



MDF Leapfrog 1-D:
Usando Operadores G y D de 2^{do} y 4^{to} Orden

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \dot{v} = \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \dot{\tau} = \mu \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \tau(0, t) = \tau(1, t) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

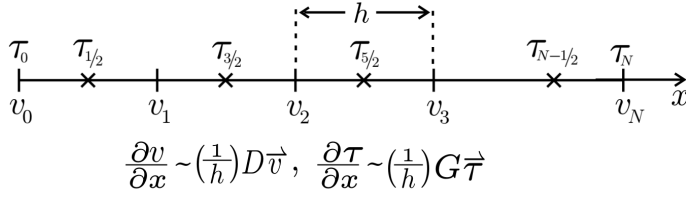


Figura 3.1.

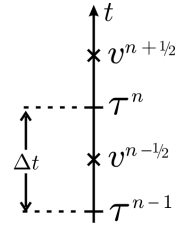


Figura 3.2.

5 Matrices de Diferenciación:

6 • $D \in \mathbb{R}^{N \times (N+1)}$ tal que $\frac{1}{h} D \vec{v} \sim \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_N$ en los N centros de celdas de malla en fig. 3.1.

7

8 • $G \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+2)}$, tal que $\frac{1}{h} G \vec{\tau} \sim \left[\frac{\partial \tau}{\partial x} \right]_{N+1}$ en los $(N+1)$ nodos de la malla en fig. 3.1.

9 **2^{do} Orden :** Las siguientes matrices D y G estan construidas con las fórmulas de Taylor en mallas centro-
10 distribuidas.

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ & -1 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -1 & 1 & & \\ & & & & & & \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{1}{3} & -3 & & & & \\ & -1 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -1 & 1 & & \\ & & & 3 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \end{bmatrix} \quad (2)$$

11 **4^{to} Orden** : Las siguientes matrices estan dadas por la FDF miméticas de Castillo et al (2001) para los
 12 parámetros $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = -\frac{1}{24}$ (ancho de banda mínimo).

$$G_{44}^{OM} = \begin{bmatrix} -\frac{47888}{14245} & \frac{1790}{407} & -\frac{14545}{9768} & \frac{8997}{16280} & -\frac{2335}{22792} & \frac{25}{9768} & 0 & \dots \\ \frac{16}{105} & -\frac{31}{24} & \frac{29}{24} & -\frac{3}{40} & \frac{1}{168} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$D_{44}^{OM} = \begin{bmatrix} -\frac{4751}{5192} & \frac{909}{1298} & \frac{6091}{15576} & -\frac{1165}{5192} & \frac{129}{2596} & -\frac{25}{15576} & 0 & \dots \\ \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (4)$$

$$EDP : \begin{cases} \rho \dot{v} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x} \\ \dot{\tau} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow MDF : \begin{cases} (a) \quad \overleftarrow{v}^{n+1/2} - \overleftarrow{v}^{n-1/2} = \left(\frac{\Delta t}{\rho h} \right) G \overleftarrow{\tau}^n \\ (b) \quad \overleftarrow{\tau}^{n+1} - \overleftarrow{\tau}^n = \left(\mu \frac{\Delta t}{h} \right) D \overleftarrow{v}^{n+1/2} \end{cases} \quad (5)$$

13 El método de DF en (5) es centro distribuido y con un ELT de orden $\mathcal{O}(\Delta t^2, h^2)$ en el caso de D y G en
 14 (2), mientras que el orden es $\mathcal{O}(\Delta t^2, h^4)$ en el caso de G y D en (3), (4).



Formulación vectorial del método de Lax Wendroff

16 Formulación velocidad-esfuerzo de la ecuación de onda

$$\begin{cases} \rho \dot{v} = \frac{\partial \tau}{\partial x}, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ \dot{\tau} = \mu \frac{\partial v}{\partial x}, & \tau(0, t) = \tau(1, t) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

17 Discretización del Dominio

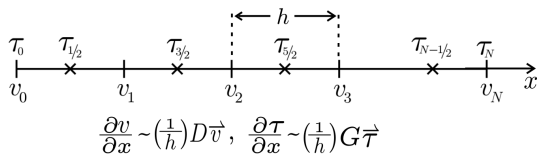


Figura 3.3.

