Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias - Escuela de Computación
Postgrado en Ciencias de la Computación - Tópicos Especiales en Análisis Numéricos.
Dr. Otilio Rojas.

Ecuación de Onda Elastica: Caso 1D

(Concepts in Continuum Mechanics: Strain, stress, Hooke's law, equation of motion)

1. Cuerda Vibrante (Waves on a String)[1][2]

Estudio Hipotético. Una cuerda "matemáticamente" idealizada con densidad constante ρ y sometida a una fuerza de tensión $\mathcal{T}$. Esta cuerda se se extiende a lo largo de x.

Problema. Describir el desplazamiento vertical u, desde la posición inicial de reposo $u = 0$, después que la cuerda (o una porción) es deformada.

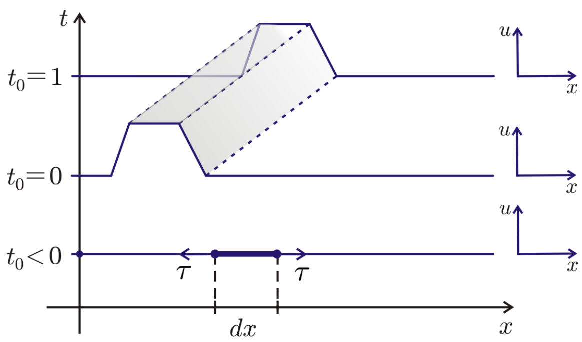

Figura 1.1.

Note: "El desplazamiento $u(x,\, t)$" es una función de la posición x a lo largo de la cuerda y del tiempo t.

Principio Físico. 2^{da} Ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$

Dado que el desplazamiento es estudiado en la dirección de u (ó y), el estudio se simplifica al caso escalar:

$$\mathcal{T}\,\mathrm{sen}\,\theta_2 - \mathcal{T}\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = \rho dx \frac{\partial^2 u(x,\, t)}{\partial t^2} \tag{1}$$

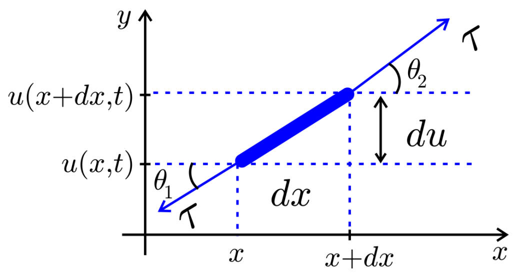

Figura 1.2.

Hipótesis. En el caso que $\theta_1 \sim 0$ y $\theta_2 \sim 0$ (pequeño $\measuredangle$):

$$\mathrm{sen}\,\theta \sim \theta \sim \tan\theta, \qquad \text{pero} \quad \tan\theta_1 \quad \text{representa} \quad \frac{\partial}{\partial x} u(x,\, t).$$

Así

$$\mathcal{T}\left[\frac{\partial}{\partial x} u(x + dx, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,\, t)\right] = \rho dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,\, t) \tag{2}$$

si ahora

$$\underbrace{\mathcal{T}\lim_{dx\to 0}\left[\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}u(x+dx,t)-\dfrac{\partial}{\partial x}u(x,\,t)}{dx}\right]}_{\Rightarrow\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,\,t) \tag{3}$$

de modo que

$$\mathcal{C}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,\,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,\,t), \quad \text{donde} \ \ \mathcal{C} = \sqrt{\frac{\mathcal{T}}{\rho}} \tag{4}$$

Estudiaremos las unidades de $\mathcal{C}$ (sistema MKS):

$$[\mathcal{C}] = \left[\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/seg}^2}{\mathrm{kg/m}}\right]^{1/2} = \left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{seg}^2}\right]^{1/2} = [\mathrm{m/seg}]\,, \tag{5}$$

así $\mathcal{C}$ es velocidad.

La ecuación (4) es llamada "Ecuación de Onda Unidimensional" y permite describir la propagación de Onda (perturbaciones mecánica) a lo largo de la cuerda con una velocidad $\mathcal{C}$.

