frac{df}{dx}$ $\frac{d^2 f}{dx^2}$	$-\omega C[f(x)]$ $\frac{2}{\pi} \omega f(0) - \omega^2 F(\omega)$	Derivadas (Sección 10.5.4)
$\frac{x}{x^2 + \beta^2}$	$e^{-\omega\beta}$	Ejercicio 10.5.1
$e^{-\epsilon x}$ 1	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega}{\epsilon^2 + \omega^2}$ $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega}$	Ejercicio 10.5.2 Ejercicio 10.5.9
$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\bar{x}) [g(x - \bar{x}) - g(x + \bar{x})] \, d\bar{x}$ $= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\bar{x}) [f(x + \bar{x}) - f(\bar{x} - x)] \, d\bar{x}$	$S[f(x)]C[g(x)]$	Convolución (Ejercicio 10.5.6)

TRANSFORMADA DE FOURIER EN COSENOS

$f(x) = \int_0^{\infty} F(\omega) \cos \omega x \, d\omega$	$C[f(x)] = F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx$	Referencia
$\frac{df}{dx}$ $\frac{d^2 f}{dx^2}$	$-\frac{2}{\pi} f(0) + \omega S[f(x)]$ $-\frac{2}{\pi} \frac{df}{dx}(0) - \omega^2 F(\omega)$	Derivadas (Sección 10.5.4)
$\frac{\beta}{x^2 + \beta^2}$	$e^{-\omega\beta}$	Ejercicio 10.5.1
$e^{-\epsilon x}$	$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \omega^2}$	Ejercicio 10.5.2
$e^{-\alpha x^2}$	$2 \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} e^{-\omega^2/4\alpha}$	Ejercicio 10.5.3
$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} g(\bar{x}) [f(x - \bar{x}) + f(\bar{x} + x)] \, d\bar{x}$	$F(\omega)G(\omega)$	Convolución (Ejercicio 10.5.7)

Índice alfabético

«Función» delta (véase delta de Dirac)

A

Ablowitz, M. J., 696, 717, 753
Abramowitz, M., 241, 228, 337, 342, 753
Accidentes de aviación (véanse también sustentación y arrastre) 394
Accidentes, 394
Acción de la onda, 736
Acheson, D. J., 83.753
Acotación, 79
Acústica, 292
Adjunto, 186, 433
Aislado, 2, 10-12, 25
Aislamiento, 10-13
 imperfecto, 13
Alternativa (véase alternativa de Fredholm)
Alternativa de Fredholm, 433-435, 440-441, 446-447, 569, 723
Altura del sonido, 151
Ames, W. F., 753
Análisis de estabilidad de Fourier-von Neumann, 247-254
Ángulo azimutal, 551
Antman, A. A., 142, 753
Aproximaciones:
 casi monocromáticas, 688-690
 cuadráticas, 236
 de funciones, 50, 311
 de la primera derivada, 237-238
 de las derivadas parciales, 240-241
 de las derivadas segundas, 239
 del problema de autovalores de Sturm-Liouville, 228-234
 desarrollos asintóticos, 738, 744
 lineales, 236
 polinómicas, 236
Arco iris, 684
Armónicos esféricos, 362
Armónicos, 151, 152
Arrastre, 84

Autoadjunto, 186-187, 191
 operador, 460
Autofunciones, 43-47, 71-72
 (véase también desarrollo en autofunciones)
 bidimensionales, 299-302, 388
 ceros, 173-174, 217-218
 complejas, 476
 curvas nodales, 309
 diferenciación, 376-381
 discretas, 250, 264
 ecuaciones en diferencias parciales, 248-250
 longitud, 232
 no únicas, 189-191
 ortogonales, 50-52, 172, 175-176, 187-188, 264, 306-312, 314-316
 ortogonalidad discreta, 64, 250, 264
 problema homogéneo relacionado, 377, 388
 sistema completo, 172, 184, 197, 307
 únicas, 189-191
Autovalor degenerado, 258
Autovalores, 43-48, 71
 (véanse también problemas de autovalores, problema de autovalores de Sturm-Liouville)
 cero, 43, 177, 214-215, 216-217, 432-435
 cociente de Rayleigh, 176-179, 200-205
 comportamiento asintótico, 224-228
 continuos, 475
 cotas, 208-209
 cotas inferiores, 208-209
 cotas superiores, 202, 208-209
 discretos, 475
 escindidos, 470
 fórmula asintótica, 212-213
 funciones de Bessel, 338
 grandes, 224-228
 matriz, 194-200, 258
 matriz jacobiana, 705
 mínimo, 172, 173, 202, 208-209, 307, 308
 múltiples, 258, 308-309
 multiplicidades, 309
 negativos, 45-46, 178, 214, 223

no negativos, 201
 polos de la transformada de Laplace, 649
 positivos, 43-45, 177-179, 206-207, 211-214, 318-319
 principio de minimización, 201-205
 reales, 172, 173, 188-189, 198, 307, 308, 315
 técnica gráfica, 212-216
 teorema del círculo de Gershgorin, 260, 267

Autovectores, 195-200
 Gram-Schmidt, 197
 independientes, 197, 199
 matriz, 258
 ortogonales, 196

B

Bender, 226, 344, 753
 Benjamín, 717
 Benney, D. J., 753
 Berg, P. W., 12, 329, 753
 Bernoulli, Daniel, 39
 Bien propuesto, 86, 91
 Bifurcación de Hopf, subcrítica, 714
 supercrítica, 714
Bifurcación, 705
 de tipo horquilla, 705, 730
 diagrama, 703, 713-714
 Hopf, 705, 713-714
 punto, 705, 714, 718
 silla nodo, 704-705, 718
 transcítica (cambio de estabilidad), 705, 718

Birkhoff, 209
 Bleistein, N., 733, 753
 Boyce, W. E., 753
 Brillouin, 727
 Brown, J. W., 754

C

Cálculo de variaciones, 203
 Calor específico, 6-7, 10
 Cambio de estabilidad (véase transcítico)
 Campbell, 497
 Campbell, S. L., 754
 Capa límite:
 desarrollo exterior, 750
 desarrollo interior, 744, 747, 750
 espesor, 741, 743

localización, 741
 variables, 741
Capacidad calorífica, 6
 (ver también calor específico)
Capacidad, 609
Características, 550, 572-612
 de tipo abanico, 599-600
 ecuación cuasilineal, 594-612
 ecuación de ondas de primer orden, 572-578
 ecuación de ondas unidimensional, 578-585
 envolvente, 556
 intersección, 601
 reflexión, 585-591
 Carrier, G., 754
 Carslaw, H. S., 754
Cáustica, 680-686
 arco iris, 684
 con forma de pico, 683, 684
 Centro, 692
Ceros,
 de autofunciones, 173-174, 217
 de funciones de Bessel, 328, 332-333, 338-339
 de la función seno, 44
 Churchill, R. V., 329, 497, 620, 632, 754
Cilindro:
 ecuación de Laplace, 27, 344-355
 Circulación, 84-85, 91
 Clarkson, P. A., 717, 753
 Coche (véase tráfico)
 Cociente de Rayleigh, 46, 172, 176-179, 201-209, 307, 311, 317-319, 324, 344
 autovalores no negativos, 201
 funciones test, 202-205
 principio de minimización, 201-205
 Coeficiente de convección, 12
 Coeficiente de reflexión, 540, 542, 695
 Coeficiente de transferencia de calor, 12
 Coeficientes de Fourier, 95, 98, 99
 complejos, 477
 dependientes del tiempo, 265
 generalizados, 174-175, 207, 229
 Coeficientes indeterminados, 329, 392, 440
 variación de los parámetros, 390-391, 412-413
 wronskiano, 413-414
 Cole, J. D., 226, 611, 738, 755
 Compatibilidad de condición, 469-470
 ecuación de Laplace, 88
 Complejos conjugados, 188
 Completar el cuadrado, 624
 Concentraciones químicas, 9

