Métodos de Diferencias Finita Clásicos / Didácticos
FTCS, CTCS - Nodal, CTCS - Staggered / Clase - 3.

Otilio Rojas

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias - Escuela de Computación
Postgrado en Ciencias de la Computación - Tópicos de Análisis Numérico

8 # Métodos de Diferencias Finita Clásicos / Didácticos

9 # FTCS, CTCS - Nodal, CTCS - Staggered.

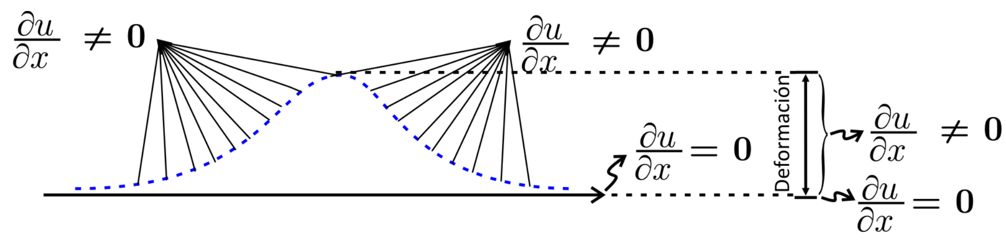
10 **Propiedades:**

$$\left\{\begin{array}{lll} (\boldsymbol{i}) & \textbf{Consistencia } (\text{E.L.T.})(\Delta t,\, h) \longrightarrow \text{Taylor} & \searrow \\ & & \quad\text{Convergencia} \\ (\boldsymbol{ii}) & \textbf{Estabilidad } \underbrace{(\text{E.L.T.} + \text{Errores Redondeos (E.R.)})}_{\text{Errores permanecen acotados}} & \nearrow \\ (\boldsymbol{iii}) & \textbf{Convergencia } (\text{Consistencia} + \text{Estabilidad}); \longrightarrow \text{Teorema Lax - Richtmyes} & \\ (\boldsymbol{iv}) & \textbf{Dispersión } [c^{\text{num}}/c^{\text{exacta}}] \sim 1 & \end{array}\right.$$

11 **<u>Ec. Onda:</u>** Medio 1D de Parámetros $(\mu,\, \rho)$ variable en x.

12

13
$$\left\{\begin{array}{l} \tau(x) = \mu(x)\dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t) \\ \rho(x)\dfrac{\partial^2}{\partial}u(x,\, t) = \dfrac{\partial}{\partial x}\tau(x,\, t) = \dfrac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left[\mu(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]}_{\tau(x)} \end{array}\right.$$



(a) Parámetros

14

$\mu(x)$: Rigidez [Fuerza]

$\rho(x)$: Densidad $^{[\text{masa}]}/_{[\text{volumen}]}$

$c(x) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$: Velocidad de onda.

(b) Variables Dependientes

15

$\tau(x)$: Esfuerzo $^{[\text{fuerza}]}/_{[\text{area}]}$

$u(x,t)$: Desplazamiento [distancia]

$\dfrac{\partial u}{\partial x}$: Deformación adimensional.

(c) Variables Dependientes

16

$\dfrac{\partial u}{\partial t}$: Velocidad de la partícula (v)

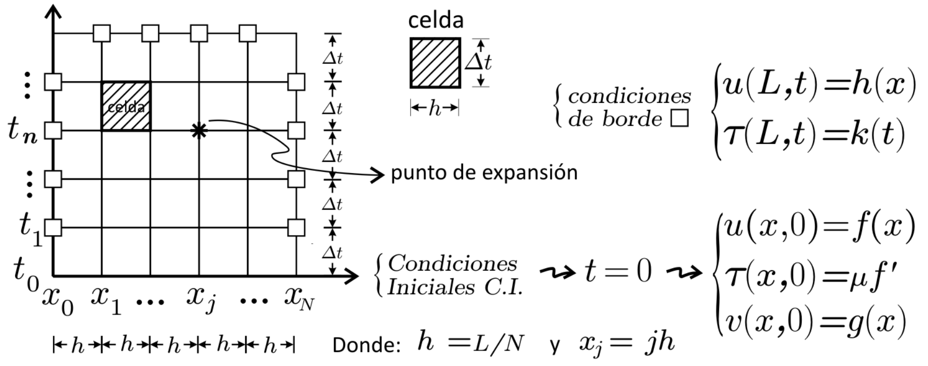
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$: Aceleración.