Note la dependencia de $\mathcal{C}$ en ρ y $\mathcal{T}$:

- En $\mathcal{T}$ — **Directa:** si $\mathcal{T}$ $\uparrow$ y ρ permanecen constante entonces $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\uparrow$, por lo que la propagación se acelera (faster propagation).
- En ρ — **Inversa:** Para una $\mathcal{T}$ fija, mientras mayor es la densida ρ, menor es la aceleración inducida y propagación sucede a baja velocidad.

Observación. Stein dice que el hecho que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\rho)$, justifica la utilidad de este modelo para entender la estructura tierra y las ondas sísmicas. En la realidad, Geocientíficos usan el tiempo que le toma a las ondas viajar de Emisor–Receptor, para estimar la velocidad de propagación y aprender de las propiedades y posible composición de la Tierra.

Soluciones Generales: $f(x \pm ct)$ es solución:

$$\begin{cases} \mathcal{C}^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 f'' \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial t}\big(\mathcal{C}f'\big) = (\mathcal{C})f''(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^2 f'' \end{cases} \tag{6}$$

Es más dada la linealidad de la Ec., la solución general toma la forma:

$$u(x,\,t) = A\underbrace{f(x+ct)}_{\substack{\text{Viajan hacia}\\ \text{la izquierda}}} + B\underbrace{f(x-ct)}_{\substack{\text{viajan hacia}\\ \text{la derecha}}} \tag{7}$$

Note que:

$$x + ct = k_0$$

$$t = \frac{k_0}{c} - \frac{x}{c}$$

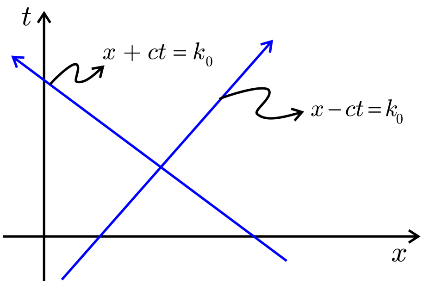

Figura 1.3.

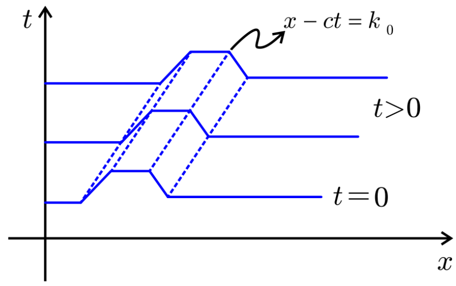

Figura 1.4. La recta es $x - ct = k_0$.

Soluciones Armónicas (Harmonic wave Solutions):

$$u(x,\, t) = \underbrace{A\,e^{i(\omega t \pm kx)} = A\Big[\cos(\omega t \pm kx) + i\,\mathrm{sen}\,(\omega t \pm kx)\Big]}_{\text{Fórmula de Euler}} \tag{8}$$

Comprobamos que esta "ansatz" función satisface $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ para cierta velocidad c:

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}\left[A\,e^{i(\omega t \pm kx)}\, i\omega\right] = \frac{\partial}{\partial}\left[iA\omega\, e^{i((\omega t \pm kx))}\right] = i^2\omega^2 \underbrace{A\,e^{i(\omega t \pm kx)}}_{u} = -\omega^2 u \tag{9}$$

de manera análoga se obtiene

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left[A\,e^{i(\omega t \pm kx)}\, ik\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[Aik\, e^{i(\omega t \pm kx)}\right] = i^2 k^2 \underbrace{A\,e^{i(\omega \pm kx)}}_{u} = -k^2 u \tag{10}$$

Si recordamos la ecuación (4):

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,\, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,\, t)$$

al sustituir (9) y (10) en la Ec. (4), resulta ser la condición:

$$c^2 \cancel{i^2} k^2 u = \cancel{i^2}\omega^2 u \quad \text{si } u \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad c = \left|\frac{\omega}{k}\right| \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{1}{T}\lambda$$

Los parámetros de esta solución armónica:

$$\begin{cases} A: & \text{Amplitud.} \\ \omega: & [\omega] = \text{seg}^{-1}(\text{Hz}) \quad \Rightarrow \quad \text{frecuencia angular} \\ k: & [k] = m^{-1} \quad \Rightarrow \quad \text{número de onda (wave number).} \\ T = & \dfrac{2\pi}{\omega} \quad \text{y} \quad f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \text{seg} \end{cases}$$