- Condición de Bernoulli, 84
- Condición de contorno (o de frontera),
 acotación, 79
 adjunta, 559
 aislada, 438
 autoadjunta, 186-187, 191
 condición de singularidad, 170-171
 contacto térmico perfecto, 17
 de primera clase, 170
 de Robin, 170
 de segunda clase, 170
 de tercera clase, 209-224
 Dirichet, 170
 ecuación del calor, 11-14
 elástica, 146, 158, 170, 201, 209-224
 extremo fijo, 145
 extremo libre, 147, 171
 homogénea, 37-38
 homogénea asociada, 373
 ley de enfriamiento de Newton, 170, 210
 libre, 170
 mixta, 67
 Neumann, 170
 no homogénea, 424-425
 no lineal, 37
 periódica, 67, 79-80, 170, 190, 201, 293,
 321
 perturbada, 468
 Robin, 170
 singular, 170, 187, 323
 temperatura acotada, 170
- Condición de estabilidad de Courant, 272,
 273
- Condición de radiación, 664-666
- Condición de Rankine-Hugoniot, 603
- Condición de singularidad, 170-171,
 186-188
 función de Green, 452-455, 664
- Condición de solubilidad:
 ecuación de Laplace, 88
- Condición inicial:
 ecuación del calor, 9
 ley de movimiento de Newton, 9, 692
- Condiciones de contorno
 lineales, 37
 no homogéneas, 424-425
 no lineales, 37
- Condiciones de periodicidad, 79-80
- Condiciones de salto:
 funciones de Green, 420-424
- Conducción, 2, 8
- Conducción del calor:
 anillo circular, 65-71
 extremos aislados, 61-65
 ley de Fourier, 8, 9, 23, 31-33
 región arbitraria, 294-295
- Conductividad, 8
- Conductividad térmica, 8, 23
- Conservación de la acción, 727
- Conservación de la acción de la onda, 736
- Conservación de la energía térmica, 3, 4,
 5, 21, 22
- Conservación de la energía, 692
- Conservación de las ondas, 679
- Conservación del número de vehículos,
 596-597, 609
- Consistente, 238, 244
- Constante de Euler, 342
- Constante de separación, 40
 segunda, 298-300
- Contacto térmico, 14, 148
- Contacto térmico perfecto, 14, 66, 79, 148,
 170
 perfecto, 170
- Contaminantes, 739, 745
- Convección, 2, 12, 28, 177, 498, 739, 744
- Convergencia:
 en media, 232, 307, 311
 Iteración, 275-282
 método numérico, 252-253
- Coordenadas cilíndricas, 26
- Coordenadas curvilíneas ortogonales, 30
 divergencia, 31
 factor de escala, 30
 gradiente, 31
 laplaciano, 31
- Coordenadas esféricas, 27-28, 355, 551
 diferencial de superficie, 552
 diferencial de volumen, 551-552
- Coordenadas polares, 28, 77, 320, 520
- Cordón de teléfono extensible, 152
- Cosenos:
 ortogonalidad, 64-65
 teorema, 459
- Courant, R., 209, 272, 754
- Crank, 262
- Cuasilineal, 594-612
- Cuerda vibrante, 141-155, 571
 (véase también ecuación de ondas)
 amortiguada, 154
 armónicos, 152
 condición de contorno elástica, 146
 condición de salto, 148
 condiciones de contorno, 145-148
 deducción, 141-145
 densidad de masa, 142

ecuación de ondas, 144
 energía, 155
 estiramiento local, 144
 extremo fijo, 143, 148-155
 extremo libre, 147
 forzamiento dependiente del tiempo, 394-395
 frecuencia, 151, 208-209
 frecuencia mínima, 209
 frecuencias circulares, 151
 frecuencias naturales, 151
 fricción, 394
 fuerza desestabilizadora, 210
 golpe (martillo), 581
 gravedad, 144
 ley de Newton, 142-143
 longitud finita, 591-593, 636-642, 648-650
 modo fundamental, 151
 modos normales, 151
 no uniforme, 170, 206-209
 nodos, 151-152
 ondas estacionarias, 151
 ondas viajeras, 152, 513
 perfectamente elástica, 143
 perfectamente flexible, 143
 reflexiones, 585-589
 resonancia, 394
 semiinfinita, 585-589, 632-634
 sistema masa-resorte, 145-148
 tensión, 143-144
 transformada de Fourier, 512
 variaciones de masa, 471
 Cuerdas (véase cuerdas vibrantes)
 Cuerdas elásticas
 (véase cuerdas vibrantes)
 Curva de estabilidad neutra, 653, 708
 Curva normal (ver gaussiana)
 Curvas nodales, 300, 309, 338-339

D

D'Alambert, 548-550, 578, 582, 592
 Datos de scattering, 695
 Davis, P. J., 241
 De variación lenta:
 amplitud, 225-226
 frecuencia, 225
 medios, 730-733
 ondas dispersivas, 733
 periodo, 225
 tren de ondas, 678, 736
 Delta de Dirac, 417-419, 486
 fórmula de Green, 430-431
 función de Green, 540, 547

multidimensional, 443-444
 transformada de Fourier, 487, 497, 547
 transformada de Laplace, 621, 626, 630-631
 Dennemeyer, R., 754
 tráfico, 596
 velocidad de onda, 598
 Densidad de energía espectral, 496
 Densidad de masa, 7
 cuerda vibrante, 141
 Dependencia continua, 87
 Derivada convectiva, 745
 Derivada:
 (véase también diferenciación)
 direccional, 25, 31, 450
 material, 573
 normal, 25, 450
 Desarrollo en autofunciones, 127-132, 376-404, 650
 (véase también autofunciones)
 desarrollo en autovectores, 259
 funciones de Green, 415-416, 445-447, 567-568
 problemas no homogéneos, 132
 transformada de Laplace, 648-651
 Desarrollo en autovectores, 197-200, 259
 Desarrollo:
 (véase desarrollo en autofunciones y desarrollo perturbativo)
 asintótico, 738, 744
 conexión, 744, 749
 exterior, 742, 745, 764, 749-750
 interior, 742, 750
 Desarrollos asintóticos, 739, 744
 Desigualdad de Bessel, 232
 Desigualdad de Buniakovsky, 58
 Desigualdad de Cauchy, 58
 Desigualdad de Schwarz, 58, 234
 Desviación:
 cuadrática media, 229-231
 Diagrama de fase unidimensional, 718, 730
 Diferenciación:
 autofunciones, 376-381, 388-389, 415-416
 serie de Fourier, 121-132
 término a término, 128
 transformada de Fourier, 492-494, 502-505
 transformada de Laplace, 621, 624
 Diferencias centradas, 238, 243
 Diferencias progresivas, 237
 Diferencias retrógradadas, 237
 Difracción,
 teoría geométrica, 733

