Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias - Escuela de Computación
Postgrado en Ciencias de la Computación - Tópicos Especiales en Análisis Numéricos.
Dr. Otilio Rojas.

Métodos en Diferencias Finitas (MDF) Didácticos / Tradicionales para la Ec. de Onda 1D: Estabilidad y Dispersión Numéricas

Debemos retomar de la clase 01 al deducir la Ec. 1D de onda, la siguiente ecuación resultante de aplicar 2^{da} Ley de Newton

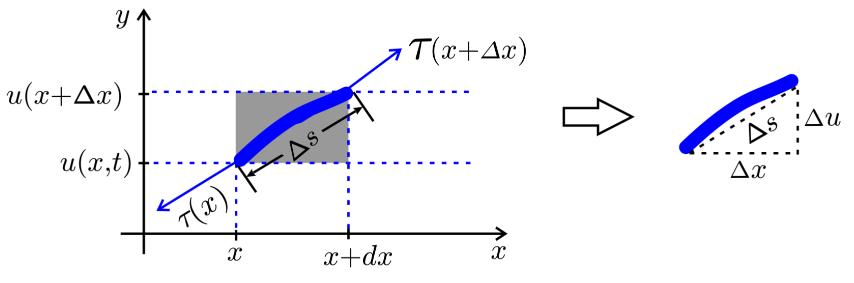

Figura 3.1.

Si $\Delta u \ll \Delta x$

$$(\Delta s)^2 \sim (\Delta x)^2 + (\Delta u)^2 \qquad (1)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{(\Delta s)^2}{(\Delta x)^2} \sim 1 + \frac{(\Delta u)^2}{(\Delta x)^2} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$

$$(\Delta s)^2 \sim (\Delta x)^2 \qquad (3)$$

$$\underbrace{\mathcal{T}(x+\Delta x)\frac{\partial}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \mathcal{T}(x)\frac{\partial}{\partial x}(x,t)}_{\text{Fuerza Resultante}} = \underbrace{\rho(\overline{x})\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(\overline{x},t)\Delta s}_{\text{masa}\times\text{aceleración}} \qquad (4)$$

Al tomar el límite $\Delta x \to 0$ y usar (1) en (4)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathcal{T}(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x,\, t)\right] = \rho(x)\frac{\partial}{\partial t^2}u(x,t) \qquad (5)$$

La Ec. (5) se puede reescribir al considerar los parámetros de la cuerda rigidez y densidad, ambos variables en el espacio. Es decir, $\mathcal{T} \leftrightarrow \mu$ y con el símbolo $\mathcal{T}$ denotamos los términos de fuerza a las izquierda de (4). En conclusión la Ec. (3) es equivalente al sistema desplazamiento (u) - esfuerzo ($\mathcal{T}$)

$$\begin{cases} \mathcal{T}(x,t) = \mu(x)\dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t) \\ \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{T}(x,\, t) \end{cases} \qquad (6)$$

sujeto a las C.I's:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \dot{u}(x,\,0) = g(x) \end{cases} \qquad (7)$$

Donde $\dot{u}$ denota $\frac{\partial u}{\partial x}$.

***(a)* Parámetros**	***(b)* Variables Dependientes**
$\mu(x)$: Rigidez	$\mathcal{T}(x)$: Esfuerzo
$\rho(x)$: Densidad	$u(x,t)$: Desplazamiento

Nota. Aquí abandonamos la notación del Stein [2], como $\mathcal{T}$ es rigidez, y denotamos este parámetro por μ.

En estas posibles CI's, $f(x)$ realmente impone una deformación inicial sobre la cuerda: $f' = \frac{\partial u}{\partial x} \longleftarrow y$ esta cantidad mide **la deformación.** La función $g(x)$ también es de interés y podría ayudarnos a "direccionar" la propagación de esa deformación inicial. Esto trataremos de verlo a nivel computacional en las tareas. Ahora resultaría interesante revisar el texto Ziil/Cullen y la separación de variable para el caso de la Ec. de Onda (pág. 445–448) [1].

Condiciones de Fronteras:

- **Frontera Sujeta:** $u(0) = u(L) = 0$. Cuerda de extremos anclados
- **Frontera Libre:** $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(L) = 0$. En este caso los extremos de la cuerda se mueven, pero **no** ejerciendo tensión o esfuerzo en el vació circundante.

