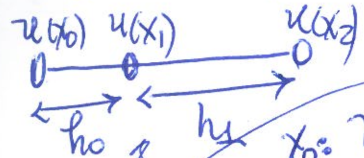
Construcción de EDF (fórmulas en Diferencias Finitas) UCV, ~~Año~~ Junio 2021

1) Dadas las evaluaciones funcionales $u(x_0)$, $u(x_1)$, $u(x_2)$, con $h_0 = x_1 - x_0$, $h_1 = x_2 - x_1$, construya la FDF para aproximar $u''(x_1)$.



Expansiones de Taylor: Alrededor de x_1

$$x_0 : \; u(x_0) = u(x_1) + (x_0 - x_1)u'(x_1) + \frac{(x_0-x_1)^2}{2}u''(x_1) + \frac{(x_0-x_1)^3}{3!}u'''(x_1) + \cdots$$

Paso 1: Es decir,

$$u(x_0) = u(x_1) - h_0 u'(x_1) + \frac{h_0^2}{2}u''(x_1) - \frac{h_0^3}{3!}u'''(x_1) + \frac{h_0^4}{4!}u^{IV}(x_1) + \cdots \quad \boxed{I}$$

$$x_2 : \; u(x_2) = u(x_1) + h_1 u'(x_1) + \frac{h_1^2}{2}u''(x_1) + \frac{h_1^3}{3!}u'''(x_1) + \frac{h_1^4}{4!}u^{IV}(x_1) + \cdots \quad [II]$$

Paso 2: Combinar linealmente las Expansiones de Taylor

$\cancel{h_0 * [I] + h_1 * [II]}$:

$\cancel{h_0 u(x_0) + h_1 u(x_2) = (h_0 + h_1)u(x_1)}$

$h_1 * [I] + h_0 * [II]$:

$$h_1 u(x_0) + h_0 u(x_2) = (h_1 + h_0)u(x_1) + \left(\frac{h_1 h_0^2 + h_0 h_1^2}{2}\right)u''(x_1) + \left(\frac{-h_1 h_0^3 + h_0 h_1^3}{3!}\right)u'''(x_1) + \left(\frac{h_1 h_0^4 + h_0 h_1^4}{4!}\right)u^{IV}(x_1) + \cdots$$

Lo que permite escribir para $u''(x_1)$:

$$u''(x_1) = \left(\frac{2}{h_0^2 h_1 + h_0 h_1^2}\right) * \left\{ h_1 u(x_0) - (h_0 + h_1)u(x_1) - h_0 u(x_2) \right\} + \left(\frac{2}{h_0^2 h_1 + h_0 h_1^2}\right)\left(\frac{h_0 h_1^3 - h_0^3 h_1}{3!}\right)u'''(x_1) + \left(\frac{2}{h_0^2 h_1 + h_0 h_1^2}\right)\left(\frac{h_0^4 h_1 + h_0 h_1^4}{4!}\right)u^{IV}(x_1) + \cdots$$

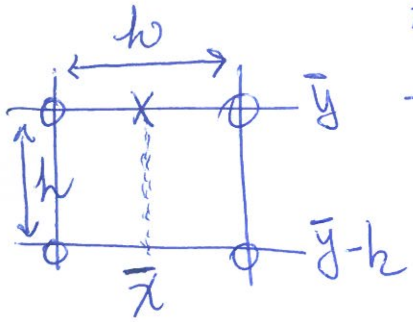
Preguntas:

(a) Considere el caso de una malla uniforme: $h_0 = h_1 = h$. Verifique que el E.L.T. es $O(h^2)$.

(b) Que puede decir acerca del E.L.T. para los casos $h_0 \neq h_1$.

(c) En el caso que $h_0 = h_1 = h$ y $u(x) = 1, x, x^2, x^3$, cual sería el E.L.T.?

Emplee los Operadores en DF D_0 y D_- para construir una FDF para aproximar $u_{xy}(\bar{x},\bar{y})$.



$$u_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \approx D_{0,x}\left(D_{-,y}u(\bar{x},\bar{y})\right)$$

$$\approx \frac{D_{-,y}u(\bar{x}+h/2,\bar{y}) - D_{-,y}u(\bar{x}-h/2,\bar{y})}{2(h/2)}$$

$$\approx \left(\frac{1}{h}\right) * \left\{ \frac{u(\bar{x}+h/2,\bar{y}) - u(\bar{x}+h/2,\bar{y}-h)}{h} - \frac{u(\bar{x}-h/2,\bar{y}) - u(\bar{x}-h/2,\bar{y}-h)}{h} \right\}$$

$$u_{xy}(\bar{x},\bar{y}) \approx \left(\frac{1}{h^2}\right)\left\{ u(\bar{x}+h/2,\bar{y}) - u(\bar{x}+h/2,\bar{y}-h) - u(\bar{x}-h/2,\bar{y}) + u(\bar{x}-h/2,\bar{y}-h) \right\}.$$