- Difusión del calor, 9
 Difusión, 9, 490
 contaminante, 739, 745
 Difusividad, 9
 Difusividad térmica, 9, 24
 Dinámica de gases, 602
 DiPrima, R. C., 753
 Dirac, Paul, 418
 Discontinuidad de salto, 94
 (ver también fenómeno de Gibbs)
 Discontinuidades:
 propagación, 235
 Discretización en el tiempo, 243
 Distribución de probabilidad binomial, 254
 Divergencia, 22
 regla del producto, 318
 Dominio de dependencia, 583, 584
 Dominio de influencia, 583-584
 Douglas, 281
 Drazin, P. G., 754
 Duff, G. F., 754
- E**
- Eckhaus, 718
 Ecuación cúbica, 683
 Ecuación de Burgers, 610
 Ecuación de Cauchy, 81, 325
 (véase también ecuación equidimensional)
 Ecuación de difusión, 9, 24, 491, 746
 (véase también ecuación del calor)
 Ecuación de Euler, 81, 325
 (véase también ecuación equidimensional)
 Ecuación de Ginzburg-Landau, 712
 compleja linealizada (GLCL), 710-712
 compleja no lineal, (GLC), 712, 716
 Ecuación de Hamilton-Jacobi, 679
 Ecuación de Helmholtz, 306
 función de Green, 463
 no homogénea, 428, 463
 Ecuación de Klein-Gordon, 699
 Ecuación de Korteweg-de Vries (KdV), 699
 linealizada, 499, 656, 689
 Ecuación de Korteweg-de Vries
 linealizada, 499, 656, 689-690
 Ecuación de Kuramoto-Sivashinsky, 707
 Ecuación de la envolvente, 668-694
 Ecuación de Landau, 730
 Ecuación de Landau-Ginzburg (ver ecuación de Ginzburg-Landau)
 Ecuación de Laplace, 26, 29, 73-92, 316
 anillo circular, 90
 banda semiinfinita, 91
 cavidad esférica, 363
 ceros del denominador, 621-624
 cilindro, 304, 345-355
 cilindro circular, 344-355
 círculo, 464
 condición de compatibilidad, 88
 condición de solubilidad, 88, 91
 convolución, 621, 626-629, 634, 636
 coordenadas esféricas, 355
 cuadrante, 521-523
 cuarto de círculo, 89, 533
 definición, 620-621
 delta de Dirac, 621, 626
 derivadas, 624-625
 desarrollo en autofunciones, 649-680
 diferencias finitas, 274-281
 disco circular, 78-83, 89
 discretización, 275-281
 ecuación de ondas, 632-642
 ecuaciones diferenciales (ordinarias), 625, 629-631
 elíptica, 235
 fracciones simples, 622-623
 función de Green, 442-465, 519, 524, 629-631, 639-642
 integrales de línea, 643-651
 inversión (integral de línea), 643-649
 no homogénea (ver ecuación de Poisson)
 polos, 623-624, 694
 polos simples, 623-624
 principio del máximo, 86-87
 principio del mínimo, 87
 propiedad de singularidad, 621-624
 propiedades cualitativas, 86-88
 propiedades elementales, 621-629
 radial, 454
 rectángulo, 73-78, 88, 91
 semibanda, 513-517
 semicírculo, 89
 semiplano, 518-521
 separación de variables, 650
 serie de Fourier de senos, 515
 tabla, 621
 teorema del valor medio, 86
 transformada de Fourier, 518-521, 643-644
 transformada de Fourier doble, 532
 transformada de Fourier en cosenos, 522-523
 transformada de Fourier en senos, 517-519, 524
 transformada de Laplace, 430, 619-651

- transformada de Laplace inversa, 620-621
 tridimensional, 303
 unicidad, 87
Ecuación de Lax, 694, 701
Ecuación de ondas reducida, 731
Ecuación de ondas:
 condición de estabilidad de Courant, 272
 de primer orden, 572-576
 diferencias finitas, 270-273
 dominio de dependencia, 583
 en dos dimensiones, 156-158, 292, 296-302, 320-344, 463, 554-557
 (véase también membrana vibrante)
 en toda la recta, 511-513, 548-557, 579-582
 fuente periódica, 554
 fuente puntual, 556
 fuentes independientes del tiempo, 375
 función de Green, 410, 422, 463, 539-557, 639-642
 funciones impares, 588
 funciones impares periódicas, 593
 hiperbólica, 235
 invariancia de la forma, 576
 longitud finita, 591-594
 método de descenso, 556
 método de las características, 550, 572
 métodos numéricos, 270-274
 no homogénea, 541
 no lineal (véase cuasilineal)
 onda que se propaga alejándose, 428, 447
 ondas viajeras, 152, 513
 principio de Huygens, 553
 radial, 585
 rango de influencia, 583
 reflexiones, 585-594
 semiinfinita, 585-591, 632-635
 separación de variables, 149-150
 serie de Fourier, 593-594
 transformada de Fourier, 511-513, 547-548
 transformada de Laplace, 642, 650
 tridimensional, 292, 463, 550-557
 unidimensional, 144, 148-155, 428, 549, 554, 557, 578-594
 (véase también cuerda vibrante)
 velocidad de propagación, 491
Ecuación de Poisson, 26, 396-404
 alternativa de Fredholm, 446-447
 banda infinita, 465
 condiciones de contorno no homogéneas, 449-456
 dominio acotado, 454
 en el semiplano, 454-455, 465
 en la esfera, 464
 en todo el espacio, 451-453
 en un círculo, 457-459, 464
 en un rectángulo, 446-448, 461, 474
 en un semicírculo, 464
 en una región con forma de cuña, 664
 función de Green, 443-465, 665-667
 función de Newmann, 447
 unicidad, 90
Ecuación de Schrödinger, 688
 lineal,
 no lineal, 716
 recurrencia, 717
Ecuación de Sine-Gordon, 699
Ecuación de transporte, 732-733
Ecuación del calor, 9, 24
 (ver también fluido de calor)
 retrógrada, 90, 710
 circular, 335
 simetría circular, 335
 conducción, 2
 teorema de convolución, 495-496
 cilindro, 355
 deducción (en dos o tres dimensiones), 20-33
 difusión, 491
 doble transformada de Fourier, 524-532
 método de diferencias finitas, 242-270
 región acotada, 567-570
 serie de Fourier de senos,
 transformada de Fourier, 487-495, 564-565
 funciones de Green, 405-412, 488, 557-570, 641-643
 condiciones de contorno homogéneas, 373-381
 dominio no acotado, 473-477, 487-496, 564-565
 función de influencia, 479-480, 507, 529
 condición inicial, 10
 extremos aislados, 61-65
 transformada de Laplace, 635-636, 638-639, 641-642
 varilla larga, 568
 propiedades térmicas no constantes, 315
 no homogénea, 131
 métodos numéricos, 242-270
 unidimensional, 410-412
 parabólica, 235
 calentamiento periódico (diario o estacional), 510