Sistema Velocidad – Esfuerzo: la Ec. (6) se puede reescribir al considerar $\frac{\partial u}{\partial t}$ como una variable dependiente en lugar de u. Aquí

$$v = \dot{u}, \qquad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{T}_x = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x}, \tag{8}$$

las cuales son notaciones muy usadas en ingeniería. De esta manera tenemos el sistema (6), reescrito como

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{T}} = \mu v_x \\ \\ \rho \dot{v} = \mathcal{T}_x \end{cases} \tag{9}$$

MDF's para el sistema Velocidad - Esfuerzo: malla nodales en espacio y tiempo

Discretización del Dominio

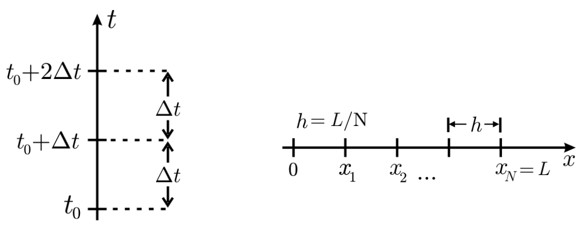

Figura 3.2.

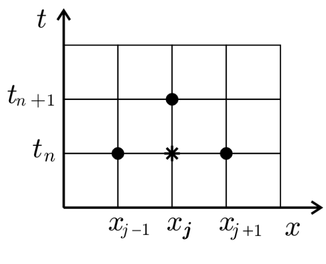

Figura 3.3.

malla: Colección de puntos $(x_j,\, t_n)$ para $j = 0,\, 1,\, \ldots,\, N;$ y $n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$

$$(A) \begin{cases} \dfrac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = \left(\dfrac{1}{\rho_j 2h}\right)\left(\mathcal{T}^n_{j+1} - \mathcal{T}^n_{j-1}\right) \\ \\ \dfrac{\mathcal{T}^{n+1}_j - \mathcal{T}^n_j}{\Delta t} = \left(\dfrac{\mu_j}{2h}\right)\left(v^n_{j+1} - v^n_{j-1}\right) \end{cases} \tag{10}$$

Este método (A) se llama **FTCS**: Forward in time and central in space, y resulta de sustituir la DF de 1$^{\text{er}}$ Orden $\mathcal{O}(\Delta t)$:

$$D_+(u) = \frac{u(t_n + \Delta t) - u(t_n)}{\Delta t}, \tag{11}$$

y la DF de 2$^{\text{do}}$ orden $\mathcal{O}(h^2)$:

$$D_0(u) = \frac{u(x_j + h) - u(x_j - h)}{2h}, \tag{12}$$

en las derivadas parciales respectivas en la Ec. (9)

Consistencia del MDF (A): Esta es la primera propiedad a estudiar en un MDF y esta asociada al E.L.T. en un punto de la malla $(x_j,\, t_n)$.

$$\begin{aligned}
ELT\Big|_{(x_j,\, t_n)} &= \Big[MDF - EDP\Big]\Big|_{v(x_j, t_n), \mathcal{T}(x_j,\, t_n)} \qquad \longleftarrow \text{ Medir esta diferencia, pero en la solucin exacta a la EDP.} \\
&= \rho(x_j)\left[\frac{v(x_j,\, t_{n+1}) - v(x_j, t_n)}{\Delta t} - \underbrace{\dot{v}(x_j,\, t_n)}_{[*]}\right] + \left[\frac{\mathcal{T}(x_{j+1}, t_n) - \mathcal{T}((x_{j-1},\, t_n))}{2h} - \underbrace{\mathcal{T}_x(x_j,\, t_n)}_{[**]}\right] \\
&= \rho(x_j)\left[\frac{\Delta t}{2}\ddot{v}(x_j,\, t_n) + \cdots\right] + \left[-\frac{h^2}{6}\mathcal{T}_{xxx}(x_j,\, t_n) + \cdots\right] \\
&= \mathcal{O}(\Delta t, h^2).
\end{aligned} \tag{13}$$

Para escribir la Ec. (13), se han usado los ELT ya conocidos al deducir las fórmulas en DF por Taylor, para reemplazar [*] y [**]. Así, el método FTCS hereda el orden de truncamiento de las DF's usadas al construirlo como era de esperarse. Nota no siempre pasa y hay ejemplos en la literatura que lo demuestran.

Ahora, un MDF es consistente si

$$\lim_{\Delta t, h \to 0} ELT(\Delta t,\, h) = 0 \tag{14}$$

Note que esta propiedad se cumple para el método FTCS al tomar el límite en cuestión en la Ec. (13), bajo la hipótesis que las derivadas $\ddot{v}$, $\mathcal{T}_{xxx}$, y de orden superior estén acotados. En la práctica, la consistencia prueba que el $MDF \to EDP$, la solución del 1$^{\text{ero}}$ converge a la solución de 2$^{\text{do}}$, si en t_n contamos con la solución exacta, y se refina la malla infinitamente. Es decir, la consistencia trata el error de un paso de tiempo.

El problema es que esos ELT de orden $\mathcal{O}(\Delta t,\, h^2)$ se acumulan durante varios pasos de tiempo, y se le suman, los errores de redondeo. La pregunta es si la solución discreta del MDF permanecen acotado entonces la respuesta será en la Estabilidad del MDF.