Métodos de Diferencias Finita Clásicos / Didácticos

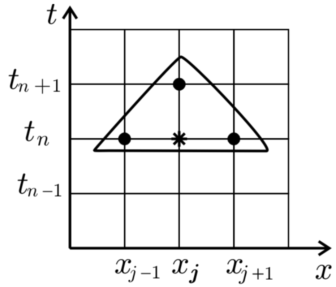
FTCS, CTCS - Nodal, CTCS - Staggered

$$
\left\{\begin{array}{l} \rho \ddot{u} = \tau_x \\ \\ \tau = \mu u_x \end{array}\right.
\quad \begin{array}{c} \xrightarrow[v=\dot{u}]{} \\ \\ \xrightarrow[\frac{\partial}{\partial t}]{} \end{array} \quad
\left\{\begin{array}{l} \rho \dot{v} = \tau_x \\ \\ \dot{\tau} = \mu v_x \end{array}\right.
$$

Desplazamiento-Esfuerzo Velocidad-Esfuerzo

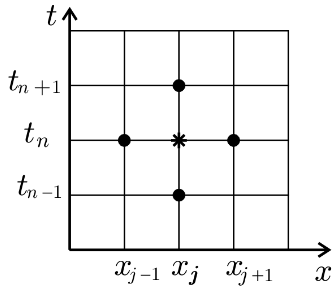


- **FTCS: Forward in Time Central in Space.**



$$
\left\{\begin{array}{l}
\rho\left(\dfrac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}\right) = \left(\dfrac{\tau_{j+1}^n-\tau_{j-1}^n}{2h}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_j^{n+1} = v_j^n + \left(\dfrac{\Delta t}{2h\rho}\right)\left(\tau_{j+1}^n - \tau_{j-1}^n\right)} \\
\dfrac{\tau_j^{n+1}-\tau_j^n}{\Delta t} = \mu\left(\dfrac{v_{j+1}^n-v_{j-1}^n}{2h}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tau_j^{n+1} = \tau_j^n + \left(\dfrac{\mu\Delta t}{2h}\right)\left(v_{j+1}^n - \tau_{j-1}^n\right)}
\end{array}\right.
$$

- **CTCS: Center in Time Central in Space**



$$
\left\{\begin{array}{l}
\rho\left(\dfrac{v_j^{n+1}-v_j^{n-1}}{\Delta t}\right) = \left(\dfrac{\tau_{j+1}^n-\tau_{j-1}^n}{2h}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + \left(\dfrac{\Delta t}{2h\rho}\right)\left(\tau_{j+1}^n - \tau_{j-1}^n\right)} \\
\dfrac{\tau_j^{n+1}-\tau_j^{n-1}}{\Delta t} = \mu\left(\dfrac{v_{j+1}^n-v_{j-1}^n}{2h}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tau_j^{n+1} = \tau_j^{n+1} + \left(\dfrac{\mu\Delta t}{2h}\right)\left(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n\right)}
\end{array}\right.
$$

Métodos de Diferencias Finita Clásicos / Didácticos

FTCS, CTCS - Nodal, CTCS - Staggered

(*i*) Consistencia.

$ELT = [\underbrace{EDP}_{(1)} - \underbrace{MDF}_{(2)}]\Big|_{v,\tau}$, donde v, τ son las soluciones continua de la EDP.

Retomando

<u>EDP - Continua</u>

$$\begin{cases} \rho\dot{v} = \tau_x \\ \dot{\tau} = \mu v_x \end{cases}$$

<u>MDF - Discreta - FTCS</u>

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t}\right) = \left(\dfrac{\tau_{j+1}^n - \tau_{j-1}^n}{2h}\right) \\ \dfrac{\tau_j^{n+1} - \tau_j^n}{\Delta t} = \mu\left(\dfrac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h}\right) \end{cases} \xrightarrow[Abreviadas]{Ecuaciones}$$

<u>MDF - Discreta - FTCS</u>

$$\begin{cases} \rho\Big(\ \cdots\ \Big) = \Big(\ \cdots\ \Big) \\ \Big(\ \cdots\ \Big) = \mu\Big(\ \cdots\ \Big) \end{cases}$$

$$(1)\ \ EDP\ :\ \rho\dot{v}\ =\ \tau_x$$

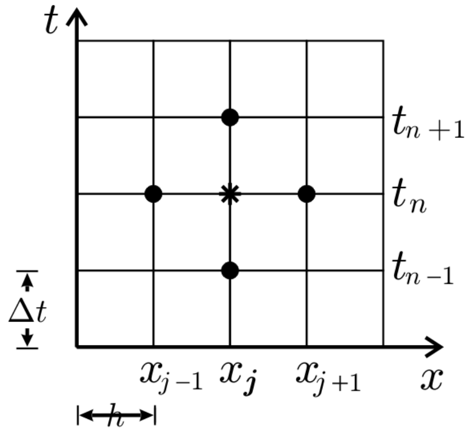
$$(2)\ \ MEF\ :\ \rho(\cdots) = (\cdots)$$