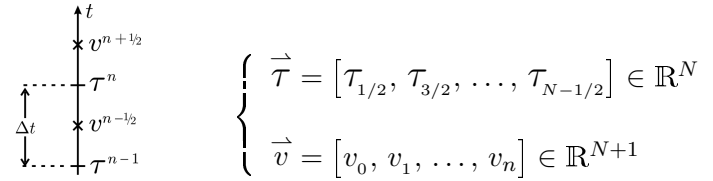


Figura 3.4.

18 Para el caso de la ecuación de velocidad en (6), consideremos la expansión de Taylor en tiempo alrededor
19 del punto $t = t^n$, y su evaluación en los instantes $t^{n+1/2}$ y $t^{n-1/2}$

$$v^{n+1/2} = v^n + \left(\frac{\Delta t}{2}\right) \partial_t v^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \partial_t^{(2)} v^n + \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 \partial_t^{(3)} v^n + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^4 \partial_t^{(4)} v^n + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^k \partial_t^{(k)} v^n \quad (7)$$

$$v^{n-1/2} = v^n - \left(\frac{\Delta t}{2}\right) \partial_t v^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \partial_t^{(2)} v^n - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 \partial_t^{(3)} v^n + \frac{1}{4!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^4 \partial_t^{(4)} v^n + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^k \partial_t^{(k)} v^n \quad (8)$$

20 al sustraer (8) de (7),

$$v^{n+1/2} - v^{n-1/2} = \Delta t \partial_t v^n + \frac{2}{3!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 \partial_t^{(3)} v^n + \frac{2}{5!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^5 \partial_t^{(5)} v^n + \dots + \frac{2}{k!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^k \partial_t^{(k)} v^n \quad (9)$$

21 de modo que

$$v^{n+1/2} = v^{n-1/2} + \Delta t \partial_t v^n + \frac{2}{3!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^3 \partial_t^{(3)} v^n + \frac{2}{5!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^5 \partial_t^{(5)} v^n + \dots + \frac{2}{k!} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^k \partial_t^{(k)} v^n \quad (10)$$

22 El proceso de Lax-Wendroff consiste en usar la Ecuación (6) para reemplazar derivadas temporales por
23 espaciales,

$$(i) \quad \Delta t \partial_t v^n \sim \frac{\Delta t}{h\rho} G \tau^n \quad (11)$$

$$(ii) \quad \partial_t^{(3)} v^n = \partial_t^{(2)} \left(\frac{1}{\rho} \partial_x \tau \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \dot{v} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) \right) \quad (12)$$

$$\Delta t^3 \partial_t^{(3)} v^n \sim \frac{\Delta t}{h\rho} G \left[\frac{\Delta t}{h} \mu D \left(\frac{\Delta t}{h\rho} G \tau^n \right) \right] \quad (13)$$

$$\sim \frac{\Delta t^3}{h^3 \rho} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) G(DG) \tau^n \quad (14)$$

$$(iii) \quad \Delta t^5 \partial_t^{(5)} v^n \sim \frac{\Delta t}{h\rho} G \left[\frac{\Delta t}{h} \mu D \left(\frac{\Delta t}{h\rho} G \left\langle \frac{\Delta t \mu}{h} D \left\{ \frac{\Delta t}{h\rho} G \tau^n \right\} \right\rangle \right) \right] \quad (15)$$

$$\sim \frac{\Delta t^5}{h^5 \rho} \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^2 G(DG)^2 \tau^n \quad (16)$$

24 Retomando la ecuación (10) para identificar los siguientes términos

$$v^{n+1/2} = v^{n-1/2} + \underbrace{\frac{\Delta t}{h\rho} \partial_t v^n}_{\text{Ec. (11)}} + \frac{1}{2^2 \cdot 3!} \underbrace{\left[(\Delta t)^3 \partial_t^{(3)} v^n \right]}_{\text{Ec. (14)}} + \frac{1}{2^4 \cdot 5!} \underbrace{\left[(\Delta t)^5 \partial_t^{(5)} v^n \right]}_{\text{Ec. (16)}} + \dots + \frac{1}{2^{k-1} k!} \left[(\Delta t)^k \partial_t^{(k)} v^n \right] \quad (17)$$