Estabilidad del MDF (A): Análisis de Fourier.

Considere las soluciones discretas

$$\begin{cases} v_j^n = A e^{i(-\omega(n\Delta t) + k(jh))} \\ \\ \tau_j^n = B e^{i(-\omega(n\Delta t) + k(jh))} \end{cases} \tag{15}$$

y se introduce ambas Ecs de (15) en el MDF:

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \left(\frac{\Delta t}{\rho 2h}\right)\left(\tau_{j+1}^n - \tau_{j-1}^n\right) \tag{16}$$

$\Rightarrow$

$$A\left(e^{-i\omega\Delta t} - 1\right) e^{i(-\omega(n\Delta t) + k(jh))} = \left(\frac{\Delta t}{2\rho h}\right)\left(e^{ikh} - e^{-ikh}\right) B e^{i(-\omega(n\Delta t) + k(jh))} \tag{17}$$

de modo que

$$\boxed{A\left(e^{-i\omega\Delta t} - 1\right) = \left(\frac{\Delta t}{2\rho h}\right) i \operatorname{sen}(kk)}, \tag{18}$$

para todo los casos en que $e^{i(-\omega(n\Delta t) + k(jh))} \neq 0$.

De forma análoga se introducen las Ecs. de (15) en el MDF:

$$\tau_j^{n+1} - \tau_j^n = \left(\frac{\Delta t \mu}{2h}\right)\left(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n\right) \tag{19}$$

de modo que

$$\boxed{B\left(e^{-i\omega\Delta t} - 1\right) = \left(\frac{\Delta t \mu A}{h}\right) i \operatorname{sen}(kh)} \tag{20}$$

Se considera ahora la nueva Ec. (18)*(20):

$$\left(e^{-i\omega\Delta t} - 1\right)^2 = -\left(\frac{\mu}{\rho}\right)\left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2 \operatorname{sen}^2(kh) \tag{21}$$

Así los coeficientes A y B desaparecen. Note que $\mu/\rho = C^2$, la velocidad de la onda.

Así que el resultado anterior (21) se reescribe, como

$$\left(e^{-i\omega\Delta t}-1\right)^2=-\Big[\underbrace{\frac{c\Delta t}{h}\operatorname{sen}(kh)}_{\mathbb{R}}\Big]^2 \tag{22}$$

para combinaciones generales de kh. La única manera que esta condición se cumple es que

$$e^{-i\omega\Delta t}-1=\pm\left(\frac{c\Delta t}{h}\right)\operatorname{sen}(kh)i \qquad \longleftarrow \quad \text{complejopuro} \tag{23}$$

de donde,

$$\left|e^{-i\omega\Delta t}\right|=\left|1\pm\left(\frac{c\Delta t}{h}\operatorname{sen}(kh)i\right)\right|>1 \tag{24}$$

Esto a su vez conduce a la solución para $\omega=ai$, con $a\int\mathbb{R}^+$,

$$e^{-i\omega\Delta t}=e^{a\Delta t}>1. \tag{25}$$

Sin embargo, la solución discreta v_j^n original

$$v_j^n=A\left[e^{a\Delta t}\right]^n e^{ij(kh)}=A\Big[\underbrace{e^{a\Delta t}}_{(a)}\Big]^n\underbrace{e^{i(jh)k}}_{(b)} \tag{26}$$

Donde:

(a) : La exponencial es >1.

(b) : La exponencial es Armónica en espacio, pero exponencial en tiempo.

Las soluciones discretas crecerán a medida que n crezca (nro de iteraciones). A este tipo de método se le llama **inestable**. Una conclusión semejante se tiene si se asume $\omega=a+bi$, con $a,b\in\mathbb{R}$, como una manera de satisfacer (24).

(B) Método CTCS. Este MDF pregunta el estencil en particular el modo $(x_j,\, t_n)$ es el punto de expansión al formular el método, pero no permanece en el Estencil

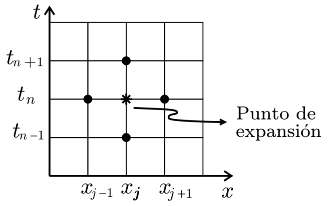

Figura 3.4.

$$\begin{cases} \dfrac{v_j^{n+1}-v_j^{n-1}}{2\Delta t}=\left(\dfrac{1}{2h\rho}\right)\left(\mathcal{T}_{j+1}^n-\mathcal{T}_{j-1}^n\right) \\[2ex] \dfrac{\mathcal{T}_j^{n+1}-\mathcal{T}_j^{n-1}}{2\Delta t}=\left(\dfrac{\mu}{2h}\right)\left(v_{j+1}^n-v_{j-1}^n\right) \end{cases} \tag{27}$$

El ELT en el método de CTCS es $\mathcal{O}(h^2,\Delta t^2)$ y también resulta consistente.