- en el plano, 524-529
- soluciones producto, 48-49
- velocidad de propagación, 245
- anillo, 65-71
- semicírculo, 335
- semiinfinita, 500-501, 505-511, 566-568
- variable de semejanza, 490
- tiempos pequeños, 567-568
- fuentes estacionarias, 372
 - (ver también ecuación de Poisson)
- tridimensional, 303
- fuentes dependientes del tiempo, 375
- bidimensional, 267-269, 294-296, 302
- extremos a temperatura nula, 38-54
- deducción (en una dimensión), 2-11
- condiciones de contorno, 11-14
- convección, 2, 12
- Ecuación diferencial de Airy, 738
 - (véase también función de Airy)
- Ecuación diferencial de Bessel, 324-326, 332
 - (véase también funciones de Bessel)
 - de orden cero, 332
- Ecuación diferencial de Sturm-Liouville:
 - no homogénea, 415-416
- Ecuación eikonal, 679, 733, 738
- Ecuación en diferencias (ordinarias)
 - de primer orden, 255-256
 - de segundo orden, 256-257
 - oscilación, 256
 - oscilación convergente, 256
 - oscilación divergente, 265
 - soluciones analíticas, 254-255
- Ecuación en diferencias parciales, 243-245, 248
 - autofunciones, 249-250
 - ecuación de Laplace, 274-282
 - paseo aleatorio, 253
 - separación de variables, 249, 254-255
 - soluciones producto, 249-250
- Ecuación equidimensional, 81, 179, 325, 341
- Ecuación indicial, 325, 341
- Ecuación integral de
 - Gelfand-Levitan-Marchenko, 695, 700
- Ecuación KdV modificada, 699
- Ecuación lineal en derivadas parciales, 36
- Ecuación no homogénea, 37
- Ecuación potencial, 26
 - (véase también ecuación de Laplace)
- Ecuación:
 - homogénea, 37
 - lineal, 36
 - no homogénea, 37
- Ecuaciones diferenciales lineales:
 - con coeficientes constantes, 41
- Ecuaciones en derivadas parciales elípticas, 235
- Ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas, 235
- Ecuaciones en derivadas parciales no lineales, 36
 - (ver también cuasilineal)
- Ecuaciones en derivadas parciales parabólicas, 235
- Ecuaciones en derivadas parciales, 1
 - (ver también ecuación del calor, ecuación de Laplace, ecuación de Poisson, ecuación de ondas, separación de variables, transformada de Fourier, transformada de Laplace)
- Ecuaciones en diferencias parciales de primer orden no lineales, 612
- Eliminación gaussiana, 275
- Energía cinética, 692
- Energía media, 52
- Energía potencial, 692
- Energía térmica (véase también energía calorífica)
 - densidad, 2-6
 - fuentes estacionarias, 372
- Energía térmica, 2-3, 4-5, 8, 20
 - conservación de, 3, 4, 5, 21, 22
 - fuentes, 4, 9
 - total, 5
- Energía:
 - (véase también energía térmica)
 - cinética, 692
 - conservación, 692, 727
 - cuerda vibrante, 154-155
 - espectral, 496
 - media, 52
 - potencial, 692
- Envolvente:
 - características, 604-606
 - onda, 226
- Equilibrio, 14-20, 703
 - desplazamiento del, 370-372
 - estable, 718
 - inestable, 718
- Error de discretización, 243
 - (véase también error de truncamiento)
- Error de truncamiento, 236, 262
- Error, 229-234
 - cuadrático medio, 229, 311
 - de truncamiento, 236, 243

- puntual, 232
 Escalas múltiples, 226, 734, 737-738
 Espectro:
 continuo, 475, 533
 discreto, 475, 533
 Esquema Crank-Nicolson, 262
 Esquema numérico inestable, 251
 Estable:
 esquema numérico, 251
 Estacionario, 15-16
 Estado estacionario, 25-26
 aproximación al, 53
 distribución de temperaturas (véase también ecuación de Laplace), 14-15, 86
 Estiramiento de una cuerda vibrante, 142
 Explícito, 263
 Extensión impar, 101-103, 503, 593
 Extensión periódica impar, 593
 Extensión periódica, 94
 Extremo libre, 147
- F**
- Factor integrante, 379
 Fase de oscilación, 225-226
 Fase estacionaria, 671-676
 Feir, 717
 Fenómeno de Gibbs, 105-108
 Ferguson, W. E., 756
 Feshbach, H., 755
 Fibra óptica, 653, 667
 Flexible (véase cuerda vibrante)
 Flujo (véanse flujo de calor, flujo de tráfico)
 Flujo de calor, 8, 11, 316
 (ver también ecuación del calor)
 anillo circular, 169
 círculo, 169
 condición de contorno no física, 218-221
 condiciones de contorno no homogéneas, 369-376
 convección, 177
 radial, 168-169
 reacción endotérmica, 166
 reacción exotérmica, 166
 temperatura de equilibrio, 14-20, 370
 varilla no uniforme, 170, 179-183, 206-209
 Formación de patrones, 707
 Fórmula de Euler, 105
 Fórmula de Green, 185-188, 312-313, 384, 420-421, 436, 485
 algebra lineal, 195-196
 bidimensional, 399-400
 delta de Dirac, 430
 discreta, 264
 laplaciano, 444, 541
 multidimensional, 388-389
 operador adjunto, 559
 operador de ondas, 541
 operador de Sturm-Liouville, 541
 operador del calor, 559
 operador del calor adjunto, 559
 Fórmula de Kirchoff, 556
 Fórmula de Poisson, 89, 460, 464
 Fórmulas asintóticas:
 autovalores, 212-214
 funciones de Bessel, 326-327, 336-338
 Forzamiento periódico, 391-394
 Foster, R. M., 497
 Fourier, Joseph, 8, 93
 Fracciones simples, 622-625
 Frecuencia de corte, 662, 665
 Frecuencia de forzamiento:
 membrana, 392-394
 Frecuencia, 151
 de variación lenta, 225
 espacial, 476
 local, 225
 membrana, 391-394
 perturbada, 467
 Frecuencias circulares, 151
 Frecuencias naturales, 151
 membrana, 392-394
 Fuente concentrada, 419, 429, 630
 Fuente dipolo, 450, 457
 Fuente:
 (véase también imágenes)
 concentrada, 418
 de energía térmica, 2-5
 dipolo, 450
 Fuentes de energía térmica, 9
 Fuerza restaurada, 48, 336
 Función de Airy, 498
 Función de corriente, 83, 91
 Función de error complementaria, 491
 Función de error, 491
 Función de Green, 234, 405
 (ver también función de Green)
 adjunta, 561
 alternativa de Fredholm, 438, 446-447, 467, 470
 alternativa modificada, 439
 banda infinita, 465
 causalidad, 540, 544, 557, 631
 círculo, 457-460
 condiciones de contorno no homogéneas, 424-425, 449-450