25 y sustituyendo las aproximaciones (11), (14) y (16) en la ecuación (17), se deriva el método Lax Wendroff
26 (LW) para la ecuación de velocidad

$$v^{n+1/2} = v^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{h\rho} G \tau^n + \frac{1}{2^2 \cdot 3!} \frac{\Delta t^3}{h^3 \rho} \left(\frac{\mu}{\rho} \right) G(DG) \tau^n + \frac{1}{2^4 \cdot 5!} \frac{\Delta t^5}{h^5 \rho} \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^2 G(DG)^2 \tau^n + \dots \quad (18)$$

$$\dots + \frac{1}{2^{k-1} \cdot k!} \frac{\Delta t^k}{\rho h^k} \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{(k-1)/2} G(DG)^{(k-1)/2} \tau^n.$$

27

28 Equivalentemente, para la ecuación del esfuerzo se obtiene

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \frac{\Delta t}{h} \mu D v^{n-1/2} + \frac{1}{2^2 3!} \left(\frac{\Delta t}{h} \right)^3 \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \mu D(GD) v^{n-1/2} + \frac{1}{2^4 5!} \left(\frac{\Delta t}{h} \right)^5 \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^2 \mu D(GD)^2 v^{n-1/2} + \dots \quad (19)$$

$$\dots + \frac{1}{2^{k-1} k!} \left(\frac{\Delta t}{h} \right)^k \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{(k-1)/2} \mu D(GD)^{(k-1)/2} v^{n-1/2}.$$

29

30 A nivel algorítmico conviene manejar los vectores en (19) por

$$q_\tau^{(1)} = \frac{\Delta t}{h} \mu D v^{n-1/2}; \quad q_\tau^{(3)} = \frac{\Delta t}{h} \mu D \left(\frac{\Delta t}{h} \frac{1}{\rho} G(q_\tau^{(1)}) \right); \quad q_\tau^{(5)} = \dots \quad (20)$$



31 por lo que

$$\tau^n = \tau^{n-1} + q_\tau^{(1)} + \frac{1}{2^2 \cdot 3!} q_\tau^{(3)} + \frac{1}{2^4 \cdot 5!} q_\tau^{(5)} + \dots \quad (21)$$

32 de manera equivalente se procede en (18),

$$q_v^{(1)} = \frac{\Delta t}{h\rho} G\tau^n; \quad q_v^{(3)} = \frac{\Delta t}{h\rho} G \left(\frac{\Delta t}{h} \mu D q_v^{(1)} \right); \quad q_v^{(5)} = \dots \quad (22)$$

33 por lo tanto

$$v^{n+1/2} = v^{n-1/2} + q_v^{(1)} + \frac{1}{2^2 \cdot 3!} q_v^{(3)} + \frac{1}{2^4 \cdot 5!} q_v^{(5)} + \dots \quad (23)$$

34 Para analizar la estabilidad, conviene reescribir (18) en términos de las variables adimensionales $\hat{v} = v/c$;

35 $\hat{\tau} = \tau/\mu$ y el CFL $p = c\Delta t/h$

$$\begin{aligned} \hat{v}^{n+1/2} &= \hat{v}^{n-1/2} + \frac{\Delta t C}{h} G\hat{\tau}^n + \frac{1}{2^2 \cdot 3!} \left(\frac{\Delta t}{h} \right)^3 c \cdot c^2 G(DG)\hat{\tau}^n + \frac{1}{2^4 \cdot 5!} \left(\frac{\Delta t}{h} \right)^5 c \cdot c^4 \mu G(DG)^2 \hat{\tau}^n + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2^{k-1} \cdot k!} \left(\frac{\Delta t}{h} \right)^k c \cdot c^{k-1} G(DG)^{(k-1)/2} \hat{\tau}^n \end{aligned} \quad (24)$$

36

$$\hat{v}^{n+1/2} = \hat{v}^{n-1/2} + pG\hat{\tau}^n + \frac{1}{2^2 \cdot 3!} p^3 G(DG)\hat{\tau}^n + \frac{1}{2^4 \cdot 5!} p^5 G(DG)^2 \hat{\tau}^n + \dots + \frac{1}{2^{k-1} \cdot k!} p^k G(DG)^{(k-1)/2} \hat{\tau}^n. \quad (25)$$