72 **Estabilidad vía Fourier.** Supongamos:

$$v_j^n = Ae^{i(-\omega)n\Delta t + kjh}, \qquad \text{y} \qquad \mathcal{T}_j^n = Be^{i(-\omega n\Delta t + kjk)} \tag{28}$$

73 Al sustituir v_j^n y $\mathcal{T}_j^n$ de (28) en las dos ecuaciones discreta del MDF (27):

$$-A\,\mathrm{sen}\,(\omega\Delta t) = \left(\frac{\Delta t}{\rho h}\right) B\,\mathrm{sen}\,kh; \qquad -B\,\mathrm{sen}\,\omega\Delta t = \frac{\mu\Delta t}{h}\,\mathrm{sen}\,(kh) \tag{29}$$

74 Al tomar el producto de ambas Ecs. de (29):

$$\mathrm{sen}^2\,(\omega\Delta t) = \left(\frac{c\Delta t}{h}\right)^2 \mathrm{sen}^2\,kh, \qquad \text{con} \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{30}$$

75 Una condición necesaria para que $\omega \in \mathbb{R}$ es que se cumpla la condición.

$$\left(\frac{c\Delta t}{h}\right) \leq 1 \tag{31}$$

76 la expresión (31) es la condición CFL (Courant - Friedrichs - Lewy).

77 **Interpretación de CFL.** De la condición del CFL (31) se desprende

$$\underbrace{c\Delta t}_{\text{Distancia que recorre la onda en } \Delta t \text{ unidades de tiempo.}} \leq \overbrace{h}^{\text{Espaciamiento entre los nodos de la malla.}} \tag{32}$$

Así, la perturbación no puede desplazarse más que una celda de la malla. Sin embargo, note que el MDF propagará "parte" de esa perturbación a x_j desde x_{j-1}, dado que v_j^{n+1} resulta un promedio de los valores de v y $\mathcal{T}$ en los puntos/nodos del estencil.

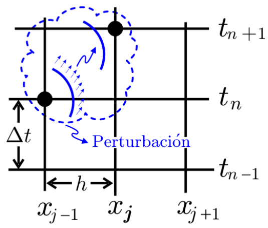

Figura 3.5.

78 **(c) Método CTCS centro-distribuido o Staggered:**

79

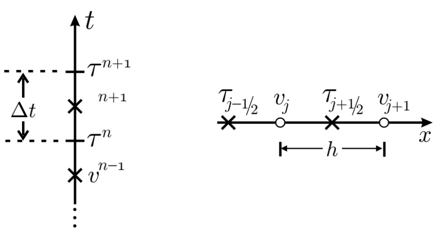

Figura 3.6.

En espacio, las velocidades se definen en los nodos $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, N$, mientras que los esfuerzos estan definidos en los centros de celda $x_{j+1/2}$, $j = 0, \ldots, N-1$. Adicionalmente, consideremos evaluaciones $\mathcal{T}_0$ y $\mathcal{T}_N$ en los bordes en tiempo, los esfuerzo son nodales y donde $\mathcal{T}^0$ representa la condición inicial (CI). Las velocidades son staggered respecto a $\mathcal{T}$, pero podría considerarse v^0 o $v^{-1/2}$, para representar una CI en velocidad. El valor $v^{-1/2}$ representa una "extrapolación" a $t < 0$.

$$\frac{v_j^{n+1/2} - v_j^{n-1/2}}{\Delta t} = \left(\frac{1}{\rho h}\right)\left(\mathcal{T}_{j+1/2}^n - \mathcal{T}_{j-1/2}\right); \frac{\mathcal{T}_{j+1/2}^{n+1} - \mathcal{T}_{j+1/2}^n}{\Delta t} = \frac{\mu}{\Delta x}\left(v_{j+1}^{n+1/2} - v_j^{n+1/2}\right) \tag{33}$$

Este método tiene el mismo costo computacional del método CTCS nodal, pero su ELT es menor. Es más,

$$ELT^{\text{staggered}} \sim \frac{1}{4} ELT^{\text{nodal}}. \tag{34}$$

En cuanto a su estabilidad, la condición CFL es exactamente la misma que (31), y lo cual queda como ejercicio de tarea.

Referencias

[1] Zill, D G. and Cullen, M. R. (2015) Differential Equation with Boundary-Value Problems. 7th Edition, Cengage Learning. Canada.

[2] Stein, S., and Wysession, M. (2009). An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure. Blackwell Publishing. Malden, MA.

[3] Moczo, P., Kristek, J., & Halada, L. (2004). The finite-difference method for seismologists. An Introduction. Comenius University, Bratislava.