- condiciones de salto, 421-423
 de fuente variable, 543-545, 560-561
 de todo el espacio, 451-465
 delta de Dirac, 417-419
 derivada normal, 450, 563
 desarrollo en autofunciones, 415-416, 445-449
 discreta, 264
 dominios acotados, 454
 ecuación de Helmholtz, 428, 463
 ecuación de Laplace, 443-465, 519-520, 524
 ecuación de ondas, 428, 539-557, 639-642
 ecuación de Poisson, 443-465
 ecuación del calor, 406-412, 488, 557-570
 ecuación del calor en el estado estacionario, 410-442
 ecuaciones diferenciales, 410-442
 en todo el espacio, 451-465, 546-556, 564-569
 esfera, 465
 fuente imagen, 524
 función de Newmann, 439, 447
 lapso de tiempo, 540
 matriz, 266
 método de las imágenes, 454-460, 458-569
 modificada, 431-442, 462
 problema de valores iniciales (EDO), 629-631
 problemas dependientes del tiempo, 539-570
 problemas independientes del tiempo, 405-472
 propiedad de traslación, 540, 558, 631
 reciprocidad, 421, 542-544, 561
 reciprocidad de Maxwell, 420
 (véase también reciprocidad),
 rectángulo, 461, 465
 región en forma de cuña, 464
 respuesta, 421
 semibanda, 465
 semicírculo, 464
 semiinfinito, 566
 semiplano, 454-457
 serie de Fourier de senos, 416
 simetría, 412, 414, 416, 421-423, 445
 (ver también reciprocidad)
 simétrica, 561
 singularidad, 452-454
 Sturm-Liouville, 415
 transformada de Fourier, 457, 547
 transformada de Laplace, 630-631, 640-642
 variación de los parámetros, 412-415
 Función de Green, 410-442
 Función de Newmann, 439, 447
 Función de salto (unidad de heaviside), 418-419, 549
 Función elíptica, 700
 Función paso (véase Heaviside)
 Función suave a trozos, 93
 Función test, 202-205, 342
 Funciones de Bessel esféricas, 366
 Funciones de Bessel, 326-344, 348, 388, 415, 463, 485, 533
 (véase también series de Fourier-Bessel)
 ceros, 328, 332, 338-339
 de argumento imaginario, 350
 de orden cero, 328, 332
 de primera especie, 326
 de segunda especie, 326
 esféricas, 364
 fórmulas asintóticas, 337-338
 integrales de normalización, 329
 modificadas, 351-354
 ortogonalidad, 329-332
 propiedades cualitativas, 336-338
 representación en serie, 339-342
 Funciones de Green modificadas, 431-442, 462
 Funciones de influencia, 407-412
 (ver también función de Green)
 condiciones de contorno, 637-638
 ecuación del calor, 487-528
 Funciones de Legendre asociadas, 362-365
 Funciones elípticas jacobianas, 700
 Funciones hiperbólicas, 45-46, 214-215
 fórmula de adición, 448
 Funciones impares, 70, 100, 494, 593
 Funciones pares, 70, 110-112, 503
 Funciones seno:
 autofunciones, 43-47
 media cuadrática, 52
 ortogonales, 50-52
 Funciones test, 285-286
 Funciones:
 longitud, 232
- ## G
- Garabedian, P. R., 754
 Gardner, C. S., 754
 Gartland, E.C., Jr., 227

Gaussiana, 480-483, 488-490, 497, 565
 bidimensional, 529
 transformada de Fourier, 480-484
 transformada de Fourier doble, 529
 Gelfand, I. M., 754
 Glendinning, P., 701, 754
 Gradiente, 32-33
 fuente, 450-452
 Green (ver Liouville-Green)
 Greenberg, M. D., 754
 Greene, J. M., 754
 Guckenheimer, J., 754

H

Haberman, R., 597, 754
 Hilbert, D., 755
 Hildebrand, F.B., 755
 Holmes, P., 755

I

Identidad de Lagrange, 185, 189, 312
 forma diferencial, 185
 forma integral, 185-186
 Identidad de Parseval, 231-233
 transformada de Fourier, 496-497
 Implícito, 263
 Índice de refracción, 731
 Inestabilidad de Benjamin-Feir, 717
 Inestabilidad numérica, 235-289, 251-252
 sistemas lineales, 275-281
 Influencia, rango de, 584
 Instrumentos musicales, 151
 Integración por partes, 129
 Integración:
 de series de Fourier, 132-136
 Integral de Fourier, 478
 (véase también transformada de
 Fourier)
 identidad, 478
 Integral de Pearcey, 689
 Integrales de línea, 482
 Integrales de normalización, 329
 Integrales dobles, 483, 486
 Intersección de características, 601
 Invarianza por traslación, 77, 540, 558
 Isaacson, E., 755
 Iteración:
 convergencia, 275-281
 Gauss-Seidel, 277-279, 281-282
 Jacobo, 275-277, 282
 S-C-R, 279-282

J

Jackson, J. D., 755
 Jaeger, J. C., 754

K

Kaplan, W., 156, 755
 Kaufman, H., 620, 756
 Keener, J. P., 755
 Keller, H. B., 755
 Kevorkian, J., 226, 738, 755
 Kinsman, B., 658, 755
 Kramers, 727
 Kruskal, M. D., 754, 756

L

Lake, B. M., 756
 Laplaciano, 24
 coordenadas cilíndricas, 26-27
 coordenadas polares, 28
 diferencias finitas, 241
 fórmula de Green, 444, 542
 Lax, P. D., 755
 Lema de Jordan, 648
 Levitan, B. M., 754
 Ley de conservación, 678
 diferencial, 6
 integral, 6
 Ley de enfriamiento de Newton, 12, 13,
 25, 146, 170, 201, 210-223
 Ley de Fourier de conducción del calor, 8,
 9, 23, 31-33
 Ley de Hooke, 48, 145
 Ley de Newton, 692
 cuerda vibrante, 142-144
 membrana vibrante, 158
 sistema masa-resorte, 145, 148
 Ley de refracción de Snell, 161-162, 684
 Ligeramente inestables, 710-711
 Lighthill, M. J., 597-755
 Linealidad, 36-38
 serie de Fourier, 100
 Líneas de corriente, 92
 Liouville (ver Sturm-Liouville)