$$\left.\begin{aligned} ELT &= \rho\Big[\dot{v} - (\cdots)\Big] - \Big[\tau_x - (\cdots)\Big] = 0 \\ &= \rho\left[\dot{v} - \left(\frac{v(x_j, t_{n+1}) - v(x_j,\, t_n)}{\Delta t}\right)\right] - \left[\tau_x - \left(\frac{\tau(x_{j+1},\, t_n - \tau(x_{j-1},\, t_n)}{2h}\right)\right] \\ &= \rho\left[\frac{\Delta t}{2}\ddot{v}(x_j t_n) + \cdots\right] - \left[\frac{h^2}{6}\tau_{xxx}(x_j,\, t_n) + \cdots\right] \\ &= \mathcal{O}(\Delta t, h^2) \end{aligned}\right\} \quad \lim_{\Delta t \to 0, h \to 0} ELT = 0$$

Métodos de Diferencias Finita Clásicos / Didácticos

FTCS, CTCS - Nodal, CTCS - Staggered

(i) Consistencia.



t_{n+1} → { paso de tiempo t_{n+1} }

t_n → { Sol. Exacta en un paso de tiempo t_n }

Cuanto se en un paso equivoca en de tiempo → ELT + Errores Redondeo de la maquina

consistencia $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si la malla se refina a cero, es decir, los pasos temporales} \\ \Delta t \to 0 \text{ y los pasos espaciales } h \to 0 \text{ en cierta proporcion,} \\ \text{entonces } \mathrm{ELT} \to 0\text{, de modo que se obtiene la sol. Exacta.} \end{array} \right\}$ $\lim\limits_{\Delta t \to 0, h \to 0} ELT = 0$

de manera análoga se deduce que para el Método CTCS

$$ELT = \mathcal{O}(\Delta t^2, h^2).$$

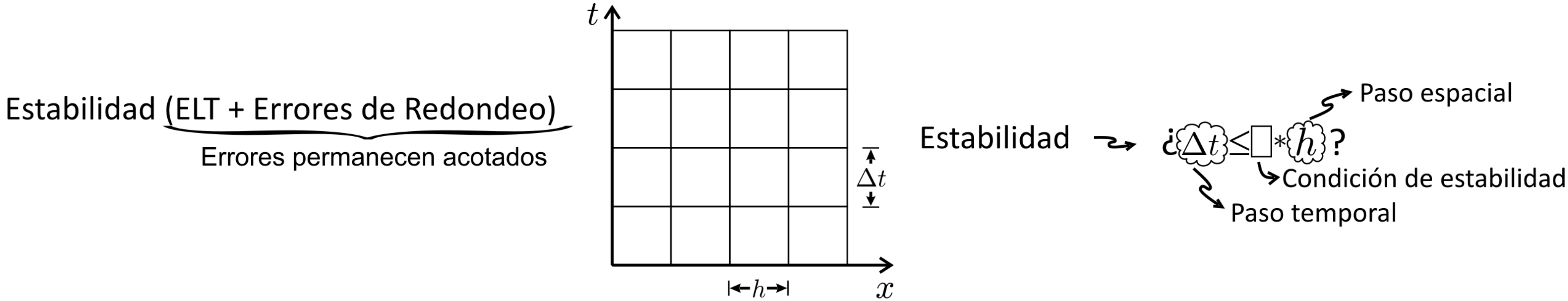
y así como para el Método CTCS centro-distribuido o Staggered

$$ELT = \mathcal{O}(\Delta t^{xx}, h^{xx})$$

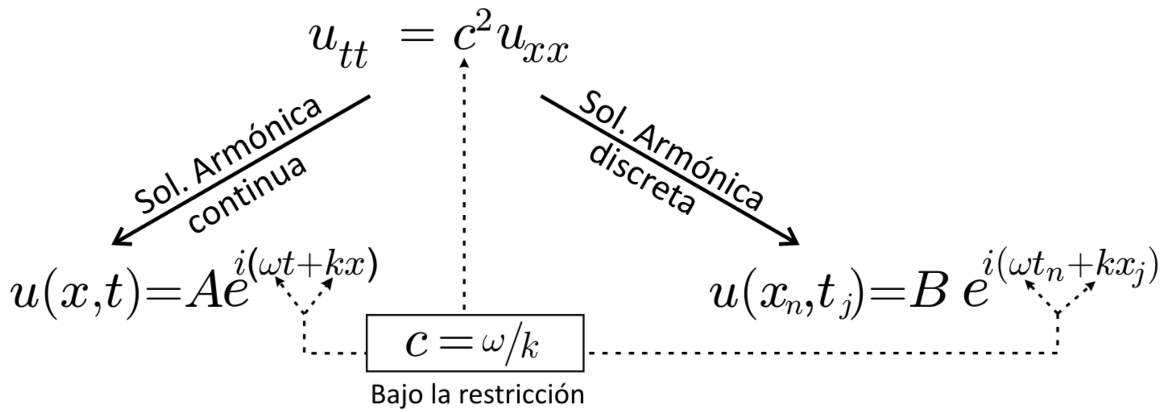
Métodos de Diferencias Finita Clásicos / Didácticos