Note:

$$\boxed{c = \frac{\lambda}{T} = f\lambda} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}; \qquad [\lambda] = \text{metros}$$

La solución (8) es compleja aunque el desplazamiento debe ser real, y para fines prácticos se toma solo la parte real $A\cos(\omega t \pm kx)$ como solución. Sin embargo, por lo general cuando la forma compleja aparece en la solución de un proceso físico, también aparece su conjugado, por lo que la suma (superposición) genera una solución Real.

Términos y Parámetros en fenómenos ondulatorios asociados a:

$$A\cos(\omega t \pm kx) \tag{11}$$

(a) Fase $\omega t \pm kx$ la cual define rectas de solución constante $u(x,\,t) = u_0$ en el plano $x - t$.

(b) Suponga $x = x_0$:

$$\begin{aligned} u(x_0,\,t) &= A\cos(\omega t \pm \phi_0), \quad \phi_0 = kx_0 \\ &= A\cos(\omega t \pm \phi_0 + 2\pi), \end{aligned}$$

dado que el coseno es periódico en 2π.

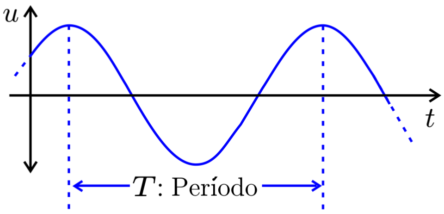

Figura 1.5.

Note que: $u(x_0,\,t) = u(x_0, t+T)$

$$\omega t - \phi_0 + 2\pi = \omega(t + \tfrac{2\pi}{\omega}) - \phi_0$$

Ahora,

$$u(x_0,\,t) = A\cos\big(\omega(t + 2\pi/\omega) - \phi_0\big)$$

Al comparar con la definición de función periódica

$$f(z) = f(z \pm T),$$

siendo T el valor más pequeño, se tiene que $T = 2\pi/\omega$ corresponde al periodo temporal de la solución (11)

(c) El mismo análisis se puede aplicar en espacio: $t = t_0$:

$$\begin{aligned} u(x,\,t_0) &= A\cos(\omega t_0 + kx) \\ &= \cos\big(k(x \pm 2\pi/k) + \phi_0\big), \quad \phi_0 = \omega t_0 \\ &= u(x \pm 2\pi/k,\,t_0) \end{aligned}$$

Este caso se tiene que $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ corresponde al periodo especial de las soluciones (8) y (11).

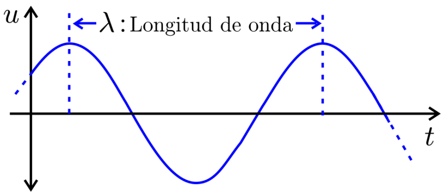

Figura 1.6.

Se puede establecer entonces las siguientes relaciones entre los parámetros de la solución armónica de la ecuación de Ondas:

$$c = \frac{\omega}{k} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = ck \tag{12}$$

i) si la ecuación (12) la dividimos por 2π:

$$\frac{\omega}{2\pi} = c\frac{k}{2\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{T} = c\frac{1}{\lambda},$$

de donde

$$\boxed{\lambda = cT} \tag{13}$$

ii) al dividir (12) por $\omega = 2\pi f$:

$$\frac{2\pi f}{2\pi} = c\frac{k}{2\pi} \qquad \Rightarrow \qquad f = c\lambda^{-1}$$

de modo que

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{f}} \tag{14}$$

las ecuaciones (13) y (14) conectan el parámetro c impuesto por el medio físico, y los 2 parámetros que miden las oscilaciones en tiempo y espacio de una onda armónica. Son fundamentales en el análisis de soluciones analíticas y numéricas a problemas ondulatorios.

Referencias

[1] Stein, S., and Wysession, M. (2003). An introduction to seismology, earthquakes, and earth structure, Blackwell Publishing.

[2] Haberman, R. (2012). Applied partial differential equations with Fourier series and boundary value problems. Pearson Higher Ed.