M

Mal propuesto, 710
 Madsen, 743-754

- Matemática aplicada**, 1
Materiales no isotrópicos, 31
Mathews, J., 755
Matrices hermiticas, 200
Matrices tridiagonales, 258
Matriz, 257-261
 autovalores, 194-200, 258
 autovectores, 197-199, 258
 de rigidez, 287, 289
 defectiva, 258
 eliminación gaussiana, 275
 funciones de Green, 265
 hermítica, 200
 iteración de Gauss-Seidel, 277-279, 281
 iteración de Jacobi, 275-277, 281
 iteración S-O-R, 279-281
 simétrica, 195, 196, 258, 265
 transpuesta, 196
 tridiagonal, 258
Mayers, D. F., 693
McGregor, J. L., 329, 753
Membrana vibrante, 156-158
 anular, 342
 casi circular, 467-471
 circular, 320-344, 467-470
 circular, problema de valores iniciales, 329-330
 con forma de cuarto de círculo, 334
 con forma de cuña, 334
 condición de contorno elástica, 158
 curvas nodales circulares, 339
 de cualquier forma, 292-294
 forzada, 387-396
 frecuencias, 300, 392-394
 frecuencias de forzamiento, 392-394
 frecuencias naturales, 392-394
 ley de Newton, 156
 modos, 300
 no uniforme, 314
 radial, 331-333
 rectangular, 296-302
 resonancia, 393-394
 tensión, 156
Membranas (ver membranas vibrantes)
Método de conexión de desarrollos asintóticos, 744
método de desarrollo en autofunciones, 127-129
 con tres variables independientes, 291-336
 cuasilineales, 594-612
 elípticas, 235
 hiperbólicas, 235
 lineales, 36
 métodos de diferencias finitas, 235
 métodos numéricos, 235-289
 no lineales, 36
 parabólicas, 235
 series infinitas, 121-122, 127-129
Método de descenso, 556
Método de elementos finitos, 282, 285
 elementos finitos triangulares, 285
 forma débil, 283
Método de escalas múltiples, 722-724
Método de Frobenius, 341-342
Método de las imágenes, 454-460, 463-464, 524, 566
Método de Liouville-Green, 226, 727
Método de perturbaciones, 738
Método implícito de alternancia de dirección, 281
Método numérico de Newton, 213
Método W.K.B. (J.), 226
Métodos de diferencias finitas, 235-289
 análisis de estabilidad, 247-253, 271-274
 condición de estabilidad de Courant, 272, 273
 condiciones de contorno, 263
 consistentes, 238, 244
 convergencia, 252-253
 derivadas parciales, 240-241
 diferencias centradas, 239, 243
 diferencias progresivas, 237
 diferencias retrógradas, 237
 ecuación de Laplace, 274-282
 ecuación de ondas, 270-274
 ecuación del calor, 243-275
 error de truncamiento, 236-237, 262, 264
 esquema de Crank-Nicholson, 262
 esquema de Richardson, 262, 266
 estables, 251
 explícitos, 263
 implícitos, 263
 inestabilidad numérica, 251
 inestable, 251
 iteración de Gauss-Seidel, 277-279, 281
 iteración de Jacobi, 275-277, 281
 laplaciano, 241
 pesos, 240
 primera derivada, 237-238
 problemas no homogéneos, 261
 segunda derivada, 239
 S-O-R, 279-282
 tamaño del paso, 272-273
 teorema de equivalencia, 253
 teorema de equivalencia de Lax, 253
 velocidad de propagación, 245, 272

métodos de diferencias, 235-289
Métodos de perturbaciones singulares,
 721, 738
Métodos en diferencias, 215-289
 (véase también **métodos de diferencias finitas**)
Mikhlin, S. G., 755
Miura, R. M., 754
Modos normales de vibración, 151, 152, 300
Moloney, J. V., 755
Morse, P. M., 755
Morton, K. W., 755

N

Nayfeh, A. H., 226, 755
Naylor, D., 754
Newell, A. C., 753, 755
Nicholson, 262
No acotada, 710
No homogéneas, 390-394
 (véase también **funciones de Green**)
Nodos, 151-153
Normal, 21
Número de onda, 158, 476, 526
 vector de, 158, 160, 526

O

Oberhettinger, F., 497
Olas, 601, 653, 659
Olver, 226
Onda cnoidal, 692
Onda de compresión, 601
Onda evanescente, 163, 665
Onda expansiva, 599
Onda fija, 654
Onda guía, 653
Onda incidente, 159
Onda reflejada, 159, 163, 624, 638
Onda refractada, 160, 161-162
Onda solitaria, 693, 698
Onda transmitida, 161
Ondas acústicas, 158, 661
Ondas de choque, 601-612
 boom sónico, 602
 dinámica, 605-608, 611
 explosión, 553
 iniciación, 604-605
 trueno, 602
Ondas dispersivas, 653, 733
Ondas dispersivas ligeramente modales
 719-731

Ondas electromagnéticas, 158, 661
Ondas estacionarias, 151
Ondas largas, 630
Ondas sonoras, 159
Ondas viajeras, 152, 159, 513, 654-657
Ondas:
 (véase también **ecuación de ondas**)
 acústicas, 158, 660
 cnoidales, 692, 700
 compresión, 601
 de choque, 601-612
 de forma fija, 513, 575
 de luz, 158
 de variación lenta, 693, 733, 735
 difracción,
 dirección, 526
 dispersivas, 654, 655
 electromagnéticas, 158, 661
 envolvente, 226, 658
 estacionarias, 151
 evanescentes, 163
 expansivas, 199
 olas, 601, 658-659
 planas, 158
 reflejada, 585
 reflexión, 159, 163
 refracción, 159-161
 ruptura, 601
 solitarias, 693, 697
 sonido, 158
 transmitidas, 160-162
 velocidad de onda, 574
 viajeras, 152-154, 513
Operador adjunto, 559, 569
Operador de calor, 36, 559
 adjunto, 560-561
 fórmula de Green, 560-561
Operador de difusión, 560
Operador de onda:
 fórmula de Green, 541
Operador de Sturm-Liouville:
 fórmula de Green, 384-385, 541-542
Operador del calor adjunto, 561
Operador gradiente, 24
Operador lineal, 36, 38, 184
 transformada de Fourier, 483
Operadores:
 adjunto, 186, 435, 559, 569
 autoadjunto, 186-187, 313, 569
 calor, 36
 cuarto orden, 192
 del calor adjunto, 559
 delta de Dirac, 418
 difusión, 559
 lineal, 36, 38, 184

Óptica:

- fibra, 653, 667-671
- geométrica, 683, 732

Orden, 237

Orszag, S.A., 226, 344, 753

Ortogonalidad:

- autofunciones discretas, 250
- autofunciones, 51-52, 172, 173-209, 187-195, 264
- autovectores, 195-200
- base, 232
- cosenos, 64
- funciones, 59-60
- Gram-Schmidt, 191, 197, 316
- multidimensional, 313-314
- no única, 190-191
- relaciones, 64
- senos, 50-52
- transformada de Fourier, 487
- única, 189-190

Ortogonalización de Gram-Schmidt,
191-192, 197, 307, 310-311, 316

Oscilación:

- amplitud, 226
- convergente, 251, 256
- divergente, 251, 256
- fase, 225-226

Oscilador, 724

- amortiguado, 720-721
- de variación lenta, 724

P

Parámetro de relajación, 279-280
(véase también S-O-R)

Parámetro espectral, 694

Parte impar, 114-115

Parte par, 114-115

Paseo aleatorio, 253, 266

Peaceman, 281

Pearson, C., 754

Péndulo, 718

Perfectamente aislado, 12
(ver también aislamiento)

Periodo:

- de variación lenta, 225
- infinito, 692

Perturbación:

- condición de contorno, 468
- desarrollo, 466, 469
- frecuencias, 467, 468

Perturbaciones:

- velocidad de propagación, 245-246, 272

Poisson, 556

Polinomio característico, 41, 195

Polinomios de Legendre, 360, 361

- fórmula de Rodríguez, 365

Polonsky, I., 241

Polos de la transformada de Laplace:

- autovalores, 649

Polos, 623, 624, 646, 647

Polos simples, 622, 623, 646-648

Potencial sin reflexión, 695, 700, 701

Powers, D. L., 755

Presión, 84

Primera identidad de Green, 313

Principio de causalidad, 409, 540

- de fuente variable, 543-544

- función de Green, 557, 631

- problemas de valor inicial, 631

- transformada de Fourier, 548

Principio de conexión, 744

Principio de Huygens, 553

Principio de minimización:

- autovalores, 201-205

- cociente de Rayleigh, 200-209

Principio de superposición

- (véase superposición)

Principio del máximo, 235

- ecuación de Laplace, 86-87

Principio del mínimo:

- ecuación de Laplace, 87

Problema adjunto, 434

Problema de autovalores de

- Sturm-Liouville, 165-234

- autofunciones, 172-179, 187-192

- autofunciones ortogonales, 172, 175-176

- autovalor mínimo, 172, 173

- autovalores, 224-228

- autovalores grandes, 224-228

- autovalores reales, 172, 173, 188

- ceros de las autofunciones, 217-218

- cociente de Rayleigh, 172, 176, 200-205, 216-217

- condiciones de contorno de tercera clase, 209-224

- conjunto completo de autofunciones, 197

- cuerda vibrante no uniforme, 206-209

- ecuación diferencial, 169-171

- ecuación diferencial de Bessel, 326-344

- función de Green, 416

- membrana vibrante circular, 321-323

operadores autoadjuntos, 186-188
 propiedades de aproximación, 228-234
 regular, 189
 serie de Fourier generalizada, 174
 singular, 323
 teoremas, 173-179
 Problema de autovalores no lineal, 471
 Problema de probabilidades, 253, 265
 Problema matricial de autovalores, 194-200
 Problemas bidimensionales, 26
 Problemas de autovalores:
 bidimensionales, 294-300
 de Sturm-Liouville, 151-232
 degenerados, 470
 dominio no acotado, 474-476
 funciones de Bessel, 327-329
 matriz, 194-200
 multidimensionales, 306-316
 no lineales, 471
 perturbados, 465-471
 Problema de contorno, 42-48, 71
 (véase también problema de autovalores de Sturm-Liouville)
 en un intervalo infinito, 473-476
 Problemas de perturbaciones:
 regulares, 720
 singulares, 721
 Problemas de valores iniciales, 42, 629-631
 Problemas discretos
 (véase métodos de diferencias finitas)
 Problemas esféricos, 356
 Problemas no homogéneos, 369-404
 (ver también funciones de Green)
 alternativa de Fredholm, 433-435, 439-440, 446-447
 Promedio, 18
 Propiedades cualitativas:
 ecuación de Laplace, 86-88
 Protter, M. H., 81, 755
 Puente de Tacoma, 394
 Punto de estancamiento, 92
 Punto ordinario, 325, 340
 Punto singular, 324-326, 341
 Punto singular irregular, 344
 Punto singular regular, 341

R

Rachford, 281
 Reacción endotérmica, 166
 Reacción exotérmica, 166
 Reciprocidad de Maxwell, 420-421, 544

Reciprocidad, 420-421, 544, 561
 (véase también reciprocidad de Maxwell)
 Recta tangente, 236
 Reducción de orden, 412
 Reflector no parabólico, 682
 Reflexión interna total, 162-163
 Reflexiones, 585-591
 Refracción:
 ley de Snell, 161, 684
 reflexión interna total, 163
 Regla de L'Hospital, 393
 Reid, W. H., 754
 Relación de dispersión, 653, 719, 738
 Residuos, 644-645
 Resonancia, 393-394, 651
 Respuesta (véase función de Green)
 Resto, 236-237
 Richards, P. G., 753
 Richards, P. I., 597
 Richardson's scheme, 262, 266
 Riemann suma, 478
 Roberts, G. E., 620, 756
 Rota, 209


S

Sagan, H., 756
 Schmidt (véase Gram-Schmidt)
 Secular, 721
 Segunda identidad de Green, 313
 Segur, H., 753
 Seidel (véase Gauss-Seidel)
 Señales reflejadas, 638
 Señales:
 reflexiones, 637
 tiempo transcurrido, 638
 Separación de variables, 35-92
 dominio no acotado, 473-477
 ecuación de ondas, 149-155
 ecuación en diferencias parciales, 254-256
 tiempo, 292-305, 320
 transformada de Laplace, 648-651
 Serie de cosenos
 (véase serie de Fourier de cosenos)
 Serie de Fourier de cosenos, 110-117
 (véanse también serie de Fourier, serie de Fourier de senos)
 continua, 117-118
 diferenciación, 123-124
 integración, 132-136
 integración término a término, 132-136

- Serie de Fourier de senos, 101-110,
 113-116, 173-177, 231
 (véanse también serie de Fourier, serie
 de Fourier de cosenos)
 continua, 115
 diferenciación, 125-128
 diferenciación término a término,
 121-132
 ecuación de Laplace, 516
 ecuación de ondas, 151
 ecuación del calor, 103-105
 funciones de Green, 416
 integración, 132-136
 integración término a término, 132-136
 Serie de Fourier, 50, 93-139, 322
 (véase también serie de Fourier de
 cosenos, serie de Fourier de senos)
 análisis de estabilidad (diferencias
 finitas), 247-254, 271-273
 continua, 115-118
 convergencia, 96-97
 definición, 95
 diferenciación término a término,
 121-132, 415
 diferenciación, 121-132
 discreta, 250, 264
 doble, 300
 ecuación de ondas, 593
 fenómeno de Gibbs, 105-108
 función discontinua, 107
 generalizada, 172, 174, 207, 228, 307
 integración, 132-136
 integración término a término, 132-136
 lineal, 100
 otros intervalos, 120
 parte impar, 114-115, 119-120
 parte par, 113-118
 serie de cosenos, 110-117
 serie de senos, 101-110, 113-115
 sobrepaso, 107
 Serie de Fourier-Bessel, 330, 348
 Coeficientes, 333
 Serie de Laurent, 647
 Serie de senos
 (véase serie de Fourier de senos)
 Serie de Taylor, 236
 Simetría (véase reciprocidad)
 Simetría axial, 27
 Simetría circular, 27, 331-333
 Simetría esférica, 30
 Singularidad, 643-647
 logarítmica, 332
 transformada de Laplace, 621-625
 Sistema de coordenadas:
 cilíndricas, 26
 móvil, 577
 polares, 26
 Sistema lineal:
 de ecuaciones diferenciales, 198
 eliminación gaussiana, 275
 iteración de Gauss-Seidel, 277-279, 281
 iteración de Jacobi, 275-277, 281
 iteración S-O-R, 279-282
 métodos numéricos, 275-282
 Sistema masa-resorte, 47-48, 145-147
 del tiempo, 224
 Sistemas dinámicos, 701
 Sistemas lineales, 198
 Smith, G. D., 756
 Sobrepaso, 107
 Sobrerrelajación sucesiva (véase S-O-R)
 Solitón:
 envolvente, 698
 Solitones, 693, 701
 Solitones envolventes, 698
 Solución trivial, 41, 42
 Soluciones en serie:
 ecuaciones diferenciales, 339-342
 Soluciones producto, 39, 49
 (véase también separación de variables)
 ecuaciones en diferencias parciales, 249
 Sonido, 156
 Sonido fundamental, 151
 S-O-R, 279-281
 Stakgold, I., 756
 Stegun, I. A., 241, 328, 337, 342, 620, 753
 Strang, G., 756
 Strauss, W. A., 756
 Street, R. L., 756
 Strogatz, S. H., 701, 756
 Superposición (principio de), 37, 38, 48,
 49, 150, 198
 integral, 475
 no homogéneo, 74-76
 Sustentación, 82-83
- T**
- Tasa de crecimiento, 710
 Técnicas asintóticas, 226
 Temperatura, 6-7
 (véase también ecuación del calor y
 ecuación de Laplace)
 acotada, 170
 diferencias, 8, 31
 distribución (equilibrio), 14-20
 equilibrio, 14-20, 25-26, 29-30, 370-372
 estacionaria, 15-16