37 Finalmente, se obtiene

$$\boxed{\hat{v}^{n+1/2} = \hat{v}^{n-1/2} + G \left[pI_N + \frac{1}{2^2 \cdot 3!} p^3 (DG) + \frac{1}{2^4 \cdot 5!} p^5 (DG)^2 + \dots + \frac{1}{2^{k-1} \cdot k!} p^k (DG)^{(k-1)/2} \right] \hat{\tau}^n} \quad (26)$$

38 De igual manera, las correcciones LW en (19) para el esfuerzo se pueden expresar como

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^n &= \hat{\tau}^{n-1} + \frac{c\Delta t}{h} D\hat{v}^{n-1/2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3!} \left(\frac{\Delta t}{h} \right)^3 c^3 D(GD)\hat{v}^{n-1/2} + \frac{1}{2^4 \cdot 5!} \left(\frac{\Delta t}{h} \right)^5 c^5 D(GD)^2 \hat{v}^{n-1/2} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{2^{k-1} k!} \left(\frac{\Delta t}{h} \right)^k c^{k-1} CD(GD)^{(k-1)/2} \hat{v}^{n-1/2} \end{aligned} \quad (27)$$



39 por último, se obtiene

$$\hat{\tau}^n = \hat{\tau}^{n-1} + D \left[pI_{N+1} + \frac{1}{2^2 3!} p^3 (GD) + \frac{1}{2^4 5!} p^5 (GD)^2 + \dots + \frac{1}{2^{k-1} k!} p^k (GD)^{(k-1)/2} \right] \hat{v}^{n-1/2} \quad (28)$$

40 Los resultados en (26) y (28) permiten expresar el método LW como un método iterativo explícito que obtiene
 41 la solución en instante t^n como un producto matriz vector, siendo este vector la solución previa en t^{n-1} . A
 42 continuación, el vector q agrupa los vectores de velocidad y esfuerzo y la matriz H del método iterativo
 43 resulta de agrupar las potencias y sumas matriciales en (26) y (28)

$$q^n = \begin{bmatrix} \hat{v}^{n+1/2} & \hat{\tau}^n \end{bmatrix}, \quad q^n = H(p, k)q^{n-1}. \quad (29)$$

44 Las expresiones (26) y (28) se escriben haciendo uso de las matrices A^{DG} y A^{GD} definidas abajo

$$\begin{aligned} \hat{v}^{n+1/2} &= \hat{v}^{n-1/2} + GA^{DG} (\hat{\tau}^{n-1} + DA^{GD} \hat{v}^{n-1/2}), \\ &= \hat{v}^{n-1/2} + GA^{DG} \hat{\tau}^{n-1} + GA^{DG} DA^{GD} \hat{v}^{n-1/2}, \\ &= (I + GA^{DG} DA^{GD}) \hat{v}^{n-1/2} + GA^{DG} \hat{\tau}^{n-1}, \end{aligned} \quad (30)$$

45 en el sistema matricial en bloques

$$\begin{bmatrix} \hat{v}^{n+1/2} \\ \hat{\tau}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{N+1} + GA^{DG} DA^{GD} & GA^{DG} \\ DA^{GD} & I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}^{n-1/2} \\ \hat{\tau}^{n-1} \end{bmatrix} = H(p, k)q^{n-1} \quad (31)$$

46 donde

$$A_N^{DG} = p \left[I_N + \frac{1}{3!} \left(\frac{p}{2}\right)^2 (DG) + \frac{1}{5!} \left(\frac{p}{2}\right)^4 (DG)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{p}{2}\right)^{k-1} (DG)^{(k-1)/2} \right] \quad (32)$$

47 y

$$A_{N+1}^{GD} = p \left[I_{N+1} + \frac{1}{3!} \left(\frac{p}{2}\right)^2 (GD) + \frac{1}{5!} \left(\frac{p}{2}\right)^4 (GD)^2 + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{p}{2}\right)^{k-1} (GD)^{(k-1)/2} \right]. \quad (33)$$