FTCS, CTCS - Nodal, CTCS - Staggered

(ii) Estabilidad.



Si recordamos que



Métodos de Diferencias Finita Clásicos / Didácticos

FTCS, CTCS - Nodal, CTCS - Staggered

(ii) Estabilidad.

En general se puede hacer con

$$\text{Análisis de Fourier} \longrightarrow \begin{cases} v_j^n = A e^{i(-\omega(n\Delta t)+k(jh))} \\ \\ \tau_j^n = B e^{i(-\omega(n\Delta t)+k(jh))} \end{cases} [*] \longrightarrow \boxed{\text{MDF}}$$

<u>Procedimiento:</u>

(a) Se introduce $[*]$ en el MDF.

(b) Se analiza el tipo de solución para ω: ¿$\omega \in \mathbb{R}$? o ¿$\omega \in \mathbb{C}$?

<u>Análisis de estabilidad para el Método FTCS:</u>

$$[*] \begin{cases} v_j^n = A \underbrace{e^{-i\omega(n\Delta t)}}_{\text{temporal}} \underbrace{e^{ik(jh)}}_{\text{espacial}} \\ \\ \tau_j^n = B \underbrace{e^{-i\omega(n\Delta t)}}_{\text{temporal}} \underbrace{e^{ik(jh)}}_{\text{espacial}} \end{cases} \quad \text{se introduce } [*] \text{ en} \quad \begin{cases} v_j^{n+1} - v_j^n = \left(\dfrac{\Delta t}{2\rho h}\right)\left(\tau_{j+1}^n - \tau_{j-1}^n\right) \\ \\ \tau_j^{n+1} - \tau_j^j = \left(\dfrac{\Delta t \mu}{2h}\right)\left(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n\right) \end{cases}$$

y se obtiene:

Métodos de Diferencias Finita Clásicos / Didácticos

FTCS, CTCS - Nodal, CTCS - Staggered

$$\left.\begin{array}{l} (1) \\ \\ (2) \end{array} \right\{ \begin{array}{l} A\left(e^{-i\omega\Delta t}-1\right)=\left(\dfrac{\Delta t B}{2\rho h}\right) i \,\mathrm{sen}\,(kk) \\ \\ B\left(e^{-i\omega\Delta t}-1\right)=\left(\dfrac{\Delta t \mu A}{h}\right) i \,\mathrm{sen}\,(kh) \end{array} \xrightarrow[(1)*(2)]{\text{se multiplica}} \left(\underbrace{e^{-i\omega\Delta t}-1}_{(*)}\right)^2 = \underbrace{-\left[\frac{\Delta t c}{h}\,\mathrm{sen}\,(kh)\right]^2}_{\mathbb{R}^-} < 0$$

si $k, c, h, \Delta t \in \mathbb{R}$, entonces ¿qué condición debe tener $(*)$, para que su cuadrado sea negativo?, para ello se supone que $(*)$ tiene la forma $(bi)^2 = b^2 i^2 = -b^2 < 0$ con $b > 0$.

$$e^{-i\omega\Delta t} = 1 \pm \left(\frac{c\Delta t}{h}\right)\mathrm{sen}\,(kh) i \quad \Rightarrow \quad \left|e^{-i\omega\Delta t}\right| > 1; \quad \text{si } \ \omega = ai \quad \Rightarrow \quad e^{-i^2 a\Delta t} = e^{a\Delta t} > 1, \ \text{para } \ a > 0.$$

Si se sustituye $e^{-i\omega\Delta t}$ por $e^{a\Delta t}$ para $a > 0$, en la Ec.

$$v_j^n \ = \ A\underbrace{e^{-i\omega(n\Delta t)}}_{\text{temporal}}\underbrace{e^{ik(x_j)}}_{\text{espacial}} \ = \ A\,e^{an\Delta t}\,e^{ikx_j} = A\left[e^{a\Delta t}\right]^n e^{ikx_j}$$

El Método FTCS es inestable.