- estado estacionario**, 15, 65
 (ver también equilibrio, ecuación de Laplace)
máxima, 86-87
media, 18, 86
mínimo, 87
prescrita, 11
- Tensión** (véase cuerda vibrante, membrana vibrante)
Tensión superficial, 660
- Teorema de Cauchy**, 482, 592
Teorema de convolución, 430, 498
 transformada de Fourier doble, 529-532
 transformada de Fourier en cosenos, 507, 522-524
 transformada de Fourier en senos, 507
- Teorema de equivalencia**, 253
Teorema de equivalencia de Lax, 253
Teorema de Fourier, 96-97
Teorema de Gauss, 22
 (ver también teorema de la divergencia)
- Teorema de Green**, 26
Teorema de la divergencia, 22, 88, 313, 318, 452
 bidimensional, 26
- Teorema de Pitágoras**, 232
Teorema de Stokes, 157
Teorema de traslación:
 transformada de Fourier, 483, 498-499
 transformada de Fourier doble, 549-551
 transformada de Laplace, 625, 632-635
- Teorema del círculo de Gershgorin**, 260-261, 265
- Teorema del círculo**, 260, 267
 ecuación de Laplace, 344-355
- Teorema del coseno**, 459
- Teorema del valor medio**:
 ecuación de Laplace, 86
 extendido, 237
- Thoe, D. W.**, 757
- Tiempo transcurrido**, 480, 540
- Tráfico**:
 capacidad, 609
 conservación del número de vehículos, 596
 densidad, 596
 flujo, 596-597, 609
 velocidad, 597
- Transformación conforme**, 533
- Transformada** (véase transformada de Fourier, transformada de Laplace, transformada de Hankel, transformada de Fourier en senos, transformada de Fourier en cosenos)
- Transformada coseno inversa**
 (ver transformada de Fourier en cosenos)
- Transformada coseno**
 (véase transformada de Fourier de coseno)
- Transformada de Fourier bidimensional**
 (véase transformada de Fourier doble)
- Transformada de Fourier doble**, 526-529
 convolución, 528-531
 derivadas, 529
 ecuación de Laplace, 533
 tabla, 529
 teorema de traslación, 531
- Transformada de Fourier en cosenos**, 502-511
 (véanse también transformada de Fourier, transformada de Fourier de seno)
 derivadas, 503-505
 ecuación de Laplace, 521-523
 tabla, 507
 teorema de convolución, 507, 532
- Transformada de Fourier inversa**, (ver también transformada de Fourier)
- Transformada de Fourier senos**, 502-511
 (véanse también transformada de Fourier, transformada de Fourier cosenos)
- banda semiinfinita, 515-516
 convolución, 507
 derivadas, 503
 ecuación de Laplace, 516, 524
 tabla, 507
- Transformada de Fourier**, 473, 537
 (véanse también transformada de Fourier en cosenos, transformada de Fourier en senos, transformada de Fourier doble)
- (de la) gaussiana, 480-483, 488-490, 497
 (de) derivadas, 492-494
 cuerda vibrante, 511-513
 (de la) delta de Dirac, 486-497, 540, 547
 definición, 479
 densidad de energía espectral, 496
 ecuación de ondas, 511-513, 546-547
 ecuación del calor, 487-495, 564-565
 función de Airy, 498
 función de Green, 548, 564-565
 identidad de Parseval, 495
 identidad integral de Fourier, 478
 integral de Fourier, 479

- inversa, 479
 - lineal, 483
 - par, 479
 - principio de causalidad, 548
 - producto, 495
 - semiplano, 517-520
 - tabla, 497
 - teorema de convolución, 494-497, 518
 - teorema de traslación, 484, 498
 - transformada de Laplace, 643-645
 - variable, 490
 - Transformada de Fourier, 494-499, 519
 - Transformada de Fourier-Bessel, 485
 - Transformada de Hankel, 485
 - Transformada de Laplace inversa
(ver transformada de Laplace)
 - Transformada de Laplace, 621, 626-631,
633, 637
 - Transformada de scattering inverso, 695
 - Transformada seno inversa (ver
transformada de Fourier en senos)
 - Transformada seno
(véase transformada de Fourier de
senos)
 - Transformadas de Laplace, 430, 626, 630-
632
 - Triángulo de Pascal, 254
- U**
- Undershoot, 107
 - Unicidad:
 - ecuación de Laplace, 87
 - ecuación de Poisson, 90
- V**
- Valor medio, 86
 - Variable compleja, 482, 486, 643-651
 - lema de Jordan, 648
 - polos, 622, 623, 646, 647
 - polos simples, 622, 623, 646
 - residuos, 644-645
 - serie de Laurent, 647
 - singularidades, 647
 - teorema de Cauchy, 644-645
 - transformación conforme, 533
 - Variable de la transformada, 480
 - Variable de semejanza, 490
 - Variación de los parámetros, 390-391,
412-415
 - Variación lenta (véase variables
multiescaladas)
 - Variedad central, 705
 - Varilla unidimensional, 2-59
 - Vector de flujo de calor, 21, 23, 32
convección, 28
 - Vector normal exterior, 21
 - Vectores, 257-259
 - autovectores, 258
 - de número de onda, 526
 - de posición, 526
 - normales unitarios, 21
 - Velocidad característica, 595
 - Velocidad de choque, 602-604
 - Velocidad de fase, 658-659
 - Velocidad de grupo, 658-660, 736-737
 - Velocidad de onda,
 - característica, 595
 - densidad, 596
 - local, 595
 - velocidad de propagación (numérica), 246,
272
 - Verhulst, F., 701, 756
- W**
- Walker, R. L., 755
 - Watson, G. N., 328, 756
 - Weinberger, H. F., 87, 142, 209, 232, 556,
756
 - Wentzel, 727
 - Whitham, G. B., 597, 606, 611, 637, 656
 - WKB (véase Liouville-Green)
 - Wronskiano, 413
- Y**
- Young, E. C., 756
 - Yuen, H. C., 717, 756
- Z**
- Zabusky, N. J., 756
 - Zachmanoglou, E. C., 757
 - Zauderer, E., 757
 - Zwillinger, D., 756



3^a Edición
Ecuaciones en Derivadas Parciales
con Series de Fourier y Problemas de Contorno
Haberman

El objetivo de este texto es el estudio de las **Ecuaciones en Derivadas Parciales** elementales que aparecen tanto en física como en ingeniería. Su contenido es especialmente adecuado para aquellos cursos que incluyan series de Fourier, funciones ortogonales o problemas de contorno. También puede ser de utilidad en cursos sobre funciones de Green, métodos de transformadas o las correspondientes partes de matemáticas avanzadas en ingeniería y métodos matemáticos en física.

Hace especial hincapié en los modelos sencillos (flujo de calor y cuerdas y membranas vibrantes). Las ecuaciones se formulan cuidadosamente a partir de principios físicos, motivando la mayor parte de los tópicos matemáticos, y acompañando los resultados matemáticos de su interpretación física. Las demostraciones de los teoremas (aquéllas que se incluyen) se presentan después de las explicaciones basadas en los ejemplos. Una parte esencial del texto la constituye alrededor de 1000 ejercicios de dificultad creciente, con la solución correspondiente a una selección de ellos en un apéndice .