48 **Observación.** El método de Lax Wendroff presenta $\mathcal{O}(k+1)$ para $k = 1, 3, 5, \dots$. La Estabilidad del
 49 mismo puede estudiarse a través del radio espectral y la norma de la matriz H , haciendo uso de herramientas
 50 del Algebra Lineal para el estudio de la convergencia de Métodos Iterativos. Este método de análisis de
 51 estabilidad de MDF se conoce como Método Matricial y la bibliografía al respecto es amplia. Sin embargo,
 52 se recomienda revisar el Cap. 4 de la Tesis de Maestría (UCV) de Adelis Nieves [2]. En el caso del radio
 53 espectral de la matriz H , dado un valor de k , se halla p^{max} tal que ese radio espectral sea menor o igual a 1.



54 Apéndice

55 Consideremos la formulación de segundo orden para la ecuación de onda en términos de la presión acústica
56 $p(x, t)$

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 p}{dx^2}$$

57 donde C corresponde a la velocidad de propagación de las ondas compresionales. Evaluando la expansion de
58 Taylor en tiempo para $p(x, t)$ alrededor de $t = t^n$, en los instantes $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ y $t^{n-1} = t^n - \Delta t$, se tiene

$$p^{n+1} = p^n + \left(\frac{dp}{dt}\right)^n \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 p}{dt^2}\right)^n (\Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 p}{dt^3}\right)^n (\Delta t)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{d^4 p}{dt^4}\right)^n (\Delta t)^4 + \dots \quad (34)$$

$$p^{n-1} = p^n - \left(\frac{dp}{dt}\right)^n (\Delta t) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 p}{dt^2}\right)^n (\Delta t)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 p}{dt^3}\right)^n (\Delta t)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{d^4 p}{dt^4}\right)^n (\Delta t)^4 + \dots \quad (35)$$

59 En (34) y (35) se ha omitido la dependencia en (x, t) , y además podrán considerarse como el caso particular de
60 expansiones bidimensionales en estas variables, pero evaluadas en el punto mismo x por lo que se simplifican
61 todas las derivadas en x . Al sumar (34) y (35) se obtiene

$$p^{n+1} = 2p^n - p^{n-1} + \left(\frac{d^2 p}{dt^2}\right)^n (\Delta t)^2 + \frac{2}{4!} \left(\frac{d^4 p}{dt^4}\right)^n (\Delta t)^4 + \frac{2}{6!} \left(\frac{d^6 p}{dt^6}\right)^n (\Delta t)^6 + \dots$$

62 La expansion anterior es la base del método LW para esta formulación al reemplazar todas las derivadas
63 temporales por sus equivalentes espaciales, con base a la ecuación de ondas. Esto es,

$$p^{n+1} = 2p^n - p^{n-1} + c^2 \left(\frac{d^2 p}{dt^2}\right)^n (\Delta t)^2 + \frac{2}{4!} c^4 \left(\frac{d^4 p}{dt^4}\right)^n (\Delta t)^4 + \frac{2}{6!} c^6 \left(\frac{d^6 p}{dt^6}\right)^n (\Delta t)^6 + \dots$$

64 Referencias

- 65 [1] Castillo, J. E., Hyman, J., Shashkov, M., and Steinberg, S. (2001). Fourth - and sixth - order conservative
66 finite difference approximations of the divergence and gradient. *Applied Numerical Mathematics*, 37, p.
67 171 – 187. Doi: [10.1016/S0168-9274\(00\)00033-7](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(00)00033-7).
- 68 [2] Nieves, A. (2018). Simulación de superficies libres y rupturas dinámicas en medios elásticos usando
69 diferencias finitas de alto orden. Tesis de Maestria, Universidad Central de Venezuela. Disponible
70 en: <http://saber.ucv.ve/handle/10872/20185>.
- 71 [3] Rojas, O. J., Spa, C., and de la Puente, J. (2017). High-Order Leapfrog and Rapid Expansion Time
72 Integrations On Staggered Finite Difference Wave Simulations. *79th EAGE Conference & Exhibition*
73 *2017 Paris, France, 12-15 June 2017, Volume 2017, p. 1 - 5*. Doi: [10.3997/2214-4609.201700521](https://doi.org/10.3997/2214-4609.